Pubblicazione bimensile. N. 1.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXV.° — Fascicolo 1°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Astro-fisica. — *Relazione fra la corona e le protuberanze solari* (1). Nota del Socio A. Riccò.

La corona solare è una aureola attorno al sole, formata da un anello di poca altezza, molto luminoso, che è la corona *interna*, sempre presente; da getti corti e sottili, divergenti dalle regioni polari del sole, detti *raggi polari*; da grandi pennacchi che costituiscono la *corona esterna*.

Tutti i tentativi, fatti finora per vedere o fotografare la corona solare fuori degli eclissi, non hanno dato che risultati illusorii, e si è ottenuto invece attorno al sole l'aureola di luce diffusa nella nostra atmosfera. Ciò è accaduto pure allo scrivente, anche operando all'Osservatorio Etneo a quasi 3000 m. di altitudine, con un cielo meraviglioso, azzurro fin contro all'orlo del sole, ed adoperando strumenti moderni perfetti, come il coronografo appositamente fatto costruire da Huggins, e lo spettreliografo ideato da Hale, anzi operando insieme con questo abilissimo esperimentatore.

Ma durante gli eclissi totali di sole la corona si vede in tutta la sua bellezza e si fotografa nei suoi particolari, perchè la luna, coprendo il disco solare, impedisce la illuminazione dell'atmosfera nelle regioni terrestri completamente eclissate.

Nella corona si riscontra una certa simmetria rispetto all'asse di rotazione del sole, ed anche rispetto al suo equatore, negli emisferi nord e sud; il che significa che i getti sono distribuiti con una certa regolarità tutt'attorno lungo i paralleli, e che la loro distribuzione negli emisferi nord e sud è prossimamente eguale.

(1) V. seduta del 7 maggio 1916.

Degli eclissi si hanno ormai numerose e buone descrizioni, disegni e specialmente fotografie, da cui risulta che nella corona vi sono delle variazioni di forma e di sviluppo; e dietro gli studî di Raynard, Hansky, W. Lockyer e Neogamvala, si è riconosciuto che le dette variazioni sono in relazione colle fasi della attività solare nel ciclo undecennale, e si sono stabiliti tre tipi di corona solare.

Tipo del minimo: è il più semplice; formato dalla corona interna, dai raggi polari, ben distinti, e da due ali equatoriali.

Tipo del massimo: formato dalla corona interna, dai raggi polari poco distinti, da parecchi grandi pennacchi, cosicchè risulta la forma *stellare* della corona.

Tipo intermedio: formato dalla corona interna, dai raggi polari e da quattro grandi pennacchi alle latitudini eliografiche di circa 45°, cosicchè risulta la forma a croce di Sant'Andrea (×), od anche la forma *quadrata* della corona.

Questa relazione tra la forma della corona e l'attività solare è ora generalmente ammessa; ma gli astronomi non sono d'accordo nello stabilire se la corona abbia più stretta relazione colle macchie, o colle facole o colle protuberanze solari. E la questione è difficile a risolvere.

Cerchiamo di vedere almeno con quale dei fenomeni della attività solare i getti luminosi della corona abbiano più intima relazione di posizione, e consideriamo intanto la cosa nell'epoca del minimo in cui i fenomeni solari sono più semplici.

Le macchie, all'epoca del minimo, o mancano totalmente o sono ridotte in due zone ristrettissime presso l'equatore solare, le quali, tutt'al più, possono arrivare alle latitudini eliografiche $\pm$ 10°, mentre nella corona i raggi ai poli non mancano mai e le ali equatoriali sono larghe 80 - 90°.

All'epoca del massimo le macchie occupano due zone estese fino a $\pm$ 35° di latitudine, e non più; mentre i pennacchi della corona possono essere a tutte le latitudini eliografiche.

Nelle epoche intermedie le macchie occupano due zone presso l'equatore, larghe meno di 35°, mentre i pennacchi si estendono a 45° ed anche più.

È dunque chiaro che le macchie, le quali non esistono mai nelle regioni polari del sole, non possono avere intima relazione di posizione coi raggi polari della corona e neppure coi pennacchi che si dipartono da latitudini anche molto maggiori di $\pm$ 35°.

Però si potrà obbiettare che la grande estensione in latitudine dei raggi coronali e dei pennacchi sull'orlo del sole può essere apparente, perchè causata da curvatura dei getti luminosi e da prospettiva (secondo la teoria di Schaeberle), per trovarsi la terra, al momento dell'eclisse, sopra o sotto al piano dell'equatore solare.

Ma tale aumento non può essere molto grande: perchè i raggi coronali, per provenire dalle macchie, dovrebbero avere una curvatura fortissima che generalmente non si osserva, e perchè l'angolo di inclinazione dell'equatore solare sull'eclittica è soltanto di 7°15′. Inoltre l'estensione della corona dovrebbe essere due volte massima e due volte minima nell'anno, quando la terra si trova alla massima od alla minima distanza dal piano dell'equatore solare; il che non si verifica.

Non pare quindi probabile che i raggi coronali ed i pennacchi provengano dalle ristrette zone delle macchie solari.

Le facole solari risiedono principalmente nelle zone delle macchie, e spesso le accompagnano e le contornano. Talvolta le facole si osservano pure nelle regioni polari del sole; ma allora sono scarse e deboli, e non persistenti come i raggi polari.

Dunque, neppure le facole possono avere stretta relazione con la corona solare.

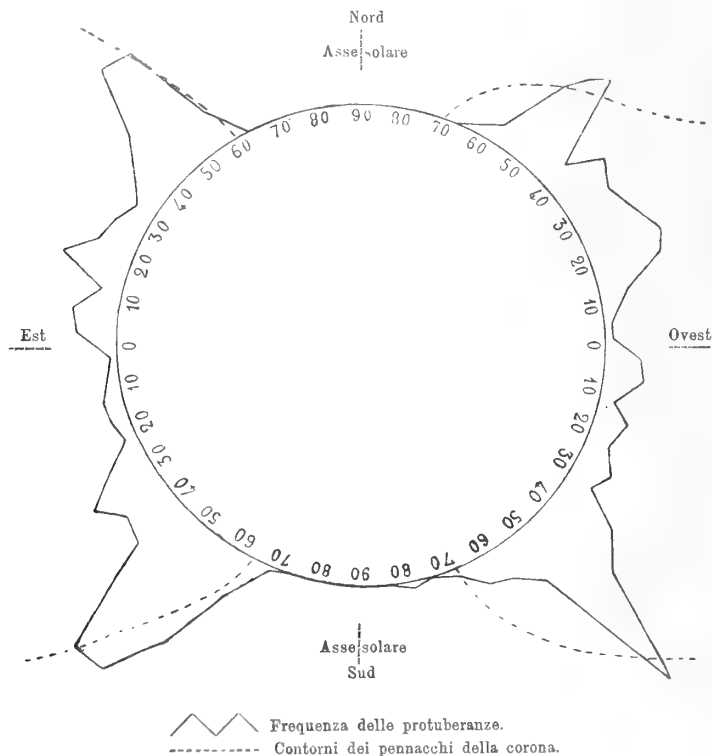
Le protuberanze, all'epoca del minimo generale dei fenomeni solari (e, per alcuni anni, prima e dopo), hanno i massimi della loro frequenza a circa ± 50° di latitudine eliografica, presso cui si osserva il massimo di intensità ed estensione dei pennacchi della corona, e ciò ha luogo approssimativamente anche nelle epoche intermedie fra il massimo ed il minimo dell'attività solare. Talchè, se si rappresenta graficamente la frequenza delle protuberanze alle varie latitudini solari mediante prolungamenti dei raggi del disco solare, proporzionali alla frequenza stessa, si ottiene una figura che ricorda la corona; e se poi si fa passare una linea continua per la estremità dei detti prolungamenti, si ottiene un contorno somigliante a quello della corona.

Nelle epoche di massimo, le protuberanze presentano, in ciascuno dei quattro quadranti del contorno solare, ordinariamente due massimi di frequenza, cioè otto su tutto l'orlo, e corrispondentemente nella corona si ha un numero di pennacchi maggiore che non nelle altre epoche, i quali dànno il tipo stellare. La costruzione grafica, accennata prima, dà un risultato analogo.

Si aggiunga, poi, che in molti disegni ed in molte fotografie di eclissi si notano i pennacchi della corona coincidenti o sovrastanti od avviluppanti le protuberanze.

Infine dirò che i getti della corona sono evidentemente fenomeni di proiezione, di eruzione, come lo sono le protuberanze; mentre le macchie sono di natura ciclonica, come è stato messo in evidenza dai moderni studi ingegnosissimi dell' Hale.

Dirò pure che le *protuberanze bianche* (scoperte dal Tacchini nell'eclisse del 1886), fenomeni solari ancora enigmatici, sono però ritenuti dai competenti come oggetti intermedii fra le comuni protuberanze rosee ed i getti coronali, che pure sono quasi bianchi.

Per confrontare in modo più determinato la disposizione dei getti coronali con la distribuzione in latitudine delle protuberanze, consideriamo il caso particolare dell'eclisse del 21 agosto 1914; perciò ho voluto studiare la detta distribuzione in un periodo limitato, comprendente l'eclisse, cioè dal 1° luglio al 30 settembre 1914. Siccome però in quel trimestre le nostre osservazioni, in causa della missione per l'eclisse, sono state fatte in luoghi diversi, con strumenti diversi e da persone diverse, per avere una serie più

omogenea ho pensato di chiedere al direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano la comunicazione delle osservazioni quotidiane delle protuberanze solari eseguite dall'astronomo dottor E. Tringali. Questi anzi ha fatto uno studio accuratissimo della detta distribuzione di tutte le protuberanze, grandi e piccole, nel detto periodo. Gratissimo al direttore ed all'astronomo dell'Osservatorio del C. R. per la pregevole collaborazione concessa, a scopo di brevità ora ne riporto qui soltanto i principali risultati, importanti per questa indagine; anzi ne dò soltanto una rappresentazione grafica, che li compendia, nella unita figura; ove la linea spezzata rappresenta (come si è detto sopra) la frequenza delle protuberanze in zona di 5° di latitudine eliografica.

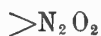
Anche qui non si può fare a meno di vedere una certa analogia tra l'insieme del tracciato della detta linea e il contorno della corona, come è nelle fotografie della Missione, le quali ebbi l'onore di presentare all'Accademia nell'adunanza del 17 gennaio 1915.

E tracciando, sulla figura, con linee a tratti i quattro contorni esterni, ben definiti, dei grandi pennacchi della corona nella loro posizione e forma (come risulta dal disegno che il signor L. Taffara, valente disegnatore, ha ricavato geometricamente dalle summentovate fotografie), non si può fare a meno di vedere la loro intima relazione colle regioni della maggiore frequenza delle protuberanze. Le quali regioni sono all'interno della concavità delle ali coronali; il che indica che i grandi pennacchi della corona avvolgono le regioni ove più spesso sorgono le protuberanze.

In conclusione, pare dimostrato che i getti luminosi della corona sono emessi dalle stesse regioni donde sono emesse le protuberanze; e probabilmente hanno, in qualche modo, origine comune.

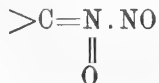
Chimica. — *Sopra la configurazione di alcune gliossime* [1] Nota del Socio A. Angeli [2].

Le ricerche che si riferiscono alla presente comunicazione furono eseguite allo scopo di approfondire lo studio di alcune sostanze, sulla costituzione delle quali regnano ancora delle incertezze, e che nella loro molecola contengono un aggruppamento

$$>N_2O_2$$

unito ad uno, ovvero più atomi di carbonio: intendo di parlare di quella classe di composti che io ho scoperta circa 20 anni or sono e che ho chiamati pernitrosoderivati

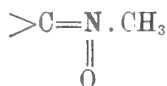
$$>C{=}N_2O_2$$

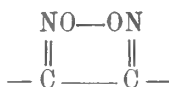
e di quell'altra serie, del pari numerosa, costituita dai perossidi delle diossime. Intorno alle esperienze sui pernitrosoderivati riferirò in una prossima comunicazione: per oggi mi limiterò ad accennare che anche le nuove ricerche conducono ad ammettere che in queste sostanze sia contenuto un aggruppamento della forma

$$\begin{array}{l} >C{=}N.NO \\ \phantom{>C{=}}\| \\ \phantom{>C{=}}O \end{array}$$

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica organica del R. Istituto di studî superiori in Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 giugno 1916.

vale a dire che si devono considerare come eteri N-nitrosi di ossime, perfettamente analoghi agli eteri N-alchilici che le stesse ossime possono fornire:

$$\begin{array}{l} >C{=}N.CH_3 \\ \qquad\ \ \| \\ \qquad\ \ O \end{array}$$

Per quanto riguarda i perossidi delle gliossime, il Koreff, che li ha scoperti [1], ha ad essi attribuito la struttura

$$\begin{array}{ccc} NO & — & ON \\ \| & & \| \\ —C & — & C— \end{array}$$

che in seguito è stata accettata da tutti gli autori che si sono accupati di queste sostanze, come Victor Meyer, Werner, Beckmann etc. Solamente alcuni anni più tardi sono sórti dei dubbî sulla costituzione ad essi assegnata.

Come è noto, questi perossidi si formano con grande facilità per ossidazione delle diossime degli α-dichetoni; ed in ogni caso si arriva ad un identico perossido, qualunque sia la configurazione dell'ossima da cui si parte. Molti anni or sono, io ho trovato [2] che, riducendo questi perossidi con la quantità calcolata di idrogeno, è possibile realizzare anche la trasformazione inversa, vale a dire il passaggio del perossido alla diossima; solamente, in questo caso si perviene ad una unica diossima, che possiede una configurazione bene determinata e precisamente quella che è capace di fornire gli interessanti sali complessi scoperti da Tschugaeff. Si tratta di quelle diossime, cui, per la grande tendenza a dare anidridi, Hantzsch e Werner assegnarono la configurazione

$$\begin{array}{ccc} R.C & — & C.R \\ \| & & \| \\ NOH & & HON \end{array}$$

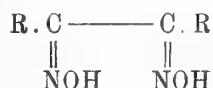
Questa formola, che è in accordo con molti altri fatti, è stata in seguito messa in dubbio dalle ricerche di Beckmann [3], il quale ha applicato anche alla determinazione della struttura delle diossime la trasposizione che porta il suo nome e che, come è noto, consiste nel trasformare gli isonitrosocomposti nelle anilidi isomere, ovvero in derivati di queste ultime, dalla

[1] Berliner Berichte, *19*, 181; vedi anche Ilinski, ibid., *19*, 349,

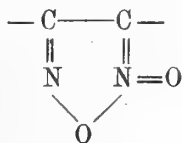
[2] Gazzetta Chimica, *22*, II, 430; Berliner Berichte, *25*, 1960.

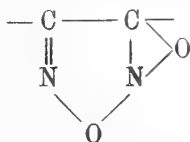
[3] Liebig's Annalen, *274*, 15: Angeli e Malagnini, Gazzetta Chimica, *24* (1894), II, pag. 131.

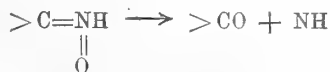
costituzione delle quali si deduce la configurazione dei primi [1]. Il Beckmann ha trovato che sottoponendo al suo trattamento, con pentacloruro di fosforo in soluzione etera, la diossima in parola, ed operando sempre a bassa temperatura, si arriva a prodotti che conducono alla stessa formola; se invece la reazione procede a temperatura di alcuni gradi più bassa, allora ne seguirebbe l'altra configurazione

```
R.C ——— C.R
  ||      ||
 NOH     NOH
```

che è quella che egli preferisce, sebbene essa sia in contraddizione con tutte le altre reazioni che le stesse diossime presentano.

Pe conciliare le vedute di Beckmann col fatto che tale forma di diossime è precisamente quella che proviene anche dalla riduzione dei perossidí, non sono mancati i tentativi diretti a modificare anche la struttura che veniva generalmente attribuita a questi ultimi; così Werner [2], in via ipotetica, ha ad essi assegnata la formola

```
— C —— C —
  ||     ||
  N      N=O
   \    /
     O
```

che meglio sarebbe in armonia con quanto Beckmann ha trovato. Qualche anno più tardi [3], ha subìto una lieve modificazione da parte di Wieland,

```
— C —— C —
  ||     | \
  ||     |  >O
  N      N /
   \    /
     O
```

[1] Si è cercato in diversi modi di spiegare la trasposizione di Beckmann; anni or sono (questi Rendicconti, XVII, 1° sem., pag. 311) io ne ho rilevato la somiglianza con le trasposizioni pinacoliniche e forse essa non è estranea alla decomposizione da me osservata per la prima volta (questi Rendiconti, XXI, 1° sem., pag. 83):

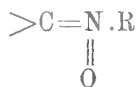
```
>C=NH  ——>  >CO + NH
   ||
   O
```

che è perfettamente analoga all'altra da me notata per il primo:

```
>C=N.NO
   ||       ——>  >CO + N₂O .
   O
```

[2] Lehrbuch der Stereochemie, Jena 1904, pag. 260.

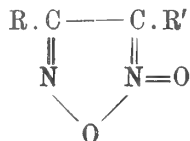
[3] Liebig's Annalen, *358*, 66.

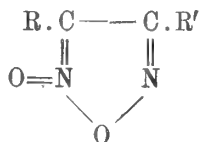
il quale in questa occasione ha proposto per questi perossidi il nome di furossani (ossifurazani). Come si vede subito, la formola di Wieland conterrebbe uno di quegli anelli formati da tre atomi (carbonio, azoto ed ossigeno), anelli che si ammettevano esistere anche negli eteri N-alchilici delle ossime. Ora io ho dimostrato [1] che in queste ultime sostanze sono invece da considerarsi come ossidi,

$$\begin{array}{c} >C{=}N.R \\ \quad\; \| \\ \quad\; O \end{array}$$

che nella struttura e nel comportamento molto si accostano agli azossicomposti i quali pure, come le mie ricerche hanno stabilito [2], sono da considerarsi come ossidi e non come contenenti un anello costituito da due atomi di azoto ed uno di ossigeno a seconda della costituzione che ad essi aveva attribuita il Kekulé.

Ma anche contro la nuova struttura dei perossidi, sia essa da esprimersi secondo l'una o secondo l'altra formola, dedotte dal comportamento della diossima rispetto alla trasposizione di Beckmann, stanno molti altri fatti che la rendono inaccettabile.

Intanto si comprende subito che, se lo schema corrispondesse alla realtà,

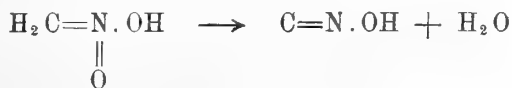
$$\begin{array}{ccc} R.C & — & C.R' \\ \| & & \| \\ N & & N{=}O \\ & \diagdown\;\diagup & \\ & O & \end{array}$$

il composto non sarebbe più simmetrico quando R è differente da R', e perciò dovrebbe poter presentarsi anche nell'altra forma

$$\begin{array}{ccc} R.C & — & C.R' \\ \| & & \| \\ O{=}N & & N \\ & \diagdown\;\diagup & \\ & O & \end{array}$$

in modo simile a quanto io ho dimostrato per il caso degli azossicomposti che ho potuto ottenere nelle due forme

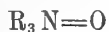
$$\begin{array}{c} R.N{=}O \\ \| \\ R'.N \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} R.N \\ \| \\ R'.N{=}O \end{array}$$

[1] Angeli, Alessandri e Mancini, questi Rendiconti, XX (1911), 1° sem., pag. 546.
[2] Questi Rendiconti, XXII (1913), 1° sem., pag. 282.

Ora, per quanto si mutino le reazioni con cui si preparano tali sostanze, nel caso di prodotti a radicali diversi, si perviene sempre ad una unica sostanza: infatti lo stesso perossido si può avere ossidando le diossime, sia facendo reagire l'anidride nitrosa sopra i composti olefinici, ovvero anche eliminando una molecola di acqua dalle nitrossime. Quest'ultimo modo di formazione, come io ho ammesso molti anni or sono e come più tardi ha supposto anche Wieland, si può paragonare alla produzione dei furazani per anidrificazione delle gliossime; ma subito si comprende che si può intendere anche in altra maniera sebbene la reazione si riduca, in ultima analisi, sempre ad un processo di anidrificazione. È infatti noto che gli acidi nitronici possono anche reagire da ossidanti e che in alcuni casi possono anche ossidare sè stessi, come avviene p. es. nel caso del nitrometano che si trasforma in acido fulminico:

$$\begin{array}{l} H_2C{=}\underset{\underset{\displaystyle O}{\|}}{N}.OH \longrightarrow C{=}N.OH + H_2O \end{array}$$

Perciò è probabile che anche nella formazione dei perossidi dalle nitrossime, invece di una semplice eliminazione di acqua fra due ossidrili, si tratti dell'eliminazione di due atomi d'idrogeno determinata dall'atomo di ossigeno del residuo nitronico.

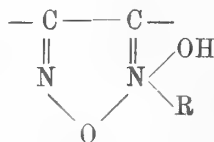
I fatti esposti rendono dunque assai poco probabile che l'anello contenuto nei così detti perossidi delle diossime abbia una struttura non simmetrica. Ma poi vi ha un'altra considerazione che parla contro l'ipotesi che in queste sostanze sia contenuto un atomo di ossigeno unito ad un azoto pentavalente. In questo caso infatti, come ho già prima accennato, si tratterebbe di un ossido, per quanto l'atomo di azoto concorra alla formazione di un anello. Ora è noto che tutti gli ossidi, che si possono ottenere per ossidazione dei composti contenenti l'azoto trivalente, hanno altresì la tendenza a perdere il loro atomo di ossigeno; così le ammine terziarie, per azione dell'acqua ossigenata, dànno i prodotti

$$R_3N{=}O$$

gli azoderivati forniscono gli azossicomposti, le ossime i nitroderivati, ecc.

Reciprocamente gli ossidi delle ammine, gli azossicomposti ed i nitroderivati, perdono con grande facilità un atomo di ossigeno per dare ammine terziarie, azoderivati, ovvero le ossime. Ora io ho trovato che i furazani non sono in grado di assumere un atomo di ossigeno per dare i perossidi, per quanto abbia mutato le condizioni dell'esperienza e sia anche ricorso all'impiego degli ossidanti più energici. La reazione inversa si può sempre effettuare; ma come primo prodotto di riduzione comparisce sempre la diossima che in una fase successiva perde acqua per dare il furazano. La trasforma-

zione studiata da Wieland non procede netta; e poi richiede un riscaldamento con pentacloruro di fosforo a 100°, prolungato per alcune ore. Ora io sono ricorso anche all'impiego di un altro mezzo molto blando e caratteristico, col quale si può eliminare con facilità in molti casi l'atomo di ossigeno legato ad un azoto pentavalente. Io ho infatti trovato che il reattivo di Grignard reagisce facilmente sopra gli azossicomposti trasformandoli in azoderivati; anche in questo caso si forma dapprima, con tutta probabilità, un prodotto di addizione, che successivamente elimina l'ossigeno sotto forma di alcool. Invece lo stesso reattivo lascia inalterati i furazani, per quanto si operi a temperatura elevata e si prolunghi la durata della reazione.

Lo studio dell'azione dei composti alchilalogenomagnesiaci sopra i perossidi venne già eseguito da Wieland e Semper [1]; ma gli autori sono arrivati ad un risultato perfettamente negativo, *avendo essi trovato che i perossidi delle diossime non reagiscono con il reattivo di Grignard.* Anzi aggiungono che, se il prodotto contenesse un doppio legame fra azoto ed ossigeno, sarebbe da attendersi la formazione di composti ossidrilici di addizione

```
 — C —— C —
   ||     ||  /OH
   N      N<
    \    /  \R
      O
```

ovvero di loro derivati di decomposizione.

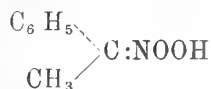
Per quanto si tratti di un chimico dotato di grande abilità sperimentale come H. Wieland, io non sono rimasto convinto di questa sua asserzione rispetto alla inattività dei perossidi delle gliossime di fronte al reattivo di Grignard, sebbene egli ripeta di aver bollito la soluzione eterea di ioduro di etilmagnesio con il perossido della difenilgliossima e dell'anisilmetilgliossima e di avere riottenuto i prodotti perfettamente inalterati. Perciò non è stata piccola la mia sorpresa quando, ripetendo le sue esperienze, ho potuto constatare che le sue asserzioni non sono vere, avendo io trovato che *i perossidi delle gliossime reagiscono facilmente con il reattivo di Grignard.* Io non so a quale fatto sia da attribuirsi l'errore in cui è caduto Wieland; se si trattasse di un unico prodotto, si potrebbe supporre che egli abbia preso una sostanza per l'altra: ma siccome egli ha esaminato più di un perossido non si può ammettere che l'errore si sia ripetuto. Eppure la reazione è vivace, ed egli ha adoperato la soluzione eterea dei perossidi; e più rapida ancora si compie quando si usi della soluzione benzolica dei perossidi, giacchè questi in benzolo sono molto più solubili che in etere. Io ho sempre

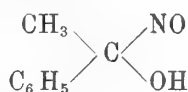
[1] loc. cit.; vedi anche L. Semper, *Zur Kenntniss der Glyoximperoxyde.* Inaugural Dissertation, München, 1907.

adoperato reattivo in eccesso (una soluzione eterea di bromuro di fenilmagnesio); e sebbene le mie ricerche sieno tutt'altro che complete, operando sopra il perossido della piperilmetilgliossima nel solito modo, ho trovato che i prodotti della reazione sono costituiti principalmente da nitrile piperonilico, acetofenone ed un chetone ancora sconosciuto, che molto rassomiglia al benzofenone, senza dubbio della forma

$$(CH_2O_2).C_6H_3.CO.C_6H_5 .$$

L'acqua, proveniente dal trattamento con ghiaccio del prodotto, presenta la reazione dei nitroderivati di Konowalow; acidificata con acido solforico diluito, intorbida e si separa un olio colorato in verde; dopo poco tempo, il verde scomparisce e l'etere estrae un liquido denso che ha forte odore di acetofenone e che lentamente si decompone sviluppando prodotti nitrosi. Ciò rende molto probabile che nell'acqua sia contenuto il sale di un acido nitronico

$$\begin{matrix} C_6H_5 \diagdown \\ \quad C{:}NOOH \\ CH_3 \diagup \end{matrix}$$

ed è noto che questi sali facilmente si decompongono per trattamento con acidi: in parte dànno il nitroderivato isomero, ed in parte si trasformano nel nitroalcool, pure isomero e colorato in verde,

$$\begin{matrix} CH_3 \diagdown & & \diagup NO \\ & C & \\ C_6H_5 \diagup & & \diagdown OH \end{matrix}$$

che a sua volta fornisce acetofenone.

Il chetone

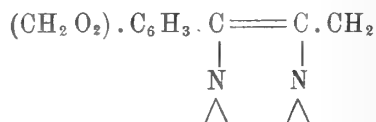
$$(CH_2O_2).C_6H_3.CO.C_6H_5$$

con tutta probabilità, prende origine dal nitrile piperonilico, in seguito ad zione ulteriore del bromuro di fenilmagnesio; infatti Blaise ha dimostrato che per tale trattamento i nitrili forniscono facilmente composti chetonici.

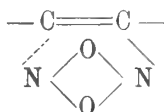
Come si vede, questi risultati sono in contraddizione non solo con le esperienze ma anche con le considerazioni di Wieland; infatti i perossidi reagiscono con il reattivo di Grignard, ed i prodotti che si ottengono non sono quelli che sarebbero da aspettarsi se fosse vera la struttura che egli ha ad essi assegnata.

È noto che il reattivo di Grignard agisce di preferenza sui legami multipli, doppî o tripli; ora, la formazione di nitrile piperonilico e di acetofenone (che probabilmente proviene esso pure da acetonitrile) conduce

ad ammettere che nel perossido in parola sia contenuto l'aggruppamento

$$
\begin{array}{l}
(CH_2O_2).C_6H_3.C \!=\!=\! C.CH_2 \\
\qquad\qquad\quad\;\; | \qquad\; | \\
\qquad\qquad\quad\;\; N \qquad N \\
\qquad\qquad\quad\;\; \wedge \qquad \wedge
\end{array}
$$

nel quale figura il doppio legame nel punto dove la catena viene spezzata dal reattivo di Grignard.

Questo fatto porta una conferma all'altra formola che recentemente gli inglesi A. G. Green e F. M. Rowe ([1]) hanno attribuito ai perossidi:

$$
\begin{array}{c}
— C \!=\!=\! C — \\
N \langle O, O \rangle N
\end{array}
$$

Una volta dimostrato che la struttura attribuita da Wieland ai perossidi più non regge alla stregua dei fatti sperimentali. perdono altresì ogni valore anche le considerazioni che egli aveva fatte per metterla in accordo con i risultati forniti dalla trasposizione di Beckmann, per quanto riguarda la configurazione delle gliossime che dai perossidi si possono ottenere. Come venne già detto prima, alla benzildiossima, che, secondo il mio metodo, si forma per riduzione del perossido, Beckmann aveve assegnato la configurazione

$$
\begin{array}{l}
C_6H_5.C \text{———} C.C_6H_5 \\
\quad\;\; \| \qquad\quad\; \| \\
\quad NOH \qquad NOH
\end{array}
$$

per il fatto che, trattata con pentacloruro di fosforo, fornisce benzoilfenilurea

$$C_6H_5.CONH.CO.NH.C_6H_5 .$$

Ora, per quanto si operi a bassa temperatura, Beckmann adopera un reattivo molto energico quale il pentacloruro; non solo, ma come termini intermedî si formano, con ogni probabilità, dei prodotti clorurati, i quali potrebbero anche avere una configurazione diversa da quella del prodotto di partenza. Se questa trasposizione ha prestato buoni servigi quando si è trattato di stabilire la configurazione delle monossime. nel caso delle diossime può condurre a risultati incerti ovvero che sono in contraddizione con tutto il loro comportamento chimico. Anche il Werner ([2]), che pure ha cercato di conciliare questi risultati contradittorî, dice che, per avere dati sicuri

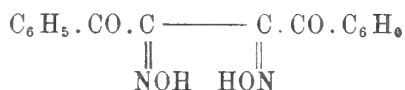
([1]) Chem. Zentsalblatt (1914), I, 392; ibid., II, 878.
([2]) loc. cit., pag. 277.

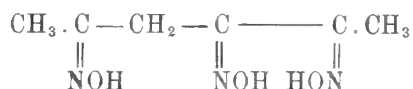
per determinare la configurazione delle gliossime, sarebbe necessario stabilire in modo inconfutabile il modo con cui procede la trasposizione di Beckmann, giacchè, da quanto risulta dallo studio dei composti etilenici, le reazioni intramolecolari nella posizione *cis* non sono sempre le preferite; e siccome lo studio delle ossime del benzile ha condotto a tante contraddizioni tra le formole di configurazione ricavate con metodi diversi, non è da escludersi che la trasposizione di Beckmann possa compiersi anche fra gruppi situati nella posizione *anti*.

D'altra parte nessuno può più dubitare che alla diacetildiossima, l'unica conosciuta e l'unica che si ottenga per riduzione del perossido, non spetti la configurazione

$$\begin{array}{ccc} CH_3.C & \text{———} & C.CH_3 \\ \| & & \| \\ NOH & & HON \end{array}$$

Inoltre la dibenzoilgliossima

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5.CO.C & \text{———} & C.CO.C_6H_5 \\ \| & & \| \\ NOH & & HON \end{array}$$

che io ho ottenuta per riduzione del perossido di Holleman [1], e l'altra, pure da me preparata,

$$\begin{array}{ccccc} CH_3.C & —CH_2— & C & \text{———} & C.CH_3 \\ \| & & \| & & \| \\ NOH & & NOH & & HON \end{array}$$

hanno tale tendenza a perdere una molecola di acqua, che basta distillare le loro soluzioni perchè vengano trasformate nelle corrispondenti anidridi; ed anche per questo fatto sarebbe assurdo attribuire ad esse una configurazione diversa da quella da me assegnata. Ora io ho trovato che anche queste ossime possono fornire sali complessi analoghi a quelli di Tschugaeff.

In qualunque modo si vogliano rappresentare questi sali, si comprende che per la loro formazione le diossime devono essere quelle che contengono gli ossidrili vicini, come nella diacetildiossima. Nelle diossime di altra configurazione gli ossidrili occupano un'altra posizione nello spazio, sono più lontani l'uno dall'altro: perciò più non sono in grado di formare sali complessi, nello stesso modo che l'acido salicilico può dare sali complessi che invece non si possono ottenere dagli isomeri, l'acido meta- e l'acido para-ossibenzoico [2].

[1] Gazzetta Chimica, *23*, I, 419; Berliner Berichte, *26*, 528.
[2] G. A. Barbieri, questi Rendiconti, XXIII (1914), 2° sem., pag. 409.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota VIII: *Azione dei gas della respirazione sul preparato diaframmatico* (parte 3ª), del Corrispondente Filippo Bottazzi [1].

IV.

Influenza della totale privazione di ossigeno sul preparato diaframmatico.

Da molti esperimenti risulta che la semplice soppressione della corrente di ossigeno gorgogliante per il liquido di Ringer, in cui trovasi immerso il preparato diaframmatico, non produce in questo effetti molto nocivi. Ho potuto anche osservare casi nei quali, non solo l'eccitabilità diretta del muscolo, ma anche quella del nervo e delle giunzioni neuro-muscolari si mantenne per un tempo considerevole, e perfino si restaurò in parte, dopo essere scomparsa, mediante nuova somministrazione di ossigeno.

Evidentemente, in tali condizioni, al preparato non può dirsi che questo gas sia sottratto interamente, perchè esso può utilizzare quel poco che dall'aria si scioglie nel liquido di Ringer.

Tuttavia, la sopravvivenza dei preparati è sempre minore di quando l'ossigeno viene ad essi somministrato in abbondanza.

Stimo superfluo di riprodurre tracciati a sostegno di quanto ho detto, trattandosi di cosa ovvia e anche prevedibile.

Debbo aggiungere che le più o meno lunghe curve di fatica, registrate nelle dette condizioni, non presentano alcun carattere peculiare. Esse differiscono da quelle registrate in presenza di ossigeno, solo per essere più brevi: cioè per il fatto che le contrazioni ritmiche, provocate da stimoli di frequenza non eccessivamente grande o piccola (per lo più 25-40 stimoli al minuto) diminuiscono più rapidamente in altezza, e più presto giunge il momento in cui il muscolo non reagisce più alle stimolazioni.

Non si osservano accorciamenti del preparato assai degni di nota, nè mi è occorso mai di vedere che nelle dette condizioni di parziale asfissia le contrazioni aumentassero di altezza per un tempo tale da poter escludere che l'aumento fosse dovuto ad altre cause.

* * *

Assai più gravi sono gli effetti della totale privazione di ossigeno, che io ho ottenuta facendo gorgogliare per il liquido di Ringer (quando il pre-

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1916.

parato era del tutto o solo in parte immerso), o passare per la camera (quando il preparato era tenuto all'asciutto), una corrente di azoto (già portato alla temperatura alla quale si trovava il muscolo) tale da espellere totalmente l'ossigeno dall'ambiente in cui il muscolo era stimolato e si contraeva.

Credo opportuno di rammentare, per altro, che, operando in questa maniera, non solo l'ossigeno, ma anche l'acido carbonico viene ad essere in parte espulso, sia quello preesistente in combinazione nel liquido di Ringer, come anche quello che nel muscolo si forma durante la sua attività. Di conseguenza, il muscolo viene a trovarsi, quando è immerso, in un liquido non solo privo di ossigeno ma anche reso leggermente alcalino a causa dello spostamento e della espulsione dell'acido carbonico.

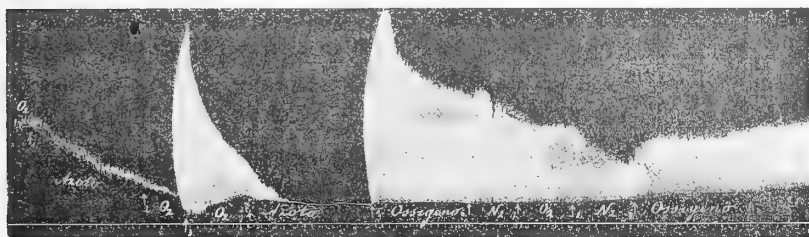



Fig. 1 (2/5). — Preparato frenico-diaframmatico di cane, immerso in liquido di Ringer.

Temper.: 30° C. Peso gr. 10. Tempo: 1. Stim.: 2 Accum. Edison; DR = 200 mm. da 3 a 5, = 100 mm. da 5 in poi. Per il liquido di Ringer (in cui il preparato era immerso) fu fatto gorgogliare: ossigeno dal principio fino a 1, e poi da 2 a 4, da 5 a 6, da 7 a 8, e da 9 in poi; azoto da 1 a 2, da 4 a 5, da 6 a 7, e da 8 a 9. Frequenza delle stimolazioni: 32 per 1′ (20 novembre 1914).

L'esperimento, al quale si riferisce il tracciato della fig. 1, è molto istruttivo. Il preparato neuro-muscolare eseguiva contrazioni ritmiche automatiche cospicue, quando in 1 all'ossigeno, gorgogliante per il liquido di Ringer, fu sostituito l'azoto. Subito il tono si abbassò e rapidamente, pur continuando le contrazioni automatiche; nè la successiva somministrazione di ossigeno (in 2) valse (per breve tempo) a rilevarlo.

Questo effetto richiama alla memoria l'azione deprimente immediata che la sottrazione dell'ossigeno o, peggio, la somministrazione di una traccia di acido carbonico esercita sul tono dei preparati muscolari lisci [1], e fa pensare che in ambedue i casi una stessa (o di natura affine) sia la struttura sulla quale agisce l'asfissia.

In 3 fu iniziata la stimolazione del nervo, e fu registrata la corrispondente curva di fatica. In 4, e fino a 5, fu sostituito all'ossigeno l'azoto: subito le contrazioni diminuirono di altezza, e la curva di fatica precipitò

[1] Ved. a questo proposito un'altra mia prossima pubblicazione.

verso l'ascissa sino al momento in cui le stimolazioni si dimostrarono del tutto inefficaci. Sostituito di nuovo l'otsigeno all'azoto, e aumentata l'intensità degli stimoli (DR = 100 mm.), in 5 si cominciò a stimolare direttamente il muscolo. In seguito si fece gorgogliare per il liquido di Ringer, alternativamente, ossigeno (fino a 6, e poi da 7 a 8, e da 9 in poi) e azoto (da 6 a 7, e da 8 a 9). Il tracciato dimostra che durante il passaggio dell'azoto le contrazioni diminuiscono, mentre durante il passaggio dell'ossigeno tornano ad aumentare di altezza. Intanto si noti che, al momento in cui furono iniziate le stimolazioni dirette del muscolo, questo era sempre eccitabilissimo, sebbene da 18 minuti si trovasse in atmosfera di solo azoto.

L'influenza che esercita la semplice sottrazione dell'ossigeno, ottenuta per mezzo di una corrente di azoto, fu dimostrata anche dai tracciati che ottenni in un altro esperimento. Due preparati diaframmatici dello stesso animale, *A* e *B*, dopo una breve permanenza in ossigeno, furono esposti per parecchio tempo all'azione dell'asfissia, cioè tenuti immersi per $^4/_5$ della loro lunghezza in liquido di Ringer per il quale gorgogliava una corrente di azoto. *A* fu lasciato sempre a riposo, *B* fu stimolato ritmicamente. Il muscolo *A* presentò un lievissimo accorciamento; invece *B*, oltre ad accorciarsi un poco, incominciò subito ad eseguire contrazioni molto basse, cioè presentò subito fenomeni di fatica. Ma la contrattilità del muscolo si conservò, sebbene assai ridotta, per un tempo notevolmente più lungo di quanto si sarebbe conservata in presenza di solo acido carbonico. Quindi si sostituì all'azoto l'acido carbonico. Le contrazioni prestissimo cessarono nel muscolo *B*; e in tutti e e due i preparati apparve, dopo breve tempo, un accorciamento da rigidità assai cospicuo.

Gli effetti della totale sottrazione dell'ossigeno, sul muscolo stimolato ritmicamente all'asciutto, ma tenuto immerso nel liquido di Ringer durante gl'intervalli di riposo, sono visibili nella fig. 2.

I due tracciati, *A* e *B*, furono scritti da due preparati dello stesso animale tenuti nelle identiche condizioni, entro la stessa camera-termostato, e stimolati alternativamente. Da 1 a 2, mentre il preparato *B* si trovava in atmosfera di O_2, il preparato *A* si trovava in atmosfera di N_2.

Come si vede, le contrazioni ritmiche di *A* subito incominciarono a diminuire di altezza e poi cessarono del tutto; il preparato *B*, invece, continuò sempre a contrarsi normalmente. Da 2 e 3, entrambi i prepapati furono lasciati a riposo, immersi in liquido di Ringer e in atmosfera di ossigeno. Il riposo restaurò la contrattilità assai meglio in *B* che non in *A*. Da 4 a 5 fu sottratto l'ossigeno al preparato *B*, mentre *A* fu lasciato in atmosfera di ossigeno.

L'effetto su *B* dell'asfissia fu questa volta analogo a quello precedentemente osservato su *A*. Si guardi in fine l'ultimo tratto a destra dei due tracciati. L'accorciamento da rigidità s'iniziò prima e fu più cospicuo in *B*,

che fu lasciato in atmosfera di azoto, che non in *A*, rimasto in atmosfera di ossigeno.

Come ho già accennato, l'espulsione dell'O_2 mediante una corrente di N_2 non altera in modo degno di nota la eccitabilità del muscolo lasciato a riposo (fig. 3; ved. tracciato *A*, da 2 a 3, e da 3 a 4); ma se il muscolo è stimolato, cioè se gli si fa compiere lavoro in assenza di O_2, allora esso si accorcia tonicamente, e in breve tempo cessa di reagire alle stimolazioni (fig. 2; ved. tracciati *A*, fra 1 e 2). Da altri esperimenti risulta che l'accor-

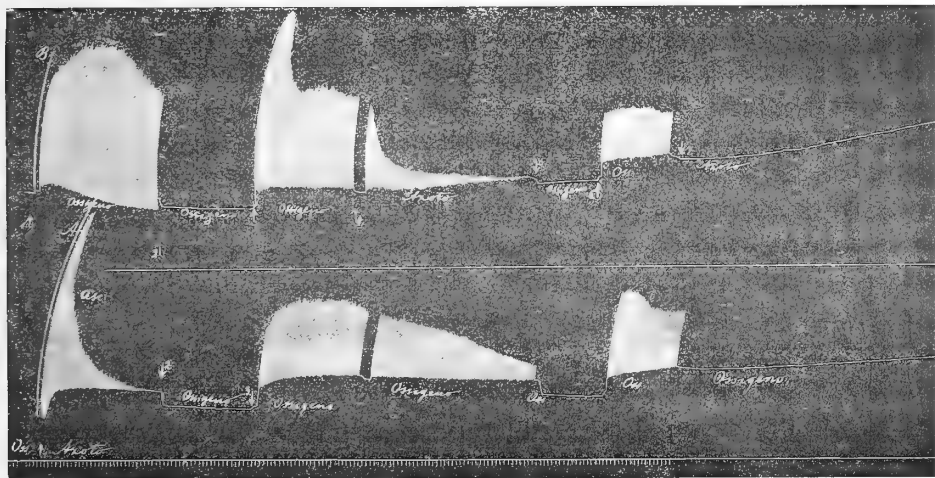



FIG. 2 ($^1/_2$). — *A* e *B*, due preparati diaframmatici della metà destra del diaframma di un cane molto giovane, non immersi durante le stimolazioni, immersi in liquido di Ringer durante i periodi di riposo.

Temper.: 32° C. Peso gr. 4. Tempo: 1'. Stimol.: 2 accum. Edison; DR=150 mm. Frequenza: 34 stimol. al 1' (16 giugno 1915).

ciamento del muscolo aumenta considerevolmente (rigidità) quando all'azoto si sostituisce l'acido carbonico. La presenza di questo è, dunque, assai più nociva della semplice assenza di ossigeno. Il che, del resto, è dimostrato anche dalla maggiore rapidità con cui le contrazioni ritmiche decrescono in altezza, quando il muscolo è stimolato in atmosfera di sola CO_2 (ved. fig. 3: tracciato *A* da 4 a 5, e tracciato *B* da 1 a 2).

La fig. 3 dimostra, inoltre, e a conferma di quanto ho detto nelle parti 1ª e 2ª di questa Nota, che, a parità delle altre condizioni, in atmosfera di CO_2 (fine del tracciato *A*) la rigidità muscolare interviene quando ancora il muscolo, tenuto in atmosfera di solo O_2, conserva la sua lunghezza normale (fine del tracciato *B*).

Anche i tracciati della fig. 4 dimostrano che il muscolo può rimanere per molto tempo in un'atmosfera di solo azoto senza subire notevole

alterazione nella sua eccitabilità, se non è stimolato (fig. 4, *B*); se invece

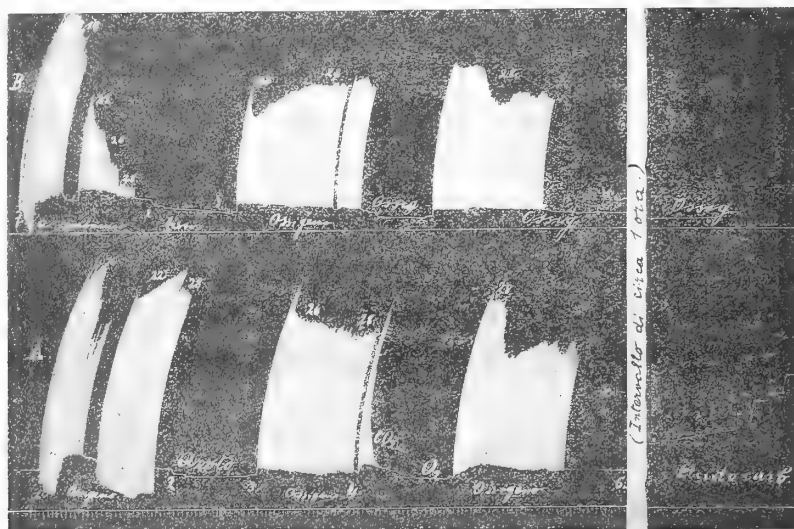



Fig. 3 (1/2). — *A* e *B*, due preparati della metà destra del diaframma di un canino cucciolo, immersi in liquido di Ringer durante i periodi di riposo, non immersi durante le stimolazioni.

Temper.: 30°-32° C. Peso gr. 4. Tempo: 1′. Stim.: 2 accum. Edison; DR = 150 mm. Frequenza: i nn. 16, 22, 26 e 28 indicano gli stimoli al 1′ (17 giugno 1915).

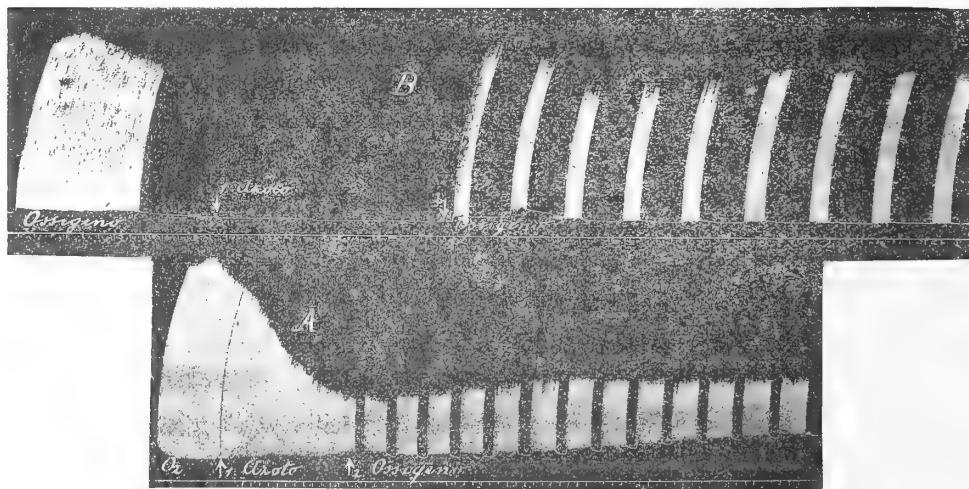



Fig. 4 (1/2) — *A* e *B*, due preparati diaframmatici dello stesso cane, immersi nel liquido di Ringer per 4/5 della loro lunghezza.

Temper.: 34° C. Peso gr. 10. Tempo: 1′. Stim.: 2 accum. Edison; DR = 150 mm. Frequenza: 32 stim al 1′. (Il tracciato *A* fu registrato sopra un cilindro che ruotava più lentamente dell'altro su cui fu registrato il tracciato *B*. Per ciò sembra che gl'intervalli di riposo siano stati più lunghi in *B* che non in *A*. La linea del tempo toglie ogni dubbio a questo riguardo).

è stimolato ritmicamente in assenza di ossigeno, esso si affatica presto, assai più presto che non in presenza di ossigeno (fig. 4, *A*).

Nel primo caso, quando in 2 (fig. 4. *B*) all'azoto fu sostituito l'ossigeno e si stimolò il muscolo a periodi separati da intervalli di riposo, esso si comportò press'a poco come un preparato che fosse stato sempre in atmosfera

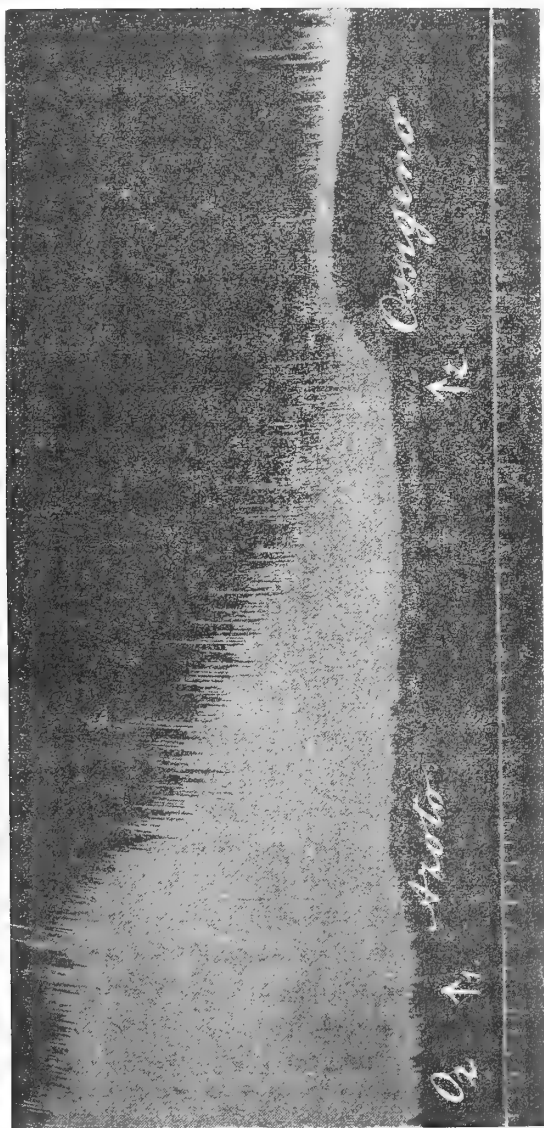



Fig. 5. — Preparato diaframmatico di cane, immerso per 4/5 in liquido di Ringer. Temper.: 34° C. Peso gr. 10. Tempo: 1'. Stim.: 2 accum. Edison; DR = 150 mm. Frequenza: 35 stim. al 1' (21 novembre 1914).

di ossigeno. Nel secondo caso, invece, la restaurazione che produsse questo gas fu lieve e di breve durata (fig. 4, *A*).

Di regola, se l'asfissia (assenza di ossigeno) e la presenza di acido carbonico provocano accorciamento tonico, l'ossigeno dovrebbe produrre sempre

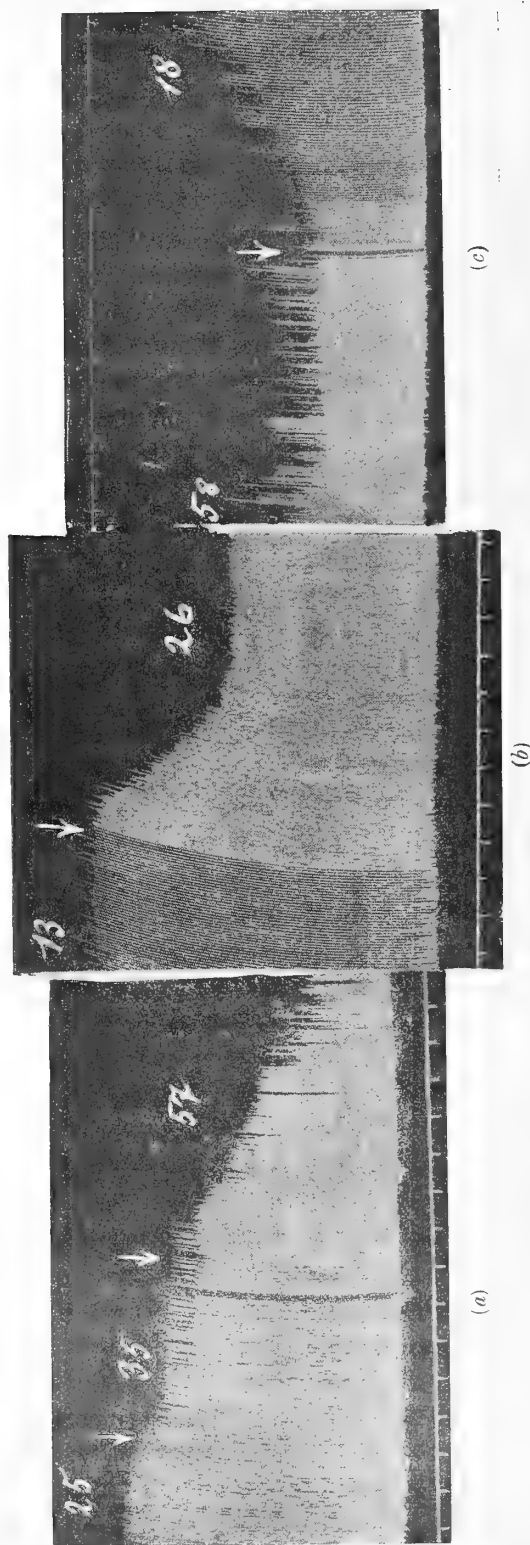



Fig. 6. — Preparato del diaframma sinistro di un cane, immerso in liquido di Ringer per $^4/_5$ della sua lunghezza.

Temper.: 29°-30° C. Peso gr. 10. Tempo: 1'. Stim.: 2 accum. Edison; DR = 130 mm. Frequenza: i numeri sui tracciati indicano la frequenza delle stimolazioni ritmiche. Le freccie indicano il momento in cui s'inizia la variazione di frequenza (10 luglio 1914). (*a*, *b*, *c*: tre pezzi dello stesso lunghissimo tracciato, corrispondenti a periodi diversi della sopravvivenza del muscolo).

l'effetto opposto, cioè allungamento del muscolo (purchè questo non sia già entrato in rigidità).

Eppure, in alcuni casi mi è occorso di osservare che l'ossigeno, sostituito all'azoto o all'anidride carbonica, provoca nel muscolo, non accorciato tonicamente, una cospicua contrattura di durata più o meno grande. Come esempio, serva il tracciato della fig. 5, la quale dimostra, inoltre, ancora una volta il progressivo diminuire dell'altezza delle contrazioni dovuto alla sottrazione dell'ossigeno (da 1 a 2). A che cosa sia dovuto il fenomeno descritto, della contrattura, non saprei dire, per ora.

Incidentalmente sia detto che assai degna di nota è l'influenza che sull'altezza delle contrazioni provocate da stimoli ritmici esercita la frequenza di questi, a parità di tutte le altre condizioni. Dalle figg. 3 e 6 risulta che, aumentando la frequenza, diminuisce l'altezza delle contrazioni ritmiche, e reciprocamente.

È necessario, quindi, che nelle esperienze di questo genere la frequenza delle stimolazioni rimanga assolutamente costante.

Cristallografia. — *Su notevoli cristalli di calcite di Andreasberg nell'Harz.* Nota del Socio C. Viola [1].

Un discreto numero di calciti di varie località si trova raccolto nel Museo mineralogico di Parma, non ancora descritte.

Uno studioso, occupandosene seriamente, potrebbe ottenerne dei risultati preziosi. Diversi campioni provengono dalle celebri miniere argentifere di Andreasberg nell'Harz.

Molte descrizioni, illustrazioni e studî esistono sui singoli minerali e sulla epigenesi di questo celebre giacimento minerario. Della calcite poi non se ne parla; innumerevoli sono i cristallografi e i mineralisti, che se ne occuparono a dovizia. Ricorderò Haüy (1801-1823), Bournon (1808), Mohs-Haidinger (1825), Lévy (1837), Beck (1842), Zippe (1852), Wimmer (1854), Dufrenoy (1856), Q. Sella (1856), Peters (1861), Hessenberg (1861-1872), Rath (1867), Sansoni (1883-1885), Lüdecke (1896), Heddler (1901), Schaller (1908).

Io ho creduto di richiamare l'attenzione su uno dei più notevoli campioni di calcite di Andreasberg, secondo me, che nella nostra collezione porta il n. 112. È probabile che esso sia passato inosservato ai citati naturalisti, almeno per quanto a me consta. Nelle tavole del Goldschmidt [2] esso non si trova enumerato.

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 giugno 1916.

[2] V. Goldschmidt, *Atlas der Krystallformen*. Heidelberg, 1913, II vol.

I cristalli assomigliano a quelli conosciuti comunemente col nome di testa di chiodo, e così infatti essi sono riportati nel catalogo. La testa di chiodo è la combinazione del prisma esagonale di 1ª specie $\{11\bar{2}\} = \{01\bar{1}0\}$ e del romboedro ottuso inverso $\{110\} = \{01\bar{1}2\}$.

Questa combinazione è comunissima non solo nella località di Andreasberg ma in molte, in particolare nei giacimenti argentiferi a matrice di calcite, come quella del Sarrabus in Sardegna. La illustrarono Haüy (1801: tav. 24, fig. 18; tav. 25, fig. 28. — 1822: tav. 7, fig. 30 dodecaèdre. — 1823: tav. 10, fig. 66), Shepard (Miner. 1857, 82, fig. 170); e nuovamente Bournon (1808, tav. 3, figg. 32 e 33), A. Lévy (1837, tav. 1, fig. 3) e altri.

Ma i cristalli in esame non sono teste di chiodo ordinarie, perchè, in luogo del romboedro $\{110\}$, vi sono varie scalenoedri ottusi delle zone $\{[100]\}$, che alla testa dànno tre curvature simmetriche.

Appare quindi giustificato il far conoscere questi notevoli cristalli di calcite.

Non so poi se l'interesse in questi cristalli sarebbe destato sol perchè alcune facce sono arrotondate; facce curve sono frequentissime nella calcite, e specialmente le facce del romboedro ottuso inverso $\{110\}$. Io stesso ne descrissi un bellissimo esemplare di Monteponi [1].

I cristalli di calcite di Andreasberg, che qui vengono illustrati, sono importanti anche perchè inclusioni oscure o quasi nere sono concentrate nelle sezioni di 2ª specie o piani di simmetria $\{1\bar{1}0\} = \{11\bar{2}0\}$ del cristallo. Verremo subito a parlarne; intanto incominciamo con le facce che chiudono da una parte l'estremità del prisma esagonale.

Abbiamo detto che le facce $\{110\}$ del romboedro ottuso inverso sono incurvate. Propriamente si tratta di facce vicinali a $\{110\}$ e che si ripetono, generando rigature e solcature. Con la sottigliezza delle facce e la conseguente rigatura si verifica facilmente il fenomeno della diffrazione e interferenza della luce, onde sorgono difficoltà nell'individuare la posizione dei singoli riflessi corrispondenti alle facce.

Come si è detto, la rigatura e la curvatura sono nelle zone fondamentali $\{[100]\}$; sarebbe stato agevole di studiarle con un goniometro ordinario a un asse. Ma io ho preferito servirmi del goniometro a due assi, per avere sott'occhio l'intero fenomeno e la completa simmetria del cristallo. A tal uopo il cristallo fu collocato e orientato sul goniometro con l'asse ternario parallelamente a un asse di rotazione, traendo partito dai riflessi ben distinti delle facce del prisma esagonale, e dai riflessi-linee appartenenti alle zone $\{[100]\}$ ove la rigatura si sviluppa.

[1] C. Viola, *Beziehung zwischen Cohäsion, Capillarität und Wachsthum der Kristalle*. Zeitschr. f. Krystallographie, XXXVI, pp. 558 a 576, tav. XVI e VII.

I riflessi-linee nelle zone }[100]{ sono limitate esclusivamente nei segmenti fra le facce fondamentali }100{. Ove essi si intersecano, riescono individuate appunto queste facce, chè altrimenti non sarebbero visibili. I maggiori concentramenti di luce nei detti riflessi-linee, ove senza dubbio si deve ammettere la presenza di facce sottili, sono indicati nella seguente serie, in particolare nella zona [001]:

(100)	(310)	(320)	(760)	(110)	(670)	(230)	(130)	(010)
r	t	z	y	e	y_1	z_1	t_1	r_1

e sono determinati dai seguenti angoli:

Coordinate angolari.

Posizioni	φ		ω	
	limiti	medie	limiti	medie
e (110)	26°.12′ — 26°.18′	26°.15′	0	0
y (760)	26.21 — 26.27	26.24 ½	6°.30′ — 7°.42′	7°.18′
z (320)	27.28 — 27.34	27.32	20.25 — 18.38	20. —
t (310)	32.28 — 32.37	32.32	40.48 — 41.30	41. —
r (100)	44.30 — 44.50	44.36 ½	—	60. —

I riflessi delle facce }100{ sono molto sbiaditi, e passerebbero con le facce inosservati, se non ci fossero i riflessi-linee delle rispettive zone }[100]{.

Nemmeno le facce }110{ sono molto distinte; ma però i loro riflessi si colgono bene con l'ajuto dei riflessi y e y_1, simmetricamente disposti. Questi ultimi spiccano distinti, ed emergono sopra a tutti. Anche i riflessi delle facce }230{ sono netti; all'opposto, sono evanescenti quelle delle facce }130{.

A causa dei riflessi-linee nelle zone fondamentali }[100]{, l'angolo (110) : (111) = 26°.15′ potè essere determinato con grande precisione; l'errore, come si vede, è di ± 3′. Dalla costante di Malus e Wollaston [1], (010) : (100) = 74°.55′, esso risulta essere di 26°.15′.14″.

Gli angoli $\delta = (hk0) : (110)$ sono stati calcolati con la formola $\text{tag}\, \delta = \text{sen}\, (26°.15') \,\text{tag}\, \omega$; essi figurano nella seguente tabella fra gli angoli osservati.

Gli angoli calcolati, che si rilevano dalla stessa tabella, hanno per base l'angolo (100) : (010) = 74°.55′ e gli indici di contro segnati.

(1) I. D. Dana, *The system* ecc., 1904, pag. 262.

Posizioni	Angoli misurati		Angoli calcolati	
	$\varphi = (hko):(111)$	$\delta = (hko):(110)$	$(hko):(111)$	$(hko):(110)$
e (110)	26°.15′	0	26°.15′.14″	0
y (760)	26.24 ½	3°.14′.30″	26.27.17	3°.22′.22″
z (320)	27.32	9.08 40	27.33.50	8.42.43
t (310)	32.32	21.09.20	33.07.26	20.57.40
r (100)	44.36 ½	37.27.20	44.36.34	37.27.30

A scopo di confronto ho calcolato i seguenti angoli:

$$
\begin{aligned}
(870) \quad &: (110) = 2°.55'.26'' \\
(15.13.0) &: (110) = 3 \quad 7 \quad 57 \\
(22.19.0) &: (110) = 3 \quad 12 \quad 31 \\
(29.25.0) &: (110) = 3 \quad 14 \quad 48 \\
(760) \quad &: (110) = 3 \quad 22 \quad 22
\end{aligned}
$$

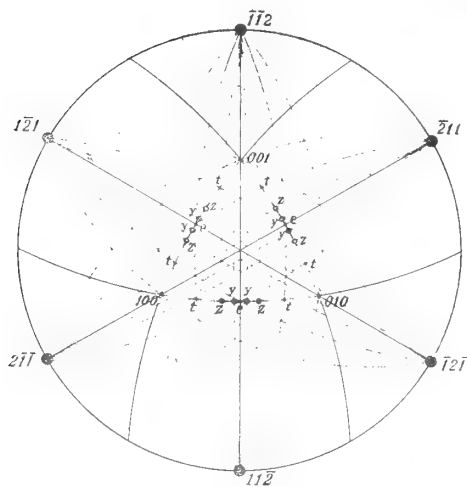



Fig. 1.

La posizione di *y* è bene rappresentata dal simbolo (760), essendoci una differenza, tra l'angolo calcolato e l'angolo misurato, di + 7′.52″. La differenza sarebbe di — 9′.04″ se si assumesse (870) in luogo di (760). Per avere maggiore approssimazione bisognerebbe ricorrere a indici maggiori: p. es. (22.19.0), ovvero (29.25.0); ma, per ora, nulla ci autorizza a fare questa

ipotesi, poichè i limiti di misura nell'angolo ω va da 6°.30′ a 7°.42′ e quindi, nell'angolo y : (110), da 2°.53′.05″ a 3°.25′.02″.

Con osservazioni in altre condizioni si potrà dare alla faccia (760) un grado maggiore di probabilità.

Nella annessa fig. 1 sono rappresentati i centri dei riflessi in projezione stereografica.

Dapprima emergono i poli delle facce del prisma esagonale {11$\bar{2}$}, indi quelli delle facce y, z degli scalenoedri, in ultimo quelli dei romboedri {100} diretto e {110} inverso. I poli degli scalenoedri t {760} sono appena accennati nella figura.

Si è di sopra detto che a causa, della ripetizione delle facce z (230) e t (130), apparisce una copiosa rigatura atta a dare il fenomeno della diffrazione e a generare per conseguenza in ogni zona principale {[100]} i riflessi-

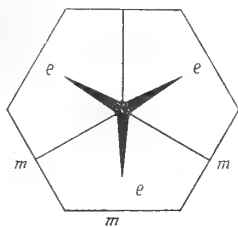



Fig. 2.

linee quasi continui. Di più è da aggiungersi che, oltre le rigature, appariscono anche solcature, le più larghe e profonde essendo nel mezzo che dall'apice del cristallo vanno in direzione delle zone {[1$\bar{1}$0]}. Queste tre solcature mediane a guisa di stella sono riempiute di una materia oscura con riflesso tendente al verde ed opaca.

L'estremità del cristallo è rappresentata nella fig. 2, con la stella a tre raggi, con il prisma esagonale m {11$\bar{2}$} e con le facce e {110}, tralasciando le rigature dovute agli scalenoedri.

Sarebbe stato difficile ricavare dalle solcature tanto materiale da intraprendere qualche assaggio, senza guastare parecchi cristalli. Ma si è osservato che la stessa materia oscura, e degli stessi apparenti caratteri, trovasi come inclusione nei cristalli e nelle facce alternate del prisma e corrispondenti alle facce {110}. Nella fig. 3 è riprodotto l'intero cristallo in effige ideale, col prisma, con le rigature nella estremità superiore, con i solchi e con le inclusioni, così laterali, e così a guisa di stelle lungo l'asse ternario e nelle zone {[1$\bar{1}$0]}.

La materia oscura che riempie i solchi potè essere raccolta e sottoposta a piccole prove. Nel tubo aperto dà SO_2; ossidata, è polvere rossa; naturale, è magnetica. Si tratta dunque di pirite, in parte trasformata in magnetite.

Questo bel fenomeno di inclusioni e sovrapposizioni di minerale su calcite secondo tre piani di simmetria vien riferito da W. I. Lewis [1] di calciti della località Matyasberg presso Budapest e appartenente alla Collezione di Cambridge.

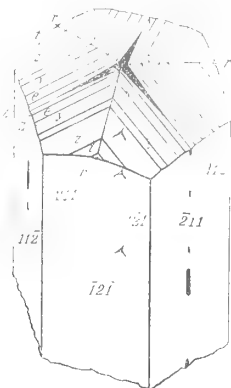



Fig. 3.

La fig. 372 (pag 407) del suo trattato sembra una riproduzione identica a quella di Andreasberg, con la sola differenza che il Lewis non parla di rigature sulle facce }110{. I tre solchi sono riempiti, dice il Lewis, di terra oscura, e si trovano nelle diagonali delle facce }110{.

Fisica matematica. — *Sopra un teorema di reciprocità relativo alla propagazione di correnti elettriche in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico.* Nota I della dottoressa Elena Freda [2], presentata dal Socio V. Volterra.

1. I risultati sperimentali, che sono stati ottenuti studiando le proprietà di un conduttore posto in un campo magnetico, hanno indotto ad affacciare l'ipotesi che il campo alteri temporaneamente le proprietà specifiche della sostanza sottoposta alla sua azione. Secondo tale ipotesi, la sostanza, anche se omogenea ed isotropa fuori del campo, per azione di quest'ultimo acquisterebbe proprietà elettriche diverse da punto a punto se il campo non è uniforme, e diverse nelle diverse direzioni uscenti da un punto, a seconda dell'angolo che le direzioni stesse formano con quella del campo. Se non si vuole escludere tale ipotesi, per studiare analiticamente la propagazione delle correnti elettriche in un mezzo a tre dimensioni sottoposto all'azione

(1) W. I. Lewis, *A treatise on crystallography.* Cambridge, 1899.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1916.

di un campo magnetico, occorre dunque considerare mezzi non omogenei e anisotropi.

Riferendomi alla teoria elettronica del Drude, mi propongo appunto, in questo paragrafo, di stabilire le equazioni che individuano il movimento della elettricità in un conduttore di forma qualsiasi, non omogeneo, anisotropo, tenuto a temperatura costante e sottoposto all'azione di un campo magnetico non uniforme ([1]).

Siano $x\,y\,z$ tre assi che formino un triedro ortogonale destrorso. Siano $\frac{d\xi_1}{dt}\,\frac{d\eta_1}{dt}\,\frac{d\zeta_1}{dt}$, $\frac{d\xi_2}{dt}\,\frac{d\eta_2}{dt}\,\frac{d\zeta_2}{dt}$ le componenti delle velocità di uno ione positivo e di uno ione negativo, le cui cariche abbiano entrambi il valore assoluto e. Siano N_1, N_2 i numeri di ioni positivi e di ioni negativi per centimetro cubo della sostanza conduttrice. Le componenti $\dot\gamma_x\,\dot\gamma_y\,\dot\gamma_z$ della densità di corrente sono legate alle componenti delle velocità degli ioni dalle relazioni

$$(1)\quad \begin{cases} \dot\gamma_x = e\left(N_1 \frac{d\xi_1}{dt} - N_2 \frac{d\xi_2}{dt}\right) \; ; \; \dot\gamma_y = e\left(N_1 \frac{d\eta_1}{dt} - N_2 \frac{d\eta_2}{dt}\right) ; \\ \dot\gamma_z = e\left(N_1 \frac{d\zeta_1}{dt} - N_2 \frac{d\zeta_2}{dt}\right) . \end{cases}$$

Siano $eE_{1x}\; eE_{1y}\; eE_{1z}$, $-eE_{2x}\; -eE_{2y}\; -eE_{2z}$ le componenti delle f. e. m. totali che sollecitano rispettivamente uno ione positivo e uno ione negativo; $H_x\; H_y\; H_z$ le componenti del campo magnetico; $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ le componenti della forza elettrica la quale ammetta il potenziale V.

Per la legge di Ohm relativa ai mezzi anisotropi, le componenti delle velocità degli ioni sono legate da relazioni lineari alle componenti delle f. e. m. totali che li sollecitano. Si ha cioè

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = e(a_{11}\,E_{1x} + a_{12}\,E_{1y} + a_{13}\,E_{1z}) \\ \frac{d\eta_1}{dt} = e(a_{21}\,E_{1x} + a_{22}\,E_{1y} + a_{23}\,E_{1z}) \\ \frac{d\zeta_1}{dt} = e(a_{31}\,E_{1x} + a_{32}\,E_{1y} + a_{33}\,E_{1z}) , \end{cases}$$

([1]) Per la risoluzione della stessa questione, nel caso di una lamina piana, omogenea ed isotropa disposta perpendicolarmente alle linee di forza di un campo magnetico uniforme, cfr. Corbino, Rend. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 213.

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_2}{dt} = -e(b_{11}\,E_{2x} + b_{12}\,E_{2y} + b_{13}\,E_{2z}) \\ \dfrac{d\eta_2}{dt} = -e(b_{21}\,E_{2x} + b_{22}\,E_{2y} + b_{23}\,E_{2z}) \\ \dfrac{d\zeta_2}{dt} = -e(b_{31}\,E_{2x} + b_{32}\,E_{2y} + b_{33}\,E_{2z})\,. \end{cases}$$

I risultati sperimentali, che inducono ad ammettere un'alterazione delle proprietà specifiche di un conduttore per azione di un campo magnetico, inducono anche ad ammettere che tale alterazione non dipenda dal senso del campo. Riterrò perciò che i coefficienti N_1, N_2, a_{mn}, b_{mn} (i quali individuano le proprietà specifiche della sostanza), oltre che da $x\ y\ z$, possano eventualmente dipendere anche da $H_x\ H_y\ H_z$, ma non mutino quando si cambi segno a tutte e tre le componenti del campo.

Siccome il conduttore è mantenuto a temperatura costante, la f. e. m. totale che sollecita uno ione è la risultante della forza elettrica dipendente dalla distribuzione dei potenziali e della f. e. m. dovuta al movimento dello ione nel campo. Si ha perciò

$$(4)\quad \begin{cases} E_{1x} = X + H_y \dfrac{d\zeta_1}{dt} - H_z \dfrac{d\eta_1}{dt} \\ E_{1y} = Y + H_z \dfrac{d\xi_1}{dt} - H_x \dfrac{d\zeta_1}{dt} \\ E_{1z} = Z + H_x \dfrac{d\eta_1}{dt} - H_y \dfrac{d\xi_1}{dt} \end{cases} \qquad (5)\quad \begin{cases} E_{2x} = X + H_y \dfrac{d\zeta_2}{dt} - H_z \dfrac{d\eta_2}{dt} \\ E_{2y} = Y + H_z \dfrac{d\xi_2}{dt} - H_x \dfrac{d\zeta_2}{dt} \\ E_{2z} = Z + H_x \dfrac{d\eta_2}{dt} - H_y \dfrac{d\xi_2}{dt}\,. \end{cases}$$

Per mezzo delle (2), (3), (4), (5), si possono avere

$$\frac{d\xi_1}{dt}\ \frac{d\eta_1}{dt}\ \frac{d\zeta_1}{dt}\,,\quad \frac{d\xi_2}{dt}\ \frac{d\eta_2}{dt}\ \frac{d\zeta_2}{dt}$$

espresse linearmente in funzione di X Y Z. Si ottengono cioè delle uguaglianze del tipo

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = e(\alpha_{11}\,X + \alpha_{12}\,Y + \alpha_{13}\,Z) \\ \dfrac{d\eta_1}{dt} = e(\alpha_{21}\,X + \alpha_{22}\,Y + \alpha_{23}\,Z) \\ \dfrac{d\zeta_1}{dt} = e(\alpha_{31}\,X + \alpha_{32}\,Y + \alpha_{33}\,Z)\,, \end{cases}$$

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\xi_2}{dt} &= -\,e\,(\beta_{11}\,\mathrm{X} + \beta_{12}\,\mathrm{Y} + \beta_{13}\,\mathrm{Z}) \\
\frac{d\eta_2}{dt} &= -\,e\,(\beta_{21}\,\mathrm{X} + \beta_{22}\,\mathrm{Y} + \beta_{23}\,\mathrm{Z}) \\
\frac{d\zeta_2}{dt} &= -\,e\,(\beta_{31}\,\mathrm{X} + \beta_{32}\,\mathrm{Y} + \beta_{33}\,\mathrm{Z})\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Posto

$$
\alpha_{mm} = \frac{\mathrm{A}_{mm}}{\mathrm{A}} \quad , \quad \alpha_{mn} = \frac{\mathrm{A}_{mn}}{\mathrm{A}} \quad , \quad a_{mn} - a_{nm} = \delta_{mn} \qquad (m\,,\,n = 1\,,\,2\,,\,3)\,,
$$

$$
a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}\,a_{13} - a_{33}\,a_{12}\,a_{21} = \varrho\,,
$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} = 1 &+ e\,\delta_{32}\,\mathrm{H}_x + e\,\delta_{13}\,\mathrm{H}_y + e\,\delta_{21}\,\mathrm{H}_z + e^2(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32})\,\mathrm{H}_x^2 + \\
&+ e^2(a_{33}\,a_{11} - a_{31}\,a_{13})\,\mathrm{H}_y^2 + e^2(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,\mathrm{H}_z^2 + \\
&+ e^2\,[a_{21}\,a_{13} + a_{12}\,a_{31} - a_{11}(a_{23} + a_{32})]\,\mathrm{H}_y\,\mathrm{H}_z + \\
&+ e^2\,[a_{32}\,a_{21} + a_{23}\,a_{12} - a_{22}(a_{31} + a_{13})]\,\mathrm{H}_z\,\mathrm{H}_x + \\
&+ e^2\,[a_{13}\,a_{32} + a_{31}\,a_{23} - a_{33}(a_{12} + a_{21})]\,\mathrm{H}_x\,\mathrm{H}_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{11} &= a_{11} + e[(a_{21}\,a_{13} - a_{12}\,a_{31}) - a_{11}\,\delta_{23}]\,\mathrm{H}_x + e^2\varrho\,\mathrm{H}_x^2\,; \\
\mathrm{A}_{22} &= a_{22} + e[(a_{32}\,a_{21} - a_{23}\,a_{12}) - a_{22}\,\delta_{31}]\,\mathrm{H}_y + e^2\varrho\,\mathrm{H}_y^2\,; \\
\mathrm{A}_{33} &= a_{33} + e[(a_{13}\,a_{32} - a_{31}\,a_{23}) - a_{33}\,\delta_{12}]\,\mathrm{H}_z + e^2\varrho\mathrm{H}_z^2\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{23} = a_{23} &+ e\,(a_{23}\,a_{32} - a_{22}\,a_{33})\,\mathrm{H}_x + e\,[(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{13}) + a_{23}\,\delta_{13}]\,\mathrm{H}_y + \\
&+ e\,(a_{22}\,a_{13} - a_{23}\,a_{12})\,\mathrm{H}_z + e^2\varrho\,\mathrm{H}_y\,\mathrm{H}_z\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{32} = a_{32} &- e\,(a_{23}\,a_{32} - a_{22}\,a_{33})\,\mathrm{H}_x - e\,(a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{13})\,\mathrm{H}_y - \\
&- e\,[(a_{22}\,a_{31} - a_{32}\,a_{12}) + a_{32}\,\delta_{12}]\,\mathrm{H}_z + e^2\varrho\,\mathrm{H}_y\,\mathrm{H}_z\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{31} = a_{31} &+ e\,(a_{33}a_{21} - a_{31}a_{23})\,\mathrm{H}_x + e\,(a_{31}\,a_{13} - a_{33}\,a_{11})\,\mathrm{H}_y + \\
&+ e\,[(a_{32}\,a_{11} - a_{31}\,a_{21}) + a_{31}\,\delta_{21}]\,\mathrm{H}_z + e^2\varrho\,\mathrm{H}_z\,\mathrm{H}_x\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{13} = a_{13} &- e\,[(a_{33}\,a_{12} - a_{13}\,a_{23}) + a_{13}\,\delta_{23}]\,\mathrm{H}_x - e\,(a_{31}\,a_{13} - a_{33}\,a_{11})\,\mathrm{H}_y - \\
&- e\,(a_{23}\,a_{11} - a_{13}\,a_{21})\,\mathrm{H}_z + e^2\varrho\,\mathrm{H}_z\,\mathrm{H}_x\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{12} = a_{12} &+ e\,[(a_{13}\,a_{22} - a_{12}\,a_{32}) + a_{12}\,\delta_{32}]\,\mathrm{H}_x + e\,(a_{11}\,a_{32} - a_{12}\,a_{31})\,\mathrm{H}_y + \\
&+ e\,(a_{12}\,a_{21} - a_{11}\,a_{22})\,\mathrm{H}_z + e^2\varrho\,\mathrm{H}_x\,\mathrm{H}_y\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{21} = a_{21} &- e\,(a_{31}\,a_{22} - a_{21}\,a_{32})\,\mathrm{H}_x - e\,[(a_{11}\,a_{23} - a_{21}\,a_{31}) + a_{21}\,\delta_{31}]\,\mathrm{H}_y - \\
&- e\,(a_{12}\,a_{21} - a_{11}\,a_{22})\,\mathrm{H}_z + e^2\varrho\,\mathrm{H}_x\,\mathrm{H}_y\,.
\end{aligned}
$$

I coefficienti β_{rs} si ottengono dai coefficienti α_{rs} cambiando e in $-e$ ed a_{mn} in b_{mn}.

Per mezzo delle (1), (6), (7), si possono esprimere $\dot\gamma_x\ \dot\gamma_y\ \dot\gamma_z$ in funzione di X Y Z, ossia in funzione delle derivate del potenziale V. Si ottiene

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \dot\gamma_x &= -e^2\Big[(N_1\alpha_{11}+N_2\beta_{11})\frac{\partial V}{\partial x}+(N_1\alpha_{12}+N_2\beta_{12})\frac{\partial V}{\partial y}+\\ &\qquad+(N_1\alpha_{13}+N_2\beta_{13})\frac{\partial V}{\partial z}\Big]\\ \dot\gamma_y &= -e^2\Big[(N_1\alpha_{21}+N_2\beta_{21})\frac{\partial V}{\partial x}+(N_1\alpha_{22}+N_2\beta_{22})\frac{\partial V}{\partial y}+\\ &\qquad+(N_1\alpha_{23}+N_2\beta_{23})\frac{\partial V}{\partial z}\Big]\\ \dot\gamma_z &= -e^2\Big[(N_1\alpha_{31}+N_2\beta_{31})\frac{\partial V}{\partial x}+(N_1\alpha_{32}+N_2\beta_{32})\frac{\partial V}{\partial y}+\\ &\qquad+(N_1\alpha_{33}+N_2\beta_{33})\frac{\partial V}{\partial z}\Big]. \end{aligned}\right.$$

La condizione

$$(9)\qquad \frac{\partial\dot\gamma_x}{\partial x}+\frac{\partial\dot\gamma_y}{\partial y}+\frac{\partial\dot\gamma_z}{\partial z}=0$$

fornisce l'equazione differenziale cui deve soddisfare V.

Detta n la normale alla superficie libera del conduttore in un suo punto qualunque, dalla condizione

$$\dot\gamma_n = 0$$

si deduce una condizione al contorno per V. Se lungo la superficie del conduttore ci sono due elettrodi di resistenza trascurabile tenuti a potenziali costanti V_1, V_2, per V si hanno anche le condizioni $V = V_1$ lungo una parte del contorno, $V = V_2$ lungo un'altra parte del contorno.

2. Tra le questioni che si possono esaminare a partire dalle equazioni stabilite, mi limito qui a considerare l'estensione che può farsi del seguente teorema di reciprocità dimostrato dal prof. Volterra [1]:

Una lamina metallica isotropa, piana o curva, omogenea o non omogenea, disposta secondo una superficie di livello di un campo magnetico, uniforme o non uniforme, sia munita di quattro elettrodi A B C D, *o puntiformi, o interni di area finita e resistenza trascurabile, o al contorno e pure di resistenza trascurabile. La differenza di potenziale che si stabilisce tra* C *e* D, *sotto l'azione di un determinato campo, quando una corrente d'intensità* I *entra per* A *ed esce per* B, *è uguale alla differenza di potenziale che si stabilisce tra* A *e* B *quando, col campo invertito, una corrente, pure d'intensità* I, *entra per* C *ed esce per* D.

[1] Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pp. 220, 289, 378, 533.

Consideriamo un conduttore a tre dimensioni non omogeneo, anisotropo, fornito di quattro elettrodi A B C D e disposto comunque in un campo magnetico qualsiasi.

Siano V e $\dot{\gamma}$ il potenziale e la densità di corrente quando, col campo diretto H_x H_y H_z, la corrente entra ed esce per A e B; V_1 e $\dot{\gamma}_1$ il potenziale e la densità di corrente quando, col campo inverso $-H_x$ $-H_y$ $-H_z$, la corrente entra ed esce per C e D.

Sia S il contorno completo del conduttore o di una parte di esso. Nello spazio Σ, una o più volte connesso, limitato da S, supponiamo che V e V_1 siano regolari. Sia n la normale ad S rivolta verso l'esterno di Σ.

Per la (9), si ha

$$(10) \qquad \int_S V_1 \dot{\gamma}_n \, dS = \int_\Sigma \left(\dot{\gamma}_x \frac{\partial V_1}{\partial x} + \dot{\gamma}_y \frac{\partial V_1}{\partial y} + \dot{\gamma}_z \frac{\partial V_1}{\partial z} \right) d\Sigma ,$$

e, analogamente,

$$(11) \qquad \int_S V \dot{\gamma}_{1n} \, dS = \int_\Sigma \left(\dot{\gamma}_{1x} \frac{\partial V}{\partial x} + \dot{\gamma}_{1y} \frac{\partial V}{\partial y} + \dot{\gamma}_{1z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\Sigma .$$

Indichiamo con α'_{mn} β'_{mn} i valori che assumono i coefficienti α_{mn}, β_{mn}, che compaiono nelle equazioni (6), (7), (8), quando si ponga nelle loro espressioni, in luogo di H_x H_y H_z , $-H_x$ $-H_y$ $-H_z$.

Per ottenere le componenti di $\dot{\gamma}_1$ espresse in funzione delle derivate di V_1, basta sostituire nelle (8), $\dot{\gamma}_1$ a $\dot{\gamma}$, V_1 a V, α'_{mn} e β'_{mn} ad α_{mn} e β_{mn}.

Dalle (10) e (11), esprimendo le componenti di $\dot{\gamma}$ in funzione delle derivate di V e le componenti di $\dot{\gamma}_1$ in funzione delle derivate di V_1, si ottiene

$$(12) \qquad \int_S (V_1 \dot{\gamma}_n - V \dot{\gamma}_{1n}) \, dS =$$

$$= - e^2 \int_\Sigma \Big\{ [N_1(\alpha_{11} - \alpha'_{11}) + N_2(\beta_{11} - \beta'_{11})] \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} +$$
$$+ [N_1(\alpha_{22} - \alpha'_{22}) + N_2(\beta_{22} - \beta'_{22})] \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} +$$
$$+ [N_1(\alpha_{33} - \alpha'_{33}) + N_2(\beta_{33} - \beta'_{33})] \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} +$$
$$+ [N_1(\alpha_{12} - \alpha'_{21}) + N_2(\beta_{12} - \beta'_{21})] \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} +$$
$$+ [N_1(\alpha_{21} - \alpha'_{12}) + N_2(\beta_{21} - \beta'_{12})] \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} +$$
$$+ [N_1(\alpha_{23} - \alpha'_{32}) + N_2(\beta_{23} - \beta'_{32})] \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} +$$
$$+ [N_1(\alpha_{32} - \alpha'_{23}) + N_2(\beta_{32} - \beta'_{23})] \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial y} +$$
$$+ [N_1(\alpha_{31} - \alpha'_{13}) + N_2(\beta_{31} - \beta'_{13})] \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x} +$$
$$+ [N_1(\alpha_{13} - \alpha'_{31}) + N_2(\beta_{13} - \beta'_{31})] \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} \, d\Sigma .$$

Dalla (12) segue che, se in ciascun punto del conduttore sono soddisfatte le condizioni

$$(13) \qquad \begin{cases} N_1 \alpha_{rr} + N_2 \beta_{rr} = N_1 \alpha'_{rr} + N_2 \beta'_{rr} \,, \\ N_1 \alpha_{rs} + N_2 \beta_{rs} = N_1 \alpha'_{sr} + N_2 \beta'_{sr} \,, \end{cases} \qquad (r\,, s = 1\,, 2\,, 3)$$

si ha

$$(14) \qquad \int_S (V_1 \dot{\gamma}_n - \dot{\gamma}_{1n})\, dS = 0 \,.$$

Perchè le (13) siano soddisfatte, qualunque siano in ciascun punto i valori di H_x H_y H_z, basta che in ogni punto del conduttore, per qualunque valore del campo, si abbia

$$(15) \qquad a_{rs} = a_{sr} \quad , \quad b_{rs} = b_{sr} \,.$$

Infatti in tale ipotesi, come si vede immediatamente, si ha $\alpha_{rr} = \alpha'_{rr}$, $\beta_{rr} = \beta'_{rr}$, $\alpha_{rs} = \alpha'_{sr}$, $\beta_{rs} = \beta'_{sr}$. [Se il campo non altera le proprietà specifiche della sostanza conduttrice, le (15) sono anche condizioni necessarie perchè, qualunque siano i valori di H_x H_y H_z, si verifichino le (13); se non si fa alcuna ipotesi sull'eventuale alterazione di proprietà specifiche dovuta al campo, non si può dire se le (15) siano o no condizioni necessarie].

Per $H_x = H_y = H_z = 0$, la condizione necessaria e sufficiente perchè siano soddisfatte le (13) è che in ogni punto del conduttore si abbia

$$(15)' \qquad N_1 a_{rs} + N_2 b_{rs} = N_1 a_{sr} + N_2 b_{sr} \text{ [1]} \,.$$

Nel seguente paragrafo prenderò in esame le condizioni (15); per ora mi limito ad osservare che esse portano come conseguenza l'uguaglianza (14). È appunto da un'eguaglianza perfettamente analoga alla (14) che il prof. Volterra ha dedotto per una lamina il teorema di reciprocità sopra ricordato; per estendere questo teorema al caso di un conduttore a tre dimensioni, pel quale siano soddisfatte le condizioni (15), basta scegliere convenientemente nella (14) il contorno completo S.

Nel caso in cui i quattro elettrodi A B C D sono puntiformi, basta prendere come contorno completo S la superficie del conduttore e quattro sferette (o porzioni di sfere se si tratta di elettrodi situati sulla superficie del conduttore) aventi i centri nei punti occupati dagli elettrodi. Tenendo presente che lungo la superficie libera del conduttore si ha $\dot{\gamma}_n = \dot{\gamma}_{1n} = 0$, si vede facilmente come, facendo tendere a zero i raggi delle sferette, se l'intensità

[1] Ognuna delle condizioni (15)', relative al campo magnetico nullo, si spezza in due condizioni (15) se il campo non è nullo. Ciò è in relazione al fatto che, solo sotto l'azione del campo, si separano le traiettorie degli ioni delle due specie.

della corrente totale che attraversa il conduttore è uguale col campo diretto e col campo inverso, l'uguaglianza (14) dà luogo all'altra

$$V_C - V_D = V_{1A} - V_{1B} \tag{16}$$

che esprime il teorema di reciprocità $\Big($Detta d la distanza di un punto generico da un punto occupato da un elettrodo, si ammette che in quest'ultimo punto le funzioni V, V_1 siano finite o presentino un infinito di ordine inferiore a quello di $\frac{1}{d^2}\Big)$ [1].

Nel caso di quattro elettrodi a tre dimensioni, di resistenza trascurabile, innestati nella massa del conduttore, per passare dalla (14) alla (16), basta prendere come contorno completo S la superficie libera del conduttore e le superficie che esso ha in comune con gli elettrodi; nel caso di quattro elettrodi laminari al contorno e pure di resistenza trascurabile, basta far coincidere S con la superficie del conduttore.

Geofisica. — *Per la teoria della dispersione sismica* [2]. Nota di Emilio Oddone, presentata dal Socio E. Millosevich.

Varî anni or sono, uno dei più valenti sismologi teoretici, il principe B. Galitzin [3], di cui abbiamo appreso con dolore la recente immatura perdita, scriveva che, riprendendo le investigazioni di Lord Rayleigh [4] ed H. Lamb [5] sulle proprietà delle onde sismiche superficiali, ed introducendo nelle equazioni generali di elasticità un termine di frizione, si poteva giungere a delle velocità di propagazione funzione del loro periodo, e per tal modo arrivare al concetto fisico della dispersione sismica. La questione non era però ancora stata studiata, e tanto meno verificata, per mancanza di dati assolutamente sicuri e per la novità stessa del problema.

[1] Per un conduttore a tre dimensioni, isotropo, fornito di quattro elettrodi puntiformi, il teorema di reciprocità, nel caso del campo magnetico nullo, è stato stabilito dal prof. Volterra fin dal 1882. Nuovo Cimento, ser. III, vol. XI, pag. 188.

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1916.

[3] Princ. B. Galitzin, *The principles of instrumental Seismology. Printing-Office* dell'Imp. Acc. delle scienze di Pietrogrado, 1912.

[4] Lord Rayleigh, *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.* Scient. Papers, II, pag. 441, 1899.

[5] Horace Lamb, Phil. Trans. Roy. Soc. (Ser. A), vol. 203 (1904).

Su questo interessante ed ancora poco esplorato campo, sono recentemente comparse in questi Rendiconti due Note [1], nelle quali rispettivamente è trattato il problema teoretico della dispersione sismica e ne è data l'applicazione.

È nello spirito di essa teoria dimostrare che esiste un fenomeno di dispersione anomala, per cui la velocità di propagazione V diminuisce quando la lunghezza d'onda L cresce. Esso è reso dalla formola

$$V = \sqrt{\frac{3\mu}{\varrho}\left(1 - \frac{\gamma_1^2 L^2}{4\pi^2}\right)} \tag{1}$$

nella quale γ_1 è il coefficiente di smorzamento verticale delle onde longitudinali, μ è la costante di rigidità del Lamé, ϱ è la densità.

Quando V decresce da $\sqrt{\frac{3\mu}{\varrho}}$ a $\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$ ed a zero, $\gamma_1 L$ deve crescere da zero a $\sqrt{\frac{2}{3}}\,2\pi$ ed a 2π. Per γ_1 costante, L crescerà da zero a $\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{2\pi}{\gamma_1}$ ed a $\frac{2\pi}{\gamma_1}$.

Il fenomeno di dispersione anomala, dato dalla (1), si enuncia colla proposizione che *le onde lunghe si propagano più lentamente delle onde brevi.*

La seconda Nota chiede se la lunga successione di oscillazioni e se i caratteri fondamentali d'un tracciato sismografico si spiegano con la suesposta teoria; e come conclusione del lavoro la risposta è affermativa.

L'importanza del responso giustifica che i sismologi ragionino sull'interessante argomento.

Secondo la formola (1) per γ_1 costante, a partire dall'inizio delle onde (S) e sino alla fine del sismogramma, L dovrebbe aumentare con continuità, con incremento totale assai piccolo, eguale a circa $^2/_{10}$ di L.

A questo risultato teorico assai semplice, si contrappongono i seguenti dati di fatto: Ad una stessa stazione, la lunghezza d'onda varia con discontinuità passando per le seguenti alternative: nella sequela delle onde (S) non varia quasi — improvvisamente e per salto l'onda assume, nelle onde (l),

[1] Luigi De Marchi, *Teoria generale delle onde propagate sulla superficie piana di un solido elastico. Applicazione della teoria delle onde superficiali all'analisi dei sismogrammi.* Atti della Reale Acc. dei Lincei, vol. XXV, fasc. 5 e 7, 1916. In queste Note sono sfuggiti alcuni errori di stampa o di trascrizione che è meglio correggere: a pag. 309 riga 14, leggere ϱ invece di l nella formola (1); a pag. 310 riga 20, leggere y invece di g; a pag. 313 riga 9, nelle formole (14) manca uno dei secondi membri; a pag. 505 riga 1, errore di moltiplicazione che si riverbera su L, su γ_1, sul fattore di smorzamento verticale e sull'intensità assoluta; a pag. 508, postilla prima, riga seconda, leggere trasversali anzichè longitudinali.

una lunghezza più che quadrupla, ad es. da 30 a 137 Km. — dalle (*l*) in poi, anzichè aumentare, diminuisce, ad es. da 137 a 65 Km. fino alle onde (L), ecc.

Il paragone della teoria con l'osservazione mostra un unico accordo qualitativo, consistente in ciò che dopo le onde trasversali (S) modestamente rapide, arrivano le onde lentissime (*l*). Quantitativamente non si riscontra alcuna concordanza, e piuttosto si conferma il pensiero, condiviso da tutti i sismologi, che le (S) e le (*l*) si riferiscano ad onde di natura diversa, non paragonabili.

La mancata armonia suggerì all'Autore, di modificare nella formola (1) in variabile quel γ_1 fattore di smorzamento, che caso per caso dovrebbe essere costante.

Se γ_1 diventa variabile, entrano nella (1) i termini in dipendenza della legge che segue γ_1. Non conosciamo tale legge, salvo sapere che γ_1 varia con la diversa costituzione della crosta ed aumenta notevolmente nei terreni più superficiali.

Secondo noi, γ_1 è in relazione col coefficiente elastico, e cresce al decrescere di quest'ultimo. È d'altra parte naturale che un'onda superficiale corta, interessi lo strato superficiale meno spesso a rigidità piccola, dove la propagazione è lenta: mentre un'onda superficiale lunga, interessi lo spessore di varî strati a rigidità media maggiore, dove la propagazione è più veloce [1].

Attraversando mezzi via via meno profondi, V decresce, L diventa piccolo, γ_1 diventa grande, senza peraltro che la relazione tra L e γ_1 sia l'iperbolica,

$$\gamma_1 = \frac{K}{L};$$

giacchè se tale vigesse, la (1) tosto direbbe che V rimane stazionario qualsisia il valore di L e sparisce il fenomeno della dispersione.

Supponendo che $f(L)$ segua una legge esponenziale, la variazione dV/dL si ottiene differenziando la (1), dove al posto di γ_1 si pone un'espressione del tipo e^{-KL} e viene

$$(2) \qquad dV = dL \sqrt{\frac{3\mu}{\varrho}} \left[\left(-\frac{\gamma_1^2 L}{4\pi^2} - \frac{\gamma_1^4 L^3}{32\pi^4} - \cdots \right) - \right.$$
$$\left. - \gamma_1' \left(\frac{\gamma_1 L^2}{4\pi^2} + \frac{\gamma_1^3 L^4}{32\pi^4} + \cdots \right) \right]$$

dove per γ_1' si porrà $-k e^{-KL}$.

[1] Proposizione confermata da ciò che le corte onde nell'area epicentrale hanno velocità piccole di appena poche decine di m/sec.; mentre le onde lunghe, fuori area epicentrale, hanno velocità grandi di circa 3,5 Km/sec. Confermata ancora dalla formola $L = VT$ quando T si mantiene costante.

Quando L cresce di dL, V risente due azioni contrarie: — *diminuisce* per la presenza di L ai numeratori dei termini nella prima parentesi tonda, ed è il fenomeno della dispersione anomala, come si produce per γ_1 costante, ossia per $\gamma_1' = 0$; — *aumenta* perchè i γ_1 diminuiscono al crescere di L, in seguito al cessare di considerare elasticamente omogenea la crosta terrestre [1]. Sotto l'azione delle due influenze contrarie, al crescere di L, potrà V rimanere stazionario, diminuire od aumentare. Quando, al diminuire di V, decresce L, si ha la *dispersione normale*; quando, al diminuire di V, cresce L, si ha la *dispersione anomala*; quando V rimane stazionario, *sparisce il fenomeno della dispersione.* Nel primo caso, gli indici di rifrazione assoluti medî avranno dati valori n i quali, in opposto alle velocità, vanno decrescendo con lo spessore dello strato, ossia col crescere della lunghezza d'onda L. Le velocità V crescono col decrescere di n e quindi al crescere della lunghezza d'onda L; con la conseguenza, tipica della dispersione normale, che le onde lunghe si propagano più celermente delle onde brevi. Nel secondo caso, anche per γ_1 costante, gli è come se i raggi sismici fossero diversamente rifrangibili, con indici di rifrazione assoluti eguali ad $\frac{1}{V_1} = n_1$ ed $\frac{1}{V_2} = n_2$, ecc. e percorressero vie, la cui divergenza fosse determinata dall'indice di rifrazione relativo, eguale a

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1} = N.$$

La velocità decresce al crescere di n e quindi al crescere di L, con la conseguenza, tipica della dispersione anomala, che le onde lunghe si propagano più lentamente delle onde brevi.

I sismogrammi offrono l'opportunità di osservare entrambe le dispersioni: *anomala* e *normale*, Il concetto di *dispersione anomala* sismica venne prospettato fin dall'inizio della sismometria, allorchè si vide che nei sismogrammi giungevano prima le onde rapide ed in seguito le onde lente. Ma occorre accettare con cautela questa affermazione, e non estenderla ad onde di natura diversa, le cui lunghezze d'onda possono non essere parago-

[1] Accettando la variabilità di γ_1 — consentendo ad ammettere una crosta terrestre diversamente costituita — l'espressione sotto il radicale della (1)

$$3\mu\left(1 - \frac{\gamma_1^2 L^2}{4\pi^2}\right)$$

rappresenta per noi un coefficiente di elasticità variabile, in quanto il termine $\frac{3\mu}{4\pi^2}\gamma_1^2 L^2$ è funzione di γ_1 che è funzione di L. L'espressione ridotta a 3μ si riferisce all'elasticità di uno strato profondo; quella binomiale, all'elasticità degli strati superficiali man mano meno elastici.

nabili. Ad es. il brusco salto tra le onde (S) e le lentissime (*l*) è in tale senso sospetto. Nel tratto delle onde lentissime (*l*) e lente (L), dove maggiore è la probabilità che le onde siano della stessa specie, comparisce la *dispersione normale*. Le lunghezze d'onda si succedono con regolare decremento da 137 a 65 ed irregolari variazioni da 65 a 45 km. [1]. In questo tratto, secondo interpreta la formola (2), il fenomeno della dispersione anomala, se pur esiste, viene mascherato dal fenomeno della dispersione normale. La diminuzione di V è prevalentemente influenzata dal γ_1 il cui incremento verso la superficie è sufficiente a far sì che il prodotto γ_1 L aumenta, anche se L diminuisce.

Furono i professori G. Vicentini [2] e G. Agamennone [3] a scoprire che negli stessi primi tremiti (P), nell'estrema prima parte dei sismogrammi, si hanno onde lunghe non meno delle onde (*l*). Hanno periodi da 18 a 20 secondi, ma loro corrispondono velocità così inusualmente alte — eguali alle velocità delle (P) e cioè fino oltre 8 Km./sec. — che le loro lunghezze superano i 150 Km. circa, quindi sono proprio dell'ordine delle lunghezze d'onda delle (*l*). Anzi Horace Lamb [4] mostrò teoricamente che si tratta di un'onda lenta solitaria a periodo grandissimo, e pare che Ugo Arnold [5] sia riuscito col calcolo ad individuarla tra le altre ondulazioni di perturbazione. Arriva quindi prima l'onda a periodo massimo, dotata di minima ampiezza, mentre le onde lente, che seguono, hanno periodi minori ed ampiezze crescenti.

In conclusione, è più attendibile che la dispersione delle onde superficiali, nei sismogrammi, sia la normale, secondo la quale *le onde lunghe superficiali si propagano meno lentamente delle onde brevi.*

La proposizione non è nuova. Fin dal 1895 enunciai per primo la legge che nei sismogrammi la durata di movimento cresce col crescere della distanza dell'epicentro [6], e nel 1904 pubblicai che le onde superficiali obbediscono alla legge della dispersione normale [7].

[1] Ho tolto queste cifre da due sismogrammi a me dinanzi: l'uno ottenuto a Rocca di Papa in occasione di un terremoto nel Turkestan, addì 3-4 gennaio 1911; l'altro ottenuto a Pulkowa (Russia) in occasione di un terremoto a Siwas nell'Asia Minore, addì 9 febbraio 1909.

[2] G. Vicentini, *Osservazioni sismiche.* Atti R. Acc. dei Fisiocritici, serie 4ª, vol. V, Siena 1894.

[3] G. Agamennone, *Importante particolarità nei sismogrammi* ecc...... *Alcune considerazioni sul meccanismo di propagazione delle onde lente.* Rendiconti R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, serie V, 1° sem., fasc. 7 ed 8, 1909.

[4] Horace Lamb., *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.* Phil. Trans. Series A, vol. 203, London 1904.

[5] Hugo Arnold, *Die Erdbewegung während des ersten Vorlaüfers eines Erdbebens.* Leipzig, W. Engelmann, 1909.

[6] E. Oddone, *Sulla durata delle registrazioni sismiche.* Questi Rend. Vol. IV, 1° sem, fasc. 10°, serie 5ª (1895).

[7] E. Oddone, *Per l'estensione di una legge acustica.* Questi Rendic. Vol. XIII, 1° sem., fasc. 2°, serie 5ª (1904).

Da una Memoria del dott. A. Cavasino, dal titolo: *Studio sintetico sui periodi*

Altre idee espresse dall'A. diversificano dalle attuali dei sismologi.

Per costoro, difficilmente le onde (l) si possono considerare come appartenenti allo stesso treno d'onde al quale appartengono i secondi tremiti e le onde (S) come riassumenti un complesso di onde di lunghezza crescente col tempo, riattaccantesi alle onde (l). Nè le onde (L) sono onde longitudinali.

Tra le (S) e le (L) corre la relazione

$$V_L = 0{,}9\ V_S \tag{3}$$

solo valevole se il mezzo ha proprietà elastiche costanti. Alle distanze epicentrali di circa 1500 Km., per le quali le onde V_S e V_L si propagano attraverso gli strati mediani della corteccia terrestre, la (3) si verifica valendo

$$V_P = 7{,}8 \qquad V_S = 4{,}2 \qquad V_L = 3{,}5 \quad \text{Km/sec.}$$

Se però prendiamo distanze epicentrali molto maggiori, dove le V_S seguono circa la strada della corda e le V_L la via della superficie, la (3) non si verifica più. Per es. tra i 4000 ed i 14000 Km. l'Autore calcola

$$V_P = 10{,}5 \qquad V_S = 6{,}1 \qquad V_L = 3{,}1 \quad [1]$$

e non è più $\frac{V_L}{V_S} = 0.9$, bensì $\frac{V_L}{V_S} = 0.5$.

Questa mancata relazione porta alla conseguenza che 6,1 è la velocità per una zona sottostante più elastica della crosta, cui risponde un valore medio di μ maggiore, non paragonabile al μ che entra nell'espressione della velocità dell'onda superficiale di Rayleigh.

L'ammissione fondamentale, che tutte le onde debbano propagarsi lungo un mezzo dotato ovunque delle stesse proprietà elastiche definite da un va-

---

delle onde sismiche ecc., pubblicata in Boll. Soc. Sism. It., Vol. XVII, fasc. 5 e 6. Anno 1913, pag. 44, stralcio i seguenti periodi: « È noto che durante la fase a onde « lente, in uno stesso sismogramma di terremoto lontano, il periodo decresce general- « mente passando dalle onde lentissime alle massimali e da queste alle onde della coda, « dove per lungo tempo delle volte per ore intere rimane quasi costante sino alla fine « della registrazione. Di questo fatto importante ha dato una genialissima spiegazione il « prof. Oddone, il quale parte dall'ipotesi che nell'area epicentrale si producano pressochè « simultaneamente quante ondulazioni si contengono a distanza in una qualunque delle « grandi divisioni in cui si scompone un sismogramma alle stazioni lontane ». La spiegazione si basa « sulla legge che Helmholtz ha trovato pel timbro, e cioè che nello « scuotimento, oltre alle vibrazioni di quel periodo, coesistono le vibrazioni armoniche « atte a caratterizzare il modo di scuotimento ».

[1] Il macrosismo indiano del 4 aprile 1905, scelto come esempio, non è dei migliori. Porta qualche incertezza rispetto il luogo e l'ora epicentrale e data di un tempo quando le registrazioni erano ancora poco sicure. Il calcolo delle velocità medie V_P e V_S tra 4000 e 14000 Km. tratto dalle medie velocità fornite da un gruppo di stazioni a distanze irregolari è poco rigoroso. Ma non per questo le nostre conclusioni vengono alterate.

lore costante del modulo, è condannata. L'altra ammissione fondamentale che i risultati teoretici ottenuti per il piano siano senz'altro applicabili alla superficie sferica, può concedersi per limitati segmenti sferici, ma non più quando le ricerche ed applicazioni si estendono ad una calotta eguale, se non maggiore al quadrante sferico.

Chimica fisiologica. — *Sulle azioni enzimatiche del sangue riguardanti il glicosio.* III: *Distruzione e condensazione del glicosio per opera del sangue circolato, con o senza glicosio, nell'intestino sopravvivente.* Nota del dott. U. LOMBROSO, presentata dal Socio L. LUCIANI [1].

Nella precedente Nota abbiamo constatato che, facendo circolare sangue contenente glicosio in pancreas di cane, compare costantemente nel sangue stesso un attivissimo enzima glicolitico. Facendo circolare invece sangue puro, non si ottiene simile formazione di enzima glicolitico, ma per lo più il sangue manifesta una elevata azione condensatrice sul glicosio aggiunto dopo la circolazione.

Riusciva per più ragioni interessante il ripetere le esperienze fatte sul pancreas, sull'intestino. Anzitutto perchè l'intestino era l'organo che erasi dimostrato al massimo attivo nella distruzione del glicosio in esso circolante, sia nelle esperienze con sangue sia in quelle col liquido del Tirode; inoltre perchè recenti osservazioni hanno fatto sorgere il dubbio che l'intestino pure partecipi, con una funzione interna, al ricambio degli idrati di carbonio (e ciò perchè, in seguito all'esportazione di estesi tratti d'intestino, si sarebbe verificata prolungata glicosusia); si aggiunga poi, che l'estirpazione del pancreas diminuisce ma non annulla la possibilità, da parte dell'organismo, ad utilizzare gli idrati di carbonio, di modo che si deve ammettere da parte di qualche altro organo, che potrebbe appunto essere l'intestino, la compartecipazione agli oscuri e complessi processi che provvedono a regolare il ricambio degli idrati di carbonio.

Questa ipotesi poteva venire avvalorata (non dico dimostrata) se si fosse constatato che, facendo circolare nell'intestino sangue con glicosio, si esaltava il potere glicolitico del sangue stesso, in conformità a quanto si è osservato in varii esperimenti circa la elevabilità delle normali azioni enzimatiche di

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1916.

un tessuto, quando nel tessuto stesso si faccia circolare sangue contenente la sostanza sulla quale si esplica l'azione dell'enzima.

La disposizione sperimentale adottata nelle presenti ricerche corrisponde a quella usata nelle ricerche sul pancreas. Il segmento intestinale esperimentato era costituito da gran parte dell'intestino tenue, e cioè si prelevava l'intestino da qualche diecina di centimetri dal duodeno a qualche diecina di centimetri prima del crasso. L'animale era per lo più tenuto 24-36 ore digiuno, ed in ogni modo il contenuto intestinale veniva esportato con lavaggio di soluzione fisiologica e pressione digitale. Innestata la cannula nell'arteria mesenterica, ed iniziata la circolazione, se qualche segmento non era irrorato si esportava immediatamente, tenendone calcolo nell'indicazione del peso dell'intestino.

I. — Cane di kgr. 8,510. Peso intestino gr. 170; dopo la circolazione gr. 230 + 20 cc. succo. Circolazione con cc. 400 sangue 0.5 % glicosio. Durata dell'esperienza ore 2. Pressione 80-120 mm. Hg.

	10 cc. sangue campione		potere riducente	= 47.8	mgr. glicosio
	10 cc.	»	» bollito con HCl	»	»	= 51.2	» »
	10 cc.	»	circolato.	»	»	= 28.9	» »
	10 cc.	»	» bollito con HCl	»	»	= 29 6	» »
Dopo ore 4 esposizione temperatura ambiente 20-25°	10 cc.	»	campione	»	»	= 46.8	» »
	10 cc.	»	» bollito con HCl	»	»	= 49.9	» »
	10 cc.	»	circolato.	»	»	= 14.6	» »
	10 cc.	»	» bollito con HCl	»	»	= 14.9	» »
Dopo 12 ore temperatura 39°	10 cc.	»	campione	»	»	= 45.2	» »
	10 cc.	»	circolato.	»	»	= 6.6	» »

II. — Cane di kgr. 7. Peso intestino gr. 150; dopo la circolazione gr. 170 + 20 cc. succo. Circolazione con cc. 500 sangue 0.5 % glicosio. Durata dell'esperienza ore 1 ½. Pressione 80-120 mm. Hg.

	10 cc. sangue campione		potere riducente	= 49.3	mgr. glicosio
	10 cc.	»	» bollito con HCl	»	»	= 52.9	» »
	10 cc.	»	circolato.	»	»	= 35.7	» »
	10 cc.	»	» bollito con HCl	»	»	= 36.2	» »
Dopo 10 ore temperatura 39°	10 cc.	»	campione	»	»	= 48 6	» »
	10 cc.	»	» bollito con HCl	»	»	= 49.2	» »
	10 cc.	»	circolato.	»	»	= 12.5	» »
	10 cc.	»	» bollito con HCl	»	»	= 12.5	» »

III. — Cane di kgr. 31. Peso intestino gr. 270; dopo la circolazione gr. 300. Circolazione con 500 cc. sangue al 0.5 % glicosio. Durata dell'esperienza ore 1 1/4. Pressione 80-120 mm. Hg.

Subito dopo la circolazione	10 cc.	sangue campione	potere riducente = 47.2	mgr. glicosio
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 52.8	» »
	10 cc.	» circolato.	» » = 37.7	» »
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 39.2	» »
Dopo 7 ore di termostato	10 cc.	» campione	» » = 46.1	» »
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 47.9	» »
	10 cc.	» circolato.	» » = 33.8	» »
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 35 3	» »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc.	» campione	» » = 39.8	» »
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 43.6	» »
	10 cc.	» circolato.	» » = 15.1	» »
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 15.9	» »

IV. — Cane di kgr. 24. Peso intestino gr. 200; dopo la circolazione gr. 225. Circolazione con 400 cc. sangue puro. Durata dell'esperienza ore 1 1/4. Pressione 80-120 mm. Hg.

A 100 cc. sangue puro non circolato e a 100 cc. dello stesso sangue circolato si aggiungono gr. 0.75 di glicosio.

Dopo 2 ore di termostato	10 cc.	sangue non circolato	potere riducente = 73.8	mgr. glicosio
	10 cc.	» » » bollito con HCl	» » = 76.8	» »
	10 cc.	» circolato.	» » = 68	» »
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 75.4	» »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc.	» non circolato	» » = 72.2	» »
	10 cc.	» » » bollito con HCl	» » = 76.3	» »
	10 cc.	» circolato.	» » = 53.9	» »
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 67.1	» »
Dopo 18 ore di termostato	10 cc.	» non circolato	» » = 74.1	» »
	10 cc.	» » » bollito con HCl	» » = 74.8	» »
	10 cc.	» circolato.	» » = 42.6	» »
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 49.2	» »

V. — Cane di kgr. 22. Peso intestino gr. 180; dopo la circolazione gr. 205. Circolazione con 500 cc. di sangue puro. Durata dell'esperienza ore 1 ½. Pressione 80-120 mm. Hg.

A 100 cc. di sangue puro non circolato ed a 100 cc. dello stesso sangue circolato si aggiungono 0.5 gr. di glicosio.

Dopo 3 ore di termostato	10 cc.	sangue non circolato	potere riducente = 49.3	mgr. glicosio
	10 cc.	» » » bollito con HCl	» » = 53.8	» »
	10 cc.	» circolato.	» » = 3.9	» »
	10 cc.	» » bollito con HCl	» » = 52.6	» »

Si ripete il dosaggio una seconda volta con uguale risultato.

Dopo 6 ore di termostato	10 cc. sangue non circolato		potere riducente	= 52 2	» »
	10 cc. » circolato		» »	= 51.4	» »

Non si procede all'idrolisi con HCl i risultati dimostrandolo superfluo.

Dopo 18 ore di termostato	10 cc. sangue non circolato		potere riducente	= 52.2	» »
	10 cc. » » »	bollito con HCl	» »	= 49.3	» »
	10 cc. » circolato.		» »	= 32.5	» »
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 32.5	» »

VI. — Cane di kgr. 18. Peso intestino gr. 230; dopo la circolazione gr. 255. Circolazione con 500 cc. di sangue puro. Durata dell'esperienza ore $1\frac{1}{2}$. Pressione 80-120 mm. Hg.

A 100 cc. di sangue puro ed a 100 cc. dello stesso sangue circolato si aggiunge 1 gr. di glicosio.

Dopo 3 ore di termostato	10 cc. sangue non circolato		potere riducente	= 100.4	mgr. glicosio
	10 cc. » » »	bollito con HCl	» »	= 107.1	» »
	10 cc. » circolato		» »	= 96.2	» »
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 106.4	» »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc. » non circolato.		» »	= 100.1	» »
	10 cc. » » »	bollito con HCl	» »	= 104.7	» »
	10 cc. » circolato		» »	= 92.2	» »
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 103.1	» »
Dopo ore 24 di termostato	10 cc. » non circolato		» »	= 93.9	» »
	10 cc. » » »	bollito con HCl	» »	= 95.4	» »
	10 cc. » circolato		» »	= 56.8	» »
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 71.2	» »

Dalle rispettive ricerche emerge che:

1°) Facendo circolare sangue contenente glicosio nell'intestino sopravvivente di cane normale, una parte del glicosio scompare, e nel sangue si manifesta l'insorgere di un enzima glicolitico attivissimo, capace di distruggere gran parte del glicosio rimasto, in poche ore di esposizione al termostato.

Comparando i risultati ottenuti nelle esperienze eseguite col pancreas con quelli avuti nelle esperienze compiute con l'intestino, apparirebbe che in queste ultime l'enzima glicolitico è ancora più attivo. Ma bisogna a questo proposito avvertire che le condizioni sperimentali erano assai differenti. I pancreas da me adoperati non superano in peso i gr. 30; e la circolazione non si svolgeva che in poco più di metà dell'organo, in quella cioè irrorata dall'arteria duodenale pancreatica. Nell'intestino invece la circolazione interessava tutto l'organo adoperato, il quale variava in peso fra i 100 e i 200 gr.

2°) Facendo circolare nell'intestino sopravvivente sangue contenente glicosio, non risultano fenomeni di condensazione del glicosio stesso in misura apprezzabile. Tutt'al più, la condensazione si svolge nella limitata misura nella quale avviene nel sangue normale.

3°) Facendo circolare nell'intestino sopravvivente sangne normale, ed aggiungendo in seguito, al sangue circolato, del glicosio in proporzione del 0.5 - 1 %, si avverte un discreto aumento del potere glicolitico, specialmente nei periodi di prolungata permanenza in termostato. Questo aumento (che varia da caso a caso) appare notevole se noi lo confrontiamo col potere glicolitico del sangue normale dello stesso animale, ma è lievissimo se lo confrontiamo invece con l'aumento riscontrato nelle esperienze di circolazione con sangue contenente glicosio.

Comunque, sotto questo punto di vista esisterebbe una certa differenza fra i risultati ottenuti esperimentando con intestino e quelli ottenuti esperimentando con pancreas, nel qual caso non si era potuto constatare un corrispondente aumento del potere glicolitico dopo la circolazione con sangue puro. Ma, nel caso del pancreas, potrebbe darsi che le nostre esperienze, essendo state eseguite con un organo così piccolo, non potessero conseguire un risultato uguale a quello ottenuto coll'intestino. Per cui, per affermare una differenza fondamentale, sotto tal punto di vista, sarebbe necessario di ripetere le esperienze mettendoli in eguali proporzioni nei due casi.

4°) Facendo circolare nell'intestino sopravvivente sangue puro, ed aggiungendo in seguito glicosio in ragione del 0.5-1 %, si avverte il fenomeno dell'apparente scomparsa del glicosio dovuta ad una sua condensazione. E questo fenomeno, pur non essendosi sempre dimostrato con uguale misura (ma anzi con grandi differenze da caso a caso), si manifestò nella massima intensità appunto in alcune esperienze coll'intestino, assai più che non nel pancreas.

Dopo una permanenza più o meno prolungata nel termostato, il glicosio, che si trovava in questa particolare condizione, ritornava, per un'attività enzimatica propria del sangue stesso, di nuovo allo stato libero. Cosicchè, saggiando successivamente il potere riducente del sangue, si otteneva in un primo tempo una elevatissima diminuzione del potere riducente, dovuta semplicemente alla condensazione del glicosio (e quindi non avvertibile se si faceva il dosaggio dopo idrolisi con HCl). In seguito il potere riducente ritornava ad elevarsi sino quasi esattamente al potere iniziale, per il ripristinarsi allo stato libero del glicosio. Infine si iniziava una diminuzione del potere riducente dovuta alla distruzione effettiva del glicosio.

Sono quindi più enzimi che agiscono di fronte al glicosio; l'uno che tende a condensarlo; l'altro a liberarlo, ed un terzo che tende a distruggerlo.

Queste attività, come abbiamo visto, si trovano però in misura infinitamente inferiore, anche nel sangue normale. Nelle circolazioni con pancreas

ed intestino noi abbiamo potuto esaltarle, or l'una or l'altra in misura particolare a seconda delle condizioni in cui si esperimentava.

Costante è stato sempre il risultato nella circolazione con sangue contenente glicosio, in quanto che si ottenne sempre una esaltazione dell'attività glicolitica.

Meno costante, almeno rispetto al grado di entità del fenomeno, è il risultato ottenuto con sangue puro. E non possiamo per ora formulare alcuna ipotesi che ci spieghi il perchè in alcuni casi si sia ottenuta così cospicua sintesi del glicosio, in altri meno.

Ma l'aver potuto dimostrare la possibilità di ottenere una così elevata sintesi di glicosio, specialmente nelle esperienze con l'intestino, costituisce un dato di fatto del quale non può sfuggire l'importanza, e che forse potrà portarci qualche luce per ciò che riguarda il meccanismo della genesi del glicogeno. Ricorderemo a questo proposito le interessanti affermazioni del Croftan [1], secondo il quale il glicosio assorbito dall'intestino può essere fonte di glicogeno, ed invece il glicosio iniettato non sarebbe utilizzato a questo intento.

Con ulteriori ricerche tenteremo di meglio identificare lo stato chimico nel quale giunge il glicosio condensato, e le ragioni per cui si ottiene tale risultato ora in elevata misura, ora in misura più scarsa.

Parassitologia. — *Per la lotta contro le arvicole* [2]. Nota preventiva del prof. Alfonso Splendore [3], presentata dal Socio B. Grassi.

L'invasione dei topi campagnuoli ormai ha raggiunto proporzioni colossali nella Capitanata e si è già propagata anche alle provincie limitrofe. Quasi l'intero raccolto dei cereali in quest'anno, nella provincia di Foggia, è stato distrutto dai malefici roditori; ed ora sono minacciate le vigne.

Il governo d'Italia si è giustamente preoccupato per l'agricoltura nazionale, per la qual cosa ha istituito un comitato di competenti personalità, a fine di poter escogitare i migliori provvedimenti del caso.

Sono state inviate persone tecniche nelle regioni colpite, sia per studiare il fenomeno e sia per intraprendere la lotta con ogni mezzo possibile. È stato applicato l'uso di trincee e di trappole per impedire, o almeno limitare, la penetrazione dei topi dai campi nelle vigne; sono stati adoperati

(1) Pflügers Archiv, vol. 126, pag. 407.

(2) Dal laboratorio di Entomologia agraria dell'Università di Roma.

(3) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1916.

diversi veleni disseminati con esche, e si è anche tentato l'uso dei *virus* che possono avere un'azione patogena per la distruzione di essi.

Quanto alle trincee e alle trappole, certamente sono efficaci, ma inadeguate allo scopo, mentre le regioni infestate sono enormemente vaste ed il numero dei predetti roditori è ormai infinito. Dei veleni l'unico dimostratosi efficace è il fosfuro di zinco, del quale ormai il Ministero ha accaparrata la quantità ritenuta necessaria.

L'esperimento fatto con alcuni *virus*, per quanto mi consta, non ha dato finora i risultati sperati: l'esito negativo di questi deve essere certamente ascritto alla perduta virulenza dei *virus* adoperati.

Com'è noto, i *virus* che furono riconosciuti applicabili per le arvicole sono il bacillo di Löffler (*tiphi murium*) e il bacillo di Danysz.

Il Löffler isolò il suo bacillo molti anni or sono, da un'epizoozia spontanea di topi bianchi apparsa nel suo laboratorio. Tale bacillo studiato con esperimenti, dimostrò per le arvicole una notevole azione patogena ed in una occasione fu adoperato con successo dal Löffler stesso per combattere un'invasione di questi topolini campagnuoli.

Il Danysz, molti anni dopo, isolò il suo germe addirittura da un'epizoozia spontanea di arvicole.

I bacilli di questi due osservatori sono identici o quasi fra loro, per quanto il secondo abbia mostrato maggiore attività del primo; e sono stati considerati come vicini parenti del *bacterium coli*. Essi si possono trasmettere alle arvicole tanto per via sottocutanea quanto per via digerente. Dando a mangiare a detti topi cibi inzuppati con le colture di tali bacilli, si può riuscire ad ottenere rapidamente la morte degli animali, e poichè gli animali morti vengono spesso divorati dai loro simili, l'epizoozia può venire in breve tempo largamente propagata. Dette colture, però, hanno l'inconveniente di perdere facilmente la loro azione patogena.

Ciò posto, si comprende quale e quanta sarebbe l'importanza di poter ottenere un *virus* nuovo di sufficiente attività per il caso presente.

A questo scopo il Ministro d'agricoltura, a cui rivolgo i miei più vivi ringraziamenti, ha voluto affidarmi l'onorifica missione di recarmi in Capitanata, onde procedere alle ricerche opportune.

Avendo già fatto alcune osservazioni, il cui risultato si presenta molto promettente per lo scopo, credo bene nella presente pubblicazione di dare una Nota preventiva al riguardo.

L'inizio delle mie ricerche, per altro, rimonta a circa or fa un mese, ed ebbe luogo nel Laboratorio di Entomologia agraria della R. Università di Roma dove, per gentile ospitalità, lavoro da molto tempo: e si riferisce ad un materiale di studio favoritomi dal benemerito senatore prof. Grassi, il quale, sempre entusiasta per le ricerche scientifiche, così come premuroso per il bene dell'agricoltura nazionale, ha voluto benevolmente incitarmi a tale lavoro.

Trattavasi di un lotto di una quarantina di arvicole (*Pytymys savii*), rimesse da Cerignola dall'egregio dott. Martelli, il quale sta procedendo ad uno studio sulla biologia di tali roditori.

Le bestioline di detta rimessa in parte erano venute a morte durante il viaggio ed erano state parzialmente divorate dai topolini superstiti, in parte vennero a morte nel Laboratorio del prof. Grassi, pochissimi giorni dopo che ci erano pervenute.

Tutti questi animaletti da me esaminati mostrarono nel loro organismo la costante presenza di un coccobacillo parassita, tanto nel sangue circolante, quanto nei varî organi interni, come pure nelle glandole linfatiche di diverse regioni.

Detto germe è facilmente colorabile coi comuni colori di anilina e nei tessuti mostra frequentemente un aspetto cocciforme, anzi a diplococco, con sede tanto extra- che intracellulare, e rimane anche perfettamente colorato col metodo di Gram.

Tale aspetto esso conserva anche nelle colture artificiali che ho conseguito con facilità nell'agar e nel brodo comune; ma più tardi in tali mezzi colturali prende sempre più l'aspetto bacillare presentandosi anche con forme corte e tozze. Queste ultime forme, nei preparati microscopici talora coi colori di anilina assumono una colorazione polare, mostrando nel mezzo uno spazio chiaro.

Dopo tali osservazioni fatte a Roma, essendomi recato a Cerignola, nella R. Scuola agraria di questa città, ho proceduto a numerosi esami della stessa specie di arvicole, osservata a Roma, raccolta in diverse contrade; ed ho riscontrato gli stessi fatti avanti riferiti, specialmente in arvicole provenienti dalla così detta contrada « Contessa ».

Quivi, indubitabilmente, s' incontra una notevole mortalità di queste bestioline, nell'organismo delle quali il germe avanti descritto è stato da me nuovamente riscontrato.

Ho incontrato il detto microrganismo non solo negli animali ch'erano già morti, ma anche in quelli rinvenuti moribondi ed anche in alcuni vivi, che avevano un aspetto più o meno apparentemente sano. In alcuni di questi il microrganismo talvolta s' incontrò in grande numero nelle glandole linfatiche ascellari, anche quando negativo o quasi sembrava l'esame microscopico degli organi interni.

Ho anche eseguito numerose ricerche nel Laboratorio Batteriologico municipale di Foggia, gentilmente messo a mia disposizione ed ho esaminato un buon numero di arvicole provenienti dai dintorni di detta città; ma in tali animaletti non ho riscontrato alcuna epizoozia. Ne ho sacrificato parecchi per l'esame degli organi interni, ma non ho rinvenuto alterazioni patologiche di sorta, salvo la presenza di alcune piccole glandole linfatiche nelle regioni ascellari. L'esame microscopico di dette glandole ha verificato presenza di

microrganismi a forma di cocchi, talora numerosi, e potrebbe darsi benissimo che esse rappresentassero i focolai primitivi di un' infezione generale in via di sviluppo. Se si tratti o meno dello stesso germe rinvenuto nei casi di Cerignola potremo saperlo dalle colture che sono state tentate.

Non ho rinvenuto protozoi patogeni, come qualcuno aveva sospettato, se si eccettui, ma non in modo costante, un coccidio intestinale; sono certo, per altro, che questo sporozoo non ha nulla a che fare con la mortalità a cui mi riferisco. Di altri protozoi ho incontrato nell' intestino un *Octomitus*, la *Lamblia* già ben nota (Grassi), ed un altro piccolo flagellato, tutti certamente innocui, o quasi innocui commensali.

Non ci sarebbe nulla di strano se con ulteriori ricerche si pervenisse anche ad incontrare un'epizoozia da protozoi; ma per il rilevante numero di casi fino ad ora osservato, sono certo che la *causa mortis* debba attribuirsi al coccobacillo avanti descritto. Parlano in favore di questa asserzione la sua costante presenza verificata, tanto in morte che in vivo, nell'animale ospite; la sua disseminazione in tutti gli organi interni e la sua presenza tanto intra- che extracellulare.

Vogliamo sperare, dunque, che sia incominciata la benefica epizoozia, che possa una buona volta distruggere il malefico roditore.

Manca ora di conoscere come avvenga la propagazione del *virus* da me osservato e se eventualmente la sua propagazione possa avverarsi a mezzo di ecto-parassiti, come p. es. pulci e, specialmente pidocchi, che ho incontrato in grandissimo numero su di essi. In ogni modo, poichè la lotta è urgente ed il tempo stringe, rispetto alle vigne e al periodo della semina dei campi, io credo sarà opera prudente quella di disseminare, quanto più è possibile, i topi morti della contrada « Contessa » nelle più diverse contrade invase dalle arvicole, sia che l'epizoozia possa propagarsi a mezzo degli ectoparassiti, sia che la propagazione avvenga per altro modo, come potrebbe essere, per esempio, la via digerente, avendo osservato nel laboratorio che le arvicole morte vengono divorate dalle arvicole vive.

Intanto ulteriori studî potranno dirci se il microrganismo da me osservato, a cui si riferisce la presente Nota, sia più o meno vicino o lontano da quello del Löffler e del Danysz e se e come sia meglio utilizzabile nella lotta a cui siamo impegnati in pro' dell'agricoltura nazionale.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 1°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 1-2.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 10.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. [illegible]; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti **editori-librai:**

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia durante le ferie del 1916.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile*.

Pubblicazione bimensile. N. 2.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXV.° — Fascicolo 2°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Matematica. — *Sugli operatori differenziali omografici.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo [1].

Ho esposto qualche tempo fà alcune proprietà delle *iperomografie* [2]. Ritorno ora sull'argomento perchè posso far constatare, *in modo indiscutibile*, come gli operatori differenziali rot, div, Rot, grad, Δ, Δ' che il prof. Marcolongo ed io abbiamo introdotti in A. V. G. [3] si possono *esprimere per mezzo* di un *unico operatore differenziale*, la *derivata rispetto ad un punto* P, che, seguendo la notazione leibniziana, abbiamo indicato con $\dfrac{d}{dP}$. La verità di tale affermazione risultava, e risulta, anche dall'A. V. G.; ma siccome da alcuni, anche recentemente, è stata negata, certamente in buona fede, non pare inopportuno dare all'antica evidenza un'altra e maggiore evidenza (cfr. le formule [16]-[21]). Inoltre ho creduto opportuno far notare come anche per le omografie si possano avere formule di derivazione analoghe alle ordinarie (cfr. le formule [11]-[14]. Tutto ciò conferma anche, e ancora una volta, che i metodi vettoriali derivati dal Gibbs, i recenti compresi, non escono dal campo degli impotenti tachigrafi cartesiani, nulla avendo a comune col calcolo vettoriale ed omografico assoluto.

1. Sia σ una *iperomografia*, cioè un *operatore lineare* tra *vettori* ed *omografie*. Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sono vettori, $\sigma\mathbf{a}$ è *omografia* e $(\sigma\mathbf{a})\mathbf{b}$ è *vettore*; il

[1] Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1916.

[2] *Sopra alcuni operatori lineari vettoriali.* Atti R. Istituto veneto, a. 1912-13, tomo LXXII, parte 2^a, pp. 265-276.

[3] *Analyse vectorielle générale*, vol. I-II. Mattei e C., Pavia, 1912-13.

che deve esser tenuto ben presente. Secondo le leggi generali stabilite in A. V. G. per gli operatori, si ha, ad es., $(K\sigma)\mathbf{a} = K(\sigma\mathbf{a})$ e quindi $K\sigma$, $I_1\sigma$, $C\sigma$ sono *iperomografie*, $V\sigma$ è *omografia* e $VV\sigma$ è *vettore*. Analogamente se α è omografia, $\alpha\sigma$, $\sigma\alpha$ sono iperomografie (cfr. mia Nota, loc. cit., pp. 268-270).

Le funzioni di σ, $h\sigma$, $k\sigma$ (loc. cit., pp. 271-272), $k'\sigma$, *omografia di* σ, *prima* e *seconda coniugata di* σ, restano definite rispettivamente come *omografia* ed *iperomografie* dalle condizioni

[1] $$(h\sigma)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{b} - (\sigma\mathbf{b})\,\mathbf{a}$$

[2] $$(k\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{b} = (\sigma\mathbf{b})\,\mathbf{a}$$

[3] $$\mathbf{a} \times k'\sigma\mathbf{b} = \mathbf{b} \times \sigma\mathbf{a} \text{ (1)}$$

valevoli per $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vettori arbitrarî.

3. Gli operatori k, k' ammettono le potenze intere positive e si ha

[4] $$kk = 1 \quad , \quad k'k' = 1$$

quando 1 indichi non il numero uno ma l'identità; vale a dire, ad es., $kk = 1$ sta al posto di $kk\sigma = \sigma$ per σ iperomografia arbitraria.

Per il gruppo k, k', K si hanno le formule

[5] $$k'K = kK \quad , \quad Kk' = kK$$

[6] $$k'k = kK \quad , \quad kk' = Kk$$

[7] $$k' = KkK = kKk$$
$$k = Kk'K = k'Kk'$$
$$K = kk'k = k'kk'$$

e queste ultime esprimono uno qualunque dei simboli considerati in funzione dei due rimanenti.

Introducendo ancora h e V si hanno le formule

[8] $$hk = -h$$

[9] $$2V = KhKk = -Khk'$$

[10] $$h = 2KVkK = -2KVk' \text{ (2)}.$$

(1) Se α è omografia, $\mathbf{a} \times \alpha$ è iperomografia; e, ricordando che

$$(\mathbf{a} \times \alpha)\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}) = (K\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b}, \quad \text{si ha} \quad \mathbf{a} \times \alpha = (K\alpha\mathbf{a}) \times .$$

Il simbolo composto $\mathbf{a} \times \alpha$ è più comodo del simbolo equivalente $(K\alpha\mathbf{a}) \times$.

(2) Dalle [4]-[10] si ottengono numerose altre formole, ad es.

$$(Kk)^2 = kK \quad , \quad (Kk)^3 = 1$$
$$hk' = -2KV \quad , \quad 2Vk' = -Kh \quad , \quad Vh = 2VVk'.$$

Inoltre, per $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vettori qualunque ed α omografia si hanno, tra numerose altre,

Dim. [4]. — Dalle definizioni del n. 1 si ha

$$(\mathrm{k}\mathrm{k}\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{b} = (\mathrm{k}\sigma\mathbf{b})\,\mathbf{a} = (\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{b}\,,$$
$$\mathbf{a} \times \mathrm{k}'\mathrm{k}'\sigma\mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathrm{k}'\sigma\mathbf{a} = \mathbf{a} \times \sigma\mathbf{b}\,.$$

Dim. [5]-[7]. — Ricordando che $\mathbf{a} \times \alpha = (\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})\times$ si ha

$$\mathbf{a} \times \mathrm{k}'\mathrm{K}\sigma\mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathrm{K}\sigma\mathbf{a} = \{(\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{b}\}\times = \{(\mathrm{k}\sigma\mathbf{b})\,\mathbf{a}\}\times = \mathbf{a} \times \mathrm{K}\mathrm{k}\sigma\mathbf{b}\,,$$

il che prova che $\mathrm{k}'\mathrm{K} = \mathrm{K}\mathrm{k}$. Operando prima a sinistra poi a destra con K, si ha $\mathrm{K}\mathrm{k}'\mathrm{K} = \mathrm{k}$, $\mathrm{K}\mathrm{k}' = \mathrm{k}\mathrm{K}$, cioè si hanno le [5].

Dalla [3], essendo $\mathbf{x}$ vettore arbitrario, si ha

$$\mathbf{a} \times (\mathrm{k}'\mathrm{k}\sigma\mathbf{b})\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \times (\mathrm{k}\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \times (\sigma\mathbf{x})\,\mathbf{a} = \mathbf{a} \times (\mathrm{K}\sigma\mathbf{x})\,\mathbf{b}\,,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$ e per la [2],

$$(\mathrm{k}'\mathrm{k}\sigma\mathbf{b})\,\mathbf{x} = (\mathrm{K}\sigma\mathbf{x})\,\mathbf{b} = (\mathrm{k}\mathrm{K}\sigma\mathbf{b})\,\mathbf{x}\,,$$

che dimostra la prima delle [6]; da questa la seconda, indi le [7].

Dim. [8]. — Dal n. 1 si ha

$$(\mathrm{h}\mathrm{k}\sigma)\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathrm{k}\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{b} - (\mathrm{k}\sigma\mathbf{b})\,\mathbf{a} = (\sigma\mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{b} = -(\mathrm{h}\sigma)\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,.$$

Dim. [9]. — Qualunque siano i vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, si ha

$$2\mathrm{V}(\sigma\mathbf{a}) \times (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{u} - \mathbf{u} \times (\sigma\mathbf{a})\,\mathbf{v} = \mathbf{v} \times (\mathrm{k}\sigma\mathbf{u})\,\mathbf{a} - \mathbf{u} \times (\mathrm{k}\sigma\mathbf{v})\,\mathbf{a}$$
$$= \mathbf{a} \times \{(\mathrm{K}\mathrm{k}\sigma\mathbf{u})\,\mathbf{v} - (\mathrm{K}\mathrm{k}\sigma\mathbf{v})\,\mathbf{u}\} = \mathbf{a} \times (\mathrm{h}\mathrm{K}\mathrm{k}\sigma)\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathrm{K}\mathrm{h}\mathrm{K}\mathrm{k}\sigma\mathbf{a}) \times (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$$

che per l'arbitrarietà di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e di $\mathbf{a}$ dimostra la prima forma della [9]. Da questa e dalla prima [5] si ha $2\mathrm{V} = \mathrm{K}\mathrm{h}\mathrm{k}'\mathrm{K}$; operando a destra con K ed osservando che $\mathrm{V}\mathrm{K} = -\mathrm{K}$, si ha la seconda forma della [9].

Dim. [10]. — Dalle [9] e dalle [4] si ha

$$2\,\mathrm{K}\mathrm{V} = \mathrm{h}\mathrm{K}\mathrm{k} \quad , \quad 2\,\mathrm{K}\mathrm{V}\mathrm{k} = \mathrm{h}\mathrm{K} \quad , \quad 2\,\mathrm{K}\mathrm{V}\mathrm{k}\mathrm{K} = \mathrm{h}$$
$$2\,\mathrm{K}\mathrm{V} = -\mathrm{h}\mathrm{k}' \quad , \quad 2\,\mathrm{K}\mathrm{V}\mathrm{k}' = -\mathrm{h}\,.$$

---

le formule

(1) $$\alpha \wedge \sigma\mathbf{b} - \mathbf{b} \wedge \sigma\mathbf{a} = \mathrm{k}\mathrm{C}\mathrm{K}\mathrm{k}\sigma\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

(2) $$\mathbf{b} \times \sigma\mathbf{a} - \mathbf{a} \times \sigma\mathbf{b} = \{\mathrm{h}\mathrm{K}\sigma\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\}\times$$

(3) $$(\sigma\mathbf{b})\,\alpha\mathbf{a} - (\sigma\mathbf{a})\,\alpha\mathbf{b} = \mathrm{h}\,(\mathrm{k}\sigma\,.\,\alpha)\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

(4) $$(\sigma\mathbf{a})\,\alpha = \mathrm{k}\,(\mathrm{k}\sigma\,.\,\alpha)\,\mathbf{a}$$

(5) $\mathrm{h}\,(\alpha\sigma) = \alpha\,.\,\mathrm{h}\sigma$, $\mathrm{k}\,(\alpha\sigma) = \alpha\,.\,\mathrm{k}\sigma$, $\mathrm{k}'\,(\sigma\alpha) = \mathrm{K}\alpha\,.\,\mathrm{k}'\sigma$,
$\mathrm{K}\,(\sigma\alpha) = \mathrm{K}\sigma\,.\,\alpha$ $\mathrm{V}\,(\sigma\alpha) = \mathrm{V}\sigma\,.\,\alpha$, $\mathrm{I}_1\,(\sigma\alpha) = \mathrm{I}_1\,\sigma\,.\,\alpha$,
$\mathrm{k}\,(\sigma\alpha) = \mathrm{K}\,(\mathrm{K}\alpha\,.\,\mathrm{K}\mathrm{k}\sigma)$, $\mathrm{K}\,(\alpha\sigma) = \mathrm{k}\,(\mathrm{k}\mathrm{K}\sigma\,.\,\mathrm{K}\alpha)$, $2\mathrm{V}\,(\alpha\sigma) = -\mathrm{K}\mathrm{h}\,(\mathrm{k}'\sigma\,.\,\mathrm{K}\alpha)$.

3. In questo numero e nei seguenti, α, β sono *omografie* ed $\mathbf{u}$ vettore, funzioni del punto P variabile in un campo a tre dimensioni. Il $d\alpha/d\mathrm{P}$ è *operatore lineare* tra *vettori* ed *omografie* (A. V. G.) e quindi è una *iper-omografia*.

La formula semplicissima

$$[11] \qquad \mathrm{h}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}} = \mathrm{K}\ \mathrm{Rot}\ \mathrm{K}\alpha$$

esprime in funzione di $d\alpha/d\mathrm{P}$ e di h l'omografia $\mathrm{K}\ \mathrm{Rot}\ \mathrm{K}\alpha$ che si presenta nelle applicazioni fisico-meccaniche e specialmente nelle deformazioni dei corpi continui (1).

L'operatore binario S di M. Pieri (A. V. G., vol. I, pag. 95) di notevole importanza sia teorica che pratica (2), si esprime, in modo semplicissimo, in funzione di $d\alpha/d\mathrm{P}$ e di k,

$$[12] \qquad \mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{u} = \mathrm{S}(\alpha, \mathbf{u}).$$

Le derivate rispetto a P di $\alpha\mathbf{u}$, $\alpha\beta$ si esprimono sotto la forma ordinaria dell' Analisi quando, per le derivate delle omografie, al simbolo $\frac{d}{d\mathrm{P}}$ si sostituisca $\mathrm{k}\,\frac{d}{d\mathrm{P}}$ (3)

$$[13] \qquad \frac{d(d\mathbf{u})}{d\mathrm{P}} = \alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} + \mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{u}$$

$$\frac{d(\alpha\beta\mathbf{u})}{d\mathrm{P}} = \alpha\beta\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} + \alpha\left(\mathrm{k}\,\frac{d\beta}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{u} + \left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\right)\beta\mathbf{u}$$

$$[14] \qquad \mathrm{k}\,\frac{d(\alpha\beta)}{d\mathrm{P}} = \alpha\left(\mathrm{k}\,\frac{d\beta}{d\mathrm{P}}\right) + \left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\right)\beta \ (4).$$

(1) P. Burgatti, *Sulle deformazioni finite dei corpi continui*, Mem. R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie VII, tomo I, 1913-14; C. Burali-Forti, *Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali*, Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XX, serie 5ª, 1° sem. 1911, pp. 641-648.

(2) A. Palomby, *Le formule fondamentali per la dinamica dei mezzi elastici isotropi*, Rend. Circolo Matematico di Palermo, tomo XL, 2° sem. 1915, pp. 71-102.

(3) Per le forme diverse dalle ordinarie, le sole attualmente note, cfr. A. V. G. vol. I, e M. Bottasso, *Sull'operatore differenziale binario* S *di M. Pieri*, Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem. 1914, pp. 659-665.

(4) Coincide, salvo la forma, con la [12] a pag. 97 di A. V. G., vol. I, che è dovuta a M. Pieri,

Infine è da notarsi la formula

$$[15] \qquad k' \frac{d\alpha}{dP} = Kk \frac{dK\alpha}{dP}.$$

Dim. [11]-[15]. — Dalla [1] e da A. V. G. (vol. I, pp. 74 e 96), si ha

$$\left(h \frac{d\alpha}{dP}\right)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \left(\frac{d d}{dP} \mathbf{a}\right) \mathbf{b} - \left(\frac{d\alpha}{dP} \mathbf{b}\right) \mathbf{a} = K \operatorname{Rot} K\alpha (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}),$$

$$\left(k \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{u}\right) \mathbf{a} = \left(\frac{d\alpha}{dP} \mathbf{a}\right) \mathbf{u} = S(\alpha, \mathbf{u}) \mathbf{a},$$

che dimostrano le [11] e [12].

La prima delle [13] coincide con la nota formula

$$\frac{d(\alpha \mathbf{u})}{dP} = \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} + S(\alpha, \mathbf{u});$$

la seconda si ottiene applicando la prima ad $\alpha(\beta \mathbf{u})$.

Ritenendo $\alpha\beta\mathbf{u}$ scomposto in $(\alpha\beta)\mathbf{u}$, applicando la prima [13] e confrontando con la seconda, si ha la [14].

La [15] si ottiene subito dalle formule del n. 2.

4. Le formule

$$[16] \qquad \operatorname{Rot} \alpha = 2Vk \frac{d\alpha}{dP} = -2Vk' \frac{dK\alpha}{dP}$$

$$[16'] \qquad \operatorname{Rot} \alpha = KhK \frac{d\alpha}{dP} = Kh \frac{dK\alpha}{dP}$$

$$[17] \qquad (\operatorname{grad} \alpha) \times = I_1 k \frac{dK\alpha}{dP} = I_1 k' \frac{d\alpha}{dP}$$

$$[18] \qquad \operatorname{grad} \alpha = -VhI_1 k \frac{dK\alpha}{dP} = -VhI_1 k' \frac{dK\alpha}{dP}$$

$$[18'] \qquad \operatorname{grad} \alpha = -2VVk'I_1 k' \frac{d\alpha}{dP} = -2VVk'I_1 k \frac{dK\alpha}{dP}$$

esprimono, — *in modo del tutto esplicito* e tale *da non poter lasciare dei dubbi* — $\operatorname{Rot} \alpha$ e $\operatorname{grad} \alpha$ in funzione della $\frac{d\alpha}{dP}$ o anche della $\frac{dK\alpha}{dP}$, cioè in funzione di α o $K\alpha$ e di $\frac{d}{dP}$.

Per rendersi conto dell'opportunità e importanza del simbolo k basta confrontare le note formule

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 2V \frac{d\mathbf{u}}{dP} \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = I_1 \frac{d\mathbf{u}}{dP} \quad \text{[A. V. G., vol. I, pag. 70]}$$

con le prime forme delle [16] e [17].

Dim. [16] , [16']. — Dalla [11], cambiando α in $K\alpha$ e operando con K, si ha la prima forma [16']. Da questa si ha la prima [16] (1) perchè, eliminando h con la prima [10], si ha

$$\operatorname{Rot} \alpha = 2\,KKVkKK \frac{d\alpha}{dP} = 2\,Vk \frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{a}\,.$$

Le seconde forme si ottengono dalle prime con le formule del n. 2.

Dim. [17], [18], [18']. — Cominciamo con l'osservare che qualunque sia l'iperomografia σ, esiste un vettore **u** funzione di σ tale che

$$(a) \qquad I_1\sigma = \mathbf{u}\times \qquad \text{essendo} \qquad \mathbf{u} = -Vh\,I_1\sigma\,.$$

Esiste **u** perchè $(I_1\sigma)\,\mathbf{a} = I_1(\sigma\mathbf{a})$ deve essere (A. V. G., vol. I, pag. 9), della forma $\mathbf{u}\times$. Ora si ha

$$h(\mathbf{u}\times)\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \mathbf{u}\times\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} - \mathbf{u}\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{a} = -\mathbf{u}\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\,,$$

cioè

$$h(\mathbf{u}\times) = -\mathbf{u}\wedge \quad , \quad \mathbf{u} = -Vh(\mathbf{u}\times) = -Vh\,I_1\sigma\,.$$

Se **a** è vettore costante, si ha (A. V. G., vol. I, pag. 79)

$$(\operatorname{grad} \alpha)\times\mathbf{a} = \operatorname{div}(K\alpha\mathbf{a}) = I_1 \frac{d(K\alpha\mathbf{a})}{dP} = I_1 k \frac{dK\alpha}{dP}\,\mathbf{a}$$

(1) Oppure direttamente così. Per **a** vettore costante e dalla [13] si ha

$$(\operatorname{Rot}\alpha)\,\mathbf{a} = \operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) = 2V\frac{d(\alpha\mathbf{a})}{dP} = 2Vk\frac{d\alpha}{dP}\,.$$

Anche per **u** funzione di P si ha

$$(\operatorname{Rot}\alpha)\,\mathbf{u} = \operatorname{rot}(\alpha\mathbf{u}) - 2V\left(\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = 2V\left\{\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP} + k\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{u} - \alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right\} = \text{ecc.}$$

e si ottiene lo stesso risultato; il che *deve* avvenire perchè la funzione $2Vk\frac{d\alpha}{dP}$ ottenuta per **a** costante, è una omografia come $\operatorname{Rot}\alpha$.

che [a causa della prima (a), anche per $\mathbf{a}$ costante] dimostra le [17], dalle quali, per la seconda (a), risultano le altre ([1]).

5. Dalla [11] si ha subito

$$[19] \qquad \mathrm{h}\,\frac{d}{d\mathrm{P}}\left(\mathrm{h}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\right) = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}^2\,\mathrm{K}\alpha\,.$$

Da questa, dalla [18] e da

$$\Delta\alpha = \frac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{d\mathrm{P}} - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}^2\,\mathrm{K}\alpha \quad (^2)$$

si ha

$$[20] \qquad \Delta\alpha = -\frac{d}{d\mathrm{P}}\left(\mathrm{V}\mathrm{h}\,\mathrm{I}_1\,\mathrm{k}'\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\right) - \mathrm{h}\,\frac{d}{d\mathrm{P}}\left(\mathrm{h}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\right)$$

$$= -\frac{d}{d\mathrm{P}}\left(\mathrm{V}\mathrm{h}\,\mathrm{I}_1\,\mathrm{k}\,\frac{d\mathrm{K}\alpha}{d\mathrm{P}}\right) - \mathrm{h}\,\frac{d}{d\mathrm{P}}\left(\mathrm{hK}\,\frac{d\mathrm{K}\alpha}{d\mathrm{P}}\right)$$

che esprimono, — *in modo del tutto esplicito* e tale da *non poter lasciare dei dubbî* —, $\Delta\alpha$ in funzione di α, o $\mathrm{K}\alpha$, e dell'operatore differenziale $\frac{d}{d\mathrm{P}}$.

Lo stesso dicasi per l'operatore Δ' tra vettori e vettori,

$$(a) \qquad \Delta'\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} \qquad \text{[A. V. G., vol. I, pag. 98]}$$

([1]) Si possono ottenere numerose formule con gli operatori che compariscono nelle [16]-[18']. Citiamo soltanto queste due formule:

$$\mathrm{Rot}\,(\beta\alpha) = \mathrm{Rot}\,\beta\,.\,\alpha + 2\mathrm{V}\left(\beta\,.\,\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\right)$$

$$\mathrm{Rot}\,(\beta\alpha) = \mathrm{Rot}\,\beta\,.\,\alpha + \mathrm{Rot}\,\alpha\,.\,\beta + 2\mathrm{V}\left\{\beta\,.\,\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}} - \mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\,\beta\right\}.$$

Non pare si possa esprimere $\mathrm{Rot}\,(\beta\alpha)$ per mezzo di funzioni α e β non contenenti iperomografie. Il contrario avviene per

$$\mathrm{grad}\,(\beta\alpha) = \beta\,\mathrm{grad}\,\alpha + \alpha\,\mathrm{grad}\,\beta + 2\mathrm{V}\,\{\mathrm{Rot}\,(\alpha\beta) - \mathrm{Rot}\,\alpha\,.\,\beta - \mathrm{Rot}\,\beta\,.\,\alpha\}\,.$$

([2]) Si può ottenere dalla [7], pag. 104 di A. V. G., oppure così, per $\mathbf{a}$ vettore costante (cfr. Bottasso, loc. cit., e A. V. G., vol. I. n. 44):

$$(\Delta\alpha)\,\mathbf{a} = \Delta'(\alpha\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\,\frac{d\,(\alpha\mathbf{a})}{d\mathrm{P}} = \mathrm{grad}\left\{\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a} - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,,\,\mathbf{a}\wedge\right\}$$

$$= \frac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a} - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\mathbf{a}\,.$$

per il quale si ha

[21] $$\Delta' \mathbf{u} = - \mathrm{V h I_1 k'} \frac{d}{dP}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right).$$

Dal confronto delle [20] e [21] può venire in mente di indicare i due operatori Δ, Δ' (a parte che uno è per le omografie, l'altro per i vettori) con uno *stesso* simbolo? Non pare certamente. Pure da taluno si è insistito, e si insiste ancora, per *confondere* Δ e Δ' col tachigrafo cartesiano Δ_2 di Laplace!

Ma la differenza tra Δ e Δ' può rendersi sensibile anche in altro modo. Dalla definizione di $(\Delta\alpha)\mathbf{x}$ (cfr. A. V. G., vol. I, pag. 97) e dalla [13] si ha [1]

[1] La profonda differenza degli operatori assoluti Δ', Δ tra loro e col tachigrafo cartesiano Δ_2, non si può attribuire alla *definizione assoluta* di Δ' e Δ

$$\Delta'\mathbf{u} = \operatorname{grad}\frac{d\mathbf{u}}{dP} \quad . \quad (\Delta\alpha)\,\mathbf{u} = \operatorname{grad}\left\{\frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP} - 2\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right\} + \alpha \operatorname{grad}\frac{d\mathbf{u}}{dP},$$

perchè sono appunto queste le forme che si ottengono applicando il tachigrafo

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

a *vettore* od *omografia*, $\mathbf{u}$, α, indipendente dal sistema cartesiane (fisso) $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e dalle coordinate x, y, z di $P = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e si tenga conto che $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dP}\mathbf{i}$, ecc., per u funzione arbitraria di P. Sarà utile fare vedere ciò in modo esplicito.

$$\Delta_2\mathbf{u} = \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2} + \cdots = \left(\frac{d}{dP}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \cdots = \left\{\frac{d}{dP}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{i}\right)\right\}\mathbf{i} + \cdots$$

e da A. V. G., vol. I, pag. 74, [3]''

(*d*) $$\Delta_2\mathbf{u} = \operatorname{grad}\frac{d\mathbf{u}}{dP}.$$

Si ha pure

$$(\Delta_2\alpha)\,\mathbf{u} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\mathbf{u} + \cdots = \left\{\frac{\partial^2(\alpha\mathbf{u})}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right\} + \cdots$$
$$= \Delta_2(\alpha\mathbf{u}) - \alpha\Delta_2\mathbf{u} - 2\left\{\left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{i}\right)\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{i}\right) + \cdots\right\};$$

ma si ha (A. V. G., vol. I, pag. 74, pag. 68)

$$\operatorname{grad}\left(\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = \left\{\frac{d}{dP}\left(\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{i}\right)\right\}\mathbf{i} + \cdots = \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{i}\right)\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{i}\right) + \alpha\left\{\frac{d}{dP}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{i}\right)\right\}\mathbf{i} + \cdots$$
$$= \alpha\Delta_2\mathbf{u} + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{i}\right)\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{i}\right) + \cdots\right\}$$

$$(b) \qquad (\Delta\alpha)\,\mathbf{x} = \operatorname{grad}\left(k\,\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{x}\right) + \alpha\,\operatorname{grad}\frac{d\mathbf{x}}{dP} - \operatorname{grad}\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{x}}{dP}\right),$$

ovvero sotto forma *simbolica*

$$(b') \qquad \Delta\alpha = \operatorname{grad} k\,\frac{d\alpha}{dP} + \alpha\,\operatorname{grad}\frac{d}{dP} - \operatorname{grad}\alpha\,\frac{d}{dP}$$

che ha forma *visibilmente* diversa dalla (a), non tenendo conto che è realmente alla (b) che ci si deve riferire e non alla (b') la cui forma è solo *simbolica* ma sostanzialmente inesatta.

Giova notare esplicitamente che se nella (b) si pone al posto di $\mathbf{x}$ un vettore costante $\mathbf{a}$, si ha

$$(\Delta\alpha)\,\mathbf{a} = \operatorname{grad}\left(k\,\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{a}\right),$$

dalla quale *non è lecito* dedurre

$$\Delta\alpha = \operatorname{grad} k\,\frac{d\alpha}{dP},$$

che avrebbe analogia con la (a), perchè $\operatorname{grad}\sigma$ non è, in generale, una omografia.

---

e quindi

$$(\Delta_2\alpha)\,\mathbf{u} = \Delta_2(\alpha\mathbf{u}) - \alpha\,\Delta_2\mathbf{u} - 2\left\{\operatorname{grad}\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) - \alpha\,\Delta_2\mathbf{u}\right\}$$

$$= \Delta_2(\alpha\mathbf{u}) - 2\operatorname{grad}\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) + \alpha\,\Delta_2\mathbf{u},$$

$$(b) \qquad (\Delta_2\alpha)\,\mathbf{u} = \operatorname{grad}\left\{\frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP} - 2\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right\} + \alpha\,\operatorname{grad}\frac{d\mathbf{u}}{dP}.$$

Da (a) e (b) risulta quanto abbiamo affermato.

Resta così provato che il $\Delta\alpha$ definito sotto forma assoluta nel modo indicato, dà l'omografia che si ottiene applicando alla α, riferita al sistema cartesiano, il tachigrafo Δ_2; cioè resta provato che non è l'arbitrarietà della nostra definizione assoluta di $\Delta\alpha$ che porti alla non identità di Δ con Δ_2. Nè dal fatto che $\Delta\alpha = \Delta_2\alpha$ per α omografia arbitraria se ne può concludere $\Delta = \Delta_2$, perchè Δ ha, *per definizione*, soltanto le omografie come campo di applicazione, mentre Δ_2 ha il campo di applicazione formato da omografie vettori ecc.; e affinchè due operatori siano identici, è *necessario* abbiano egual campo di applicazione. Lo stesso s'intende ripetuto per Δ'. È vero che il campo di applicabilità di un operatore è elemento di solito trascurato; ma è appunto trascurandolo che molti giungono a notazioni del tutto illogiche.

Fisica matematica. — *Sopra un teorema di reciprocità relativo alla propagazione di correnti elettriche in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico.* Nota II della dottoressa ELENA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

3. Se si pensa al significato fisico dei coefficienti $a_{rs}\, b_{rs}$ che compaiono nelle (2) e (3), si vede che le uguaglianze (15) esprimono delle leggi elementari di reciprocità. Per esempio, la proprietà espressa dall'eguaglianza $a_{12} = a_{21}$ può tradursi in parole nel modo seguente:

La componente, secondo l'asse y, della velocità che uno ione positivo acquista quando è sollecitato da una f. e. m. uguale ad 1, diretta secondo l'asse x, è uguale alla componente, secondo l'asse x, della velocità che lo stesso ione acquista quando è sollecitato da una f. e. m. uguale ad 1, diretta secondo l'asse y.

I teoremi di reciprocità considerati nel precedente paragrafo sono una conseguenza di queste leggi elementari di reciprocità.

Il Maxwell, considerando la propagazione della elettricità in un mezzo anisotropo (non sottoposto all'azione di un campo magnetico), dice che, in tutti i casi di anisotropia che si presentano (fatta eccezione, tutto al più, pei magneti), si può ritenere che il determinante dei coefficienti, nelle uguaglianze che dànno le componenti della corrente elettrica espresse linearmente in funzione di quelle della f. e. m., sia un determinante simmetrico [2]. Se ci si riferisce alla teoria elettronica, questa ipotesi del Maxwell si traduce nelle uguaglianze (15)'.

Se non solo le uguaglianze (15)', ma anche le (15) sono soddisfatte in ogni caso di anisotropia, la stessa generalità vale per i teoremi considerati nel precedente paragrafo.

Si possono, ad ogni modo, facilmente stabilire dei casi in cui le (15) sono certamente soddisfatte. Tra gli altri, c'è il caso, che qui più interessa, di un conduttore che sia isotropo fuori del campo magnetico e che solo per azione di quest'ultimo acquisti una temporanea anisotropia. Per vederlo, consideriamo per un punto P del conduttore tre semirette $l\ m\ n$ che formino un triedro ortogonale destrorso avente la faccia lm tangente alla superficie di livello del campo magnetico che passa per P; per evidenti ragioni di simmetria, tutte le direzioni uscenti da P ed appartenenti al piano lm saranno equivalenti, dal punto di vista elettromagnetico. Perciò le compo-

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1916.

[2] *A Treatise on Electricity and Magnetism*, pag. 346, § 297; pag. 350, § 303 (Oxford, Clarendon Press, 1873).

nenti $\frac{d\lambda_1}{dt}\,\frac{d\mu_1}{dt}\,\frac{d\nu_1}{dt}$, $\frac{d\lambda_2}{dt}\,\frac{d\mu_2}{dt}\,\frac{d\nu_2}{dt}$ delle velocità di uno ione positivo e di uno ione negativo secondo i tre assi del triedro e le componenti $eE_{1l}\, eE_{1m}\, eE_{1n}$, $-eE_{2l}\, -eE_{2m}\, -eE_{2n}$ delle f. e. m. che sollecitano rispettivamente gli ioni stessi, debbono essere legate da relazioni del tipo

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = e h_1 E_{1l} \qquad \frac{d\mu_1}{dt} = e h_1 E_{1m} \qquad \frac{d\nu_1}{dt} = e k_1 E_{1n}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -e h_2 E_{2l} \qquad \frac{d\mu_2}{dt} = -e h_2 E_{2m} \qquad \frac{d\nu_2}{dt} = -e k_2 E_{2n}\,.$$

Detti $\omega_{11}\,\omega_{12}\,\omega_{13}$, $\omega_{21}\,\omega_{22}\,\omega_{23}$, $\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{33}$ i coseni direttori (variabili in genere da punto a punto) delle semirette $l\,m\,n$ rispetto ai tre assi $x\,y\,z$ a cui vengono riferiti tutti i punti del conduttore, dalle sei uguaglianze precedenti si possono dedurre le relazioni tra le componenti, secondo gli assi $x\,y\,z$, delle velocità degli ioni e le componenti, secondo gli stessi assi, delle f. e. m. che li sollecitano. Si possono cioè scrivere le equazioni (2) e (3) relative a questo caso particolare. Si trova

$$a_{12} = a_{21} = (k_1 - h_1)\,\omega_{31}\,\omega_{32} \qquad a_{23} = a_{32} = (k_1 - h_1)\,\omega_{32}\,\omega_{33}$$

$$a_{31} = a_{13} = (k_1 - h_1)\,\omega_{31}\,\omega_{33}\,.$$

I coefficienti b_{rs} si ottengono dai coefficienti a_{rs} sostituendo h_2, k_2 ad h_1, k_1.

Al teorema di reciprocità relativo ad una lamina metallica isotropa fuori del campo magnetico, appunto per evitare la considerazione dell'eventuale anisotropia determinata da quest'ultimo, è stata posta la limitazione che la lamina sia disposta secondo una superficie di livello del campo; per quanto precedentemente ho detto, tale limitazione si può evidentemente togliere.

Le conseguenze, che dal teorema di reciprocità considerato si possono dedurre nel caso di un conduttore a tre dimensioni, sono perfettamente analoghe a quelle che se ne possono dedurre per una lamina. Dal detto teorema segue per es. che, se un conduttore a tre dimensioni è munito di due elettrodi di estensione finita e resistenza trascurabile, la differenza di potenziale tra questi ultimi deve rimanere inalterata all'invertire del campo, se si mantiene costante l'intensità della corrente totale che attraversa il conduttore; non deve cioè mutare all'invertire del campo la resistenza globale del conduttore, per quanto possa mutare anche molto la distribuzione delle linee di flusso [1].

4. Ho voluto verificare sperimentalmente che il teorema di reciprocità del prof. Volterra sussiste, non solo nel caso di una lamina disposta secondo

[1] Cfr., per il caso di una lamina, Corbino e Trabacchi, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 809.

una superficie di livello del campo magnetico, ma anche nei casi considerati nei precedenti paragrafi.

Il dispositivo adoperato è quello stesso adottato dal dott. Tasca, nel caso di una lamina disposta secondo una superficie di livello del campo [1]. Quest'ultimo era creato dalla grande elettrocalamita Weiss dell'Istituto Fisico di Roma; il campo uniforme era ottenuto con espansioni polari piane del diametro di cm. 10; il campo non uniforme con espansioni terminate da dischetti piani del diametro di mm. 5. Mediante due interruttori a sei pozzetti, potevo collegare due elettrodi A e B del conduttore coi poli di una batteria di accumulatori, ed altri due elettrodi C e D con un galvanometro Hartmann e Brawn a bobina mobile, o viceversa. Nel circuito della batteria e del conduttore era inserita una grossa resistenza, perchè l'intensità della corrente potesse ritenersi costante quando scambiavo gli elettrodi A , B con gli elettrodi C , D. Siccome interrompevo la corrente nel conduttore appena letta (con cannocchiale fornito di scala) la deviazione impulsiva del galvanometro, potevo evitare l'influenza dei fenomi termici che accompagnano il fenomeno Hall. Per eliminare le forze termoelettriche, avviluppavo il conduttore in bambagia.

Riferirò qualcuno dei risultati ottenuti. Indicherò con d la distanza minima tra le espansioni polari, con I l'intensità della corrente nell'elettrocalamita, con i l'intensità della corrente totale nel conduttore. Prenderò come misura delle differenze di potenziale $V_A - V_B$, $V_C - V_D$, le corrispondenti deviazioni del galvanometro, espresse in millimetri.

Ho cominciato dal verificare che il teorema di reciprocità per una lamina metallica, isotropa fuori del campo magnetico, sussiste, qualunque sia la sua orientazione nel campo. Mi sono perciò servita di un disco di bismuto del diametro di cm. 4,5 e dello spessore di mm. 2, fornito di quattro elettrodi puntiformi A B C D situati dissimmetricamente, realizzati saldando alla lamina quattro sottili fili di rame.

Con le espansioni polari piane (cioè con campo magnetico uniforme), per $d =$ cm 5 , I $=$ amp. 5 , $i =$ amp. 0,2, posto il disco inclinato a circa 45° rispetto alle linee di forza del campo, ho ottenuto:

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	26	53	38
$V_C - V_D$	53,5	26	38,5

(Si sottintende che, quando la differenza di potenziale era misurata tra A e B, la corrente entrava ed usciva per C e D; e viceversa).

Con le espansioni polari terminate da dischetti (cioè con campo magnetico non uniforme), per $d =$ cm 2,6 , I $=$ amp. 6,3 , $i =$ amp. 0,2,

[1] Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pp. 336 e 709.

posto il disco in modo che formasse un angolo acuto col piano equatoriale dell'elettro-magnete, ho ottenuto i risultati seguenti:

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	18	71,5	38
$V_C - V_D$	71,5	18,5	38,5

Nel caso della lamina, come negli altri casi di cui ora mi occuperò, non mi sono limitata alle esperienze di cui riferisco i risultati, ma ho fatto parecchie prove, sia scambiando tra loro gli elettrodi, sia mutando l'orientazione del conduttore nel campo. Ho trovato più o meno sensibile l'azione di quest'ultimo, nelle diverse condizioni, ma sempre ugualmente buono l'accordo con la teoria.

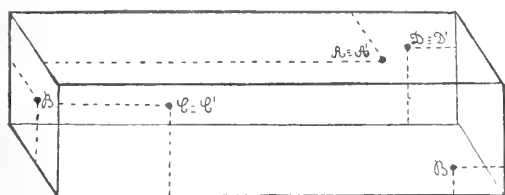



Fig. 1.

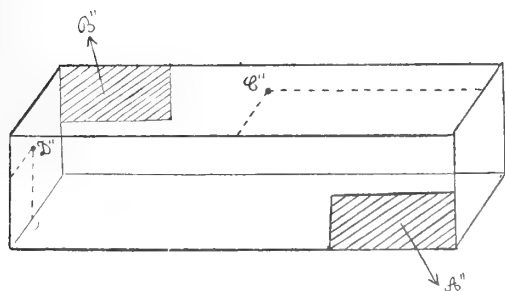



Fig. 2.

Per verificare che il teorema di reciprocità può estendersi al caso di un conduttore a tre dimensioni, isotropo fuori del campo magnetico, mi sono servita di un prisma di bismuto avente per base un quadrato di cm. 1,5 di lato e l'altezza di cm. 6, fornito o di elettrodi puntiformi, situati a caso lungo la sua superficie (ved. fig. 1), o di elettrodi puntiformi e di elettrodi laminari, di rame, di resistenza trascurabile (vedi fig. 2).

Con le espansioni polari piane, per $d =$ cm. 3,4 , I $=$ amp. 7,8, $i =$ amp. 0,43, disposto il prisma con le facce laterali inclinate rispetto alle linee di forza del campo, servendomi dei quattro elettrodi puntiformi A B C D (ved. fig. 1), ho ottenuto

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	411	421	395,5
$V_C - V_D$	421	411,5	395,5

Con le espansioni polari terminate da dischetti, per d = cm. 1,8, I = amp. 7,8, i = amp. 0,58, servendomi dei quattro elettrodi puntiformi A′ B′ C′ D′ (ved. fig. 1), ho avuto:

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_{A'} - V_{B'}$	20	13,5	15
$V_{C'} - V_{D'}$	13,5	20,5	15,5

(In questa esperienza la faccia contenente gli elettrodi B′C′ e la faccia opposta contenente l'elettrodo D′ erano parallele al piano equatoriale dell'elettromagnete)

Saldati poi al prisma i due elettrodi laminari A″, B″, mi sono servita di essi e dei due elettrodi puntiformi C″, D″ (ved. fig. 2). Disposto il prisma con le facce contenenti gli elettrodi laminari un po' inclinate rispetto al piano equatoriale dell'elettromagnete, con campo non uniforme, per d = cm. 1,8, I = amp. 7,7, i = amp. 0,59, ho ottenuto i seguenti risultati:

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_{A''} - V_{B''}$	383	387	367,5
$V_{C''} - V_{D''}$	387	383	367

Come si vede, nel caso del prisma l'azione del campo è meno sensibile che non nel caso del disco, ma il teorema di reciprocità si verifica sempre.

Ho voluto poi provare se tale teorema valesse per un frammento di cristallo di bismuto tramoggiato, ottenuto artificialmente, di forma affatto irregolare, fornito di quattro elettrodi puntiformi situati dissimmetricamente sulla sua superficie. Osservo che, se si fosse ottenuto un risultato negativo, con o senza l'azione del campo magnetico, sarebbe stata provata l'esistenza di casi di anisotropia per cui le uguaglianze (15) o (15)′ del § 2 non sono verificate.

Con le espansioni polari piane, per d = cm. 4,8, I = amp. 7, i = = amp. 0,31, per un'orientazione scelta a caso del cristallo, ho ottenuto

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	104	157	119
$V_C - V_D$	156,5	104	119

Con le espansioni polari terminate da dischetti, per d = cm. 2, I = amp. 7, i = amp. 0,37, disposto a caso il cristallo nel campo, ho ottenuto

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	115	215	136
$V_C - V_D$	215	114,5	136,5

Come si vede, la legge di reciprocità era verificata anche in questo caso; anzi l'azione del campo era molto sensibile.

Ripreso infine il prisma di bismuto, fornito dei due elettrodi laminari A″B″, facendo entrare ed uscire per essi la corrente, ho esaminato la loro differenza di potenziale col campo diretto e col campo inverso. Ho trovato, come la teoria richiede, che la differenza di potenziale non mutava all'invertire del campo.

Matematica. — *Sulla derivazione per serie.* Nota di Attilio Vergerio, presentata dal Socio C. Somigliana [1].

1. Il prof. Fubini ha recentemente dimostrato il seguente teorema [2]:

Se $u(x)=\sum_1^\infty u_n(x)$ *è una serie convergente di funzioni monotòne, per es. non decrescenti, definite in un intervallo* $(a \leq x \leq b)$, *ivi è quasi dappertutto lecita la derivazione per serie; cioè quasi dappertutto vale la*

$$u'(x)=\sum_1^\infty u'_n(x)\,.$$

In altre parole:

1°) il gruppo dei punti ove non esiste oppure non è finita anche una sola delle $u'(u)\,,\,u'_n(x)$;

2°) il gruppo dei punti ove $\sum_1^\infty u'_n(x)$ non converge;

3°) il gruppo dei punti ove non è $u'(x)=\sum_1^\infty u'_n(x)$

sono aggregati di misura nulla.

Poco dopo il Tonelli, mediante considerazioni geometriche piuttosto laboriose, riusciva a dimostrare [3] un teorema che può enunciarsi così:

Supposto: 1°) *che la* $\sum_1^\infty u_n(x)$ *converga in* (ab), *quasi dappertutto verso una funzione* $u(x)$; 2°) *che tanto le* $u(x)$ *quanto le* $u_n(x)$ *siano funzioni a variazione limitata nel detto intervallo*; 3°) *che la serie delle derivate (considerate là dove esistono)* $\sum_1^\infty u'_n(x)$ *sia quasi dappertutto convergente; sarà, quasi dappertutto,*

$$u'(x)=\sum_1^\infty u'_n(x)\,.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1916.

(2) *Sulla derivazione per serie.* Questi Rendiconti, 1° sem. 1915, pp. 204-206.

(3) *Successioni di curve e derivazione per serie,* Nota I. Questi Rendiconti, 1° semestre 1916, pp. 22-30.

Da questo teorema il Tonelli ha poi dedotto, come caso particolare, quello del Fubini ricordato più sopra.

Noi qui seguiremo la via inversa; prenderemo, cioè, le mosse dal teorema del Fubini per arrivare a stabilire una proposizione simile a quella del Tonelli.

Le condizioni che dovremo porre sono forse alquanto più restrittive di quelle poste dal Tonelli. pur potendo in molti casi coincidere; il nostro teorema ha però il vantaggio di potersi dimostrare in un modo estremamente semplice, che potrà forse permettere di dare al teorema stesso un'ulteriore estensione (¹).

Daremo poi la dimostrazione d'un altro teorema, che può presentare un qualche interesse.

2. Il teorema cui accennavamo poco fa è il seguente:

Se i termini $u_n(x)$ della serie convergente

$$u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$$

sono funzioni a variazione limitata in (a, b); e se, indicando con A una costante finita e positiva e con V_n la variazione totale della $u_n(x)$ in (a, b), sussiste la relazione

$$\sum_1^\infty V_n < A, \tag{1}$$

sarà, quasi dappertutto,

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x).$$

Indicando con $V_n(x)$, $P_n(x)$, $Q_n(x)$ rispettivamente la variazione totale, positiva e negativa di $u_n(x)$ nell'intervallo (a, x), potrà porsi, per la nota proprietà delle funzioni a variazione limitata:

$$u_n(x) - u_n(a) = P_n(x) - Q_n(x), \tag{2}$$

(¹) Il Tonelli nella Nota II (*Successioni di curve e derivazione per serie.* Questi Rend., 1° sem. 1916, pp. 85-91), s'era proposto di dimostrare che la 3ª condizione posta nel suo teorema è affatto superfiua perchè conseguenza delle altre due; che si può cioè prescindere dall'ipotesi sulla convergenza delle serie derivate. Il suo teorema però, così modificato, cessa di esser vero; per convincersene, basta ricordare il classico esempio di Abel: la serie

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

soddisfa alle condizioni 1ª, e 2ª, del suo teorema; ciò nondimeno, la serie delle derivate

$$\sum_1^\infty \cos nx$$

è divergente!

e quindi anche

$$u(x) - u(a) = \sum_1^\infty P_n(x) - \sum_1^\infty Q_n(x) . \tag{3}$$

E poichè

$$P_n(x) + Q_n(x) = V_n(x) \leq V_n ,$$

sarà, per la (1),

$$\sum_1^\infty P_n(x) + \sum_1^\infty Q_n(x) < A .$$

Le due serie del primo membro dovranno essere convergenti, essendo le $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ funzioni positive; potremo perciò porre

$$(4) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_1^\infty P_n(x) \\ \psi(x) &= \sum_1^\infty Q_n(x) , \end{aligned}$$

dove $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ saranno due funzioni finite in (a, b). E poichè le $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ sono anche funzioni mai decrescenti, potremo applicare alle due serie precedenti il teorema di Fubini: avremo così dalle (4), quasi dappertutto,

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \sum_1^\infty [P'_n(x) - Q'_n(x)] ;$$

ed anche, derivando la (2),

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x) : \tag{5}$$

la serie $\sum_1^\infty u'_n(x)$ sarà quindi, quasi dappertutto, convergente.

Combinando le (4) e (3), si ha poi mediante derivazione,

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = u'(x) ;$$

e quindi, per la (5), quasi dappertutto,

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x) .$$

3. Passiamo ora a dimostrare l'altro teorema:

Se i valori assoluti dei rapporti incrementati dei termini $u_n(x)$ della serie convergente

$$u(x) = \sum_1^\infty u_n(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

ammettono in (a, b) *un limite superiore* L_n *finito, e se inoltre la serie* $\sum_1^\infty L_n$ *è convergente, sarà, quasi dappertutto,*

$$u'(x) = \sum u'_n(x).$$

Sia C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ una successione di costanti positive, soddisfacenti alla condizione

$$C_n \geq L_n ,$$

ed inoltre tali che la serie $\sum_1^\infty C_n$ sia convergente; per le ipotesi poste, di successioni siffatte ne esisteranno infinite.

Posto allora

$$\sum_1^\infty C_n = C , \tag{6}$$

potremo scrivere

$$u(x) + Cx = \sum_1^\infty \{ u_n(x) + C_n x \} .$$

I termini della serie sono funzioni di x non decrescenti; pel teorema del Fubini sarà allora, quasi dappertutto,

$$u'(x) + C = \sum_1^\infty [u'_n(x) + C_n] ;$$

e, per la (6),

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x) .$$

Il teorema è quindi dimostrato.

Astronomia. — *Osservazioni di pianetini fatte nel 1915 all'equatoriale Dembowski di 187 mm. del R. Osservatorio di Padova.* Nota di B. VIARO, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Nella presente Nota sono date le osservazioni dei pianetini:

(4) Vesta, (19) Fortuna, (313) Chaldaea,
(128) Nemesis, (48) Doris, (29) Amphitrite,
(113) Amalthea, (108) Hecuba, (11) Parthenope,
(704) Interamnia, (354) Eleonora,

e le posizioni medie delle relative stelle di confronto.

Insieme a queste osservazioni, eseguite nel 1915, ne vengono pubblicate 16, relative al pianeta (354) *Eleonora*, la cui opposizione ebbe luogo verso il 6 dicembre, e perciò fu osservabile tanto alla fine del 1915 quanto al principio del 1916.

Data	T. m. Padova	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Cfr.	α app.	log. p. Δ	δ app.	log. p. Δ	Red. ad l. app.	✱
				(4) *Vesta*						
1915	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		s ″	
Febbraio 27	7 36 30	— 0 32.75	— 0 14.7	20.10	4 38 48.86	9.196	+ 20 46 43.9	0.577	+ 1.30 + 9.7	1
Marzo 3	8 13 59	+ 1 4.20	+ 2 1.5	20.10	4 42 21.32	9.385	+ 21 2 51.2	0.598	+ 1.25 + 9.6	2
» 3	8 13 59	+ 0 1.05	— 5 58.0	20.10	4 42 21.21	9.385	+ 21 2 51.1	0.598	+ 1.26 + 9.7	3
» 4	7 49 18	+ 0 55.85	— 2 2.3	20.10	4 43 15.99	9.316	+ 21 6 46.7	0.585	+ 1.24 + 9.6	3
» 4	7 49 18	— 0 26.08	— 3 23.1	20.10	4 43 16.02	9.316	+ 21 6 45.7	0.585	+ 1.25 + 9.6	4
» 5	7 43 52	+ 1 52.63	+ 1 56.2	20. 8	4 44 12.76	9.307	+ 21 10 45.2	0.582	+ 1.23 + 9.6	3
» 5	7 43 52	+ 0 30.68	+ 0 35.9	20. 8	4 44 12.76	9.307	+ 21 10 44.7	0.582	+ 1.23 + 9.6	4
				(19) *Fortuna.*						
Marzo 3	9 16 23	+ 0 51.21	— 12 55.8	18. 8	8 52 55.50	9.001_n	+ 15 12 43.4	0.647	+ 2.51 — 4.4	5
» 3	9 16 23	— 0 30.63	— 12 19.1	18. 8	8 52 55.25	9.001_n	+ 15 12 47.2	0.647	+ 2.51 — 4.5	6
» 4	8 47 50	+ 0 16.47	— 9 42.9	20. 8	8 52 20.76	9.158_n	+ 15 15 56.3	0.650	+ 2.51 — 4.4	5
» 4	8 47 50	— 1 5.32	— 9 6.0	20. 8	8 52 20.56	9.158_n	+ 15 15 60.3	0.650	+ 2.51 — 4.5	6
» 5	9 0 34	— 0 17.86	— 6 28.5	20. 8	8 51 46.42	9.053_n	+ 15 19 10.8	0.647	+ 2.50 — 4.3	5
» 5	9 0 34	— 1 39.59	— 5 53.3	20. 8	8 51 46.29	9.053_n	+ 15 19 13.1	0.647	+ 2.51 — 4.4	6
» 6	8 45 59	+ 0 23.44	— 9 31.7	20. 8	8 51 14.32	9.117_n	+ 15 22 13.5	0.648	+ 2.49 — 4.2	7
» 6	8 45 59	— 0 49.72	— 3 28.9	20. 8	8 51 14.56	9.117_n	+ 15 22 10.4	0.648	+ 2.50 — 4.3	5
				(313) *Chaldaea.*						
Marzo 11	9 27 18	+ 1 0.23	+ 12 53.8	20. 8	9 25 28.08	8.903_n	+ 6 46 9.8	0.738	+ 2.40 — 8.0	8
» 11	9 27 18	— 1 48.24	+ 10 27.5	20. 8	9 25 27.94	8.903_n	+ 6 46 12.2	0.738	+ 2.41 — 8.2	9
» 12	8 51 4	+ 1 21.66	+ 5 0.1	20.10	9 25 11.69	9.134_n	+ 6 58 23.2	0.738	+ 2.40 — 7.9	10
» 14	10 29 31	— 0 18.59	— 12 5.3	20. 8	9 24 42.76	8.742	+ 7 23 45.6	0.731	+ 2.41 — 7.9	11
» 15	9 37 1	+ 1 59.54	+ 2 32.6	20.12	9 24 32.64	8.515_n	+ 7 35 13.1	0.729	+ 2.39 — 7.8	12
» 15	9 37 1	— 0 28.80	— 0 33.1	20.12	9 24 32.54	8.515_n	+ 7 35 17.8	0.729	+ 2.40 — 7.9	11

Data		T. m. Padova	Δα	Δδ	Cfr.	α app.	log. p. Δ	δ app.	log. p. Δ	Red. ad l. app.	★
						(128) *Nemesis.*					
1915		h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		s ″	
Marzo	12	10 3 39	+1 29.06	— 5 45.2	20.10	10 51 57.63	9.219_n	+17 11 46.4	0.630	+2.72 —12.0	13
"	14	11 43 46	+1 31.19	— 5 28.2	18. 8	10 50 15.86	8.562	+17 20 6.4	0.613	+2.73 —11.8	14
"	14	11 43 46	—0 12.72	+ 2 33.3	18. 8	10 50 15.86	8.562	+17 20 5.0	0.613	+2.73 —11.9	13
"	15	10 53 12	+0 44.72	— 1 50.3	20. 8	10 49 29.39	8.699_n	+17 23 44.3	0.613	+2.73 —11.8	14
"	15	10 53 12	—0 59.18	+ 6 11.5	20. 8	10 49 29.40	8.699_n	+17 23 43.2	0.613	+2.73 —11.9	13
"	16	10 18 17	—0 2.03	+ 1 42.8	20. 8	10 48 42.64	9.025_n	+17 27 17.5	0.618	+2.73 —11.7	14
"	16	10 18 17	—1 45.91	+ 9 44.8	20. 8	10 48 42.67	9.025_n	+17 27 16.6	0.618	+2.73 —11.8	13
						(48) *Doris.*					
Marzo	21	9 31 39	+1 58.97	— 7 45.6	20.10	10 47 57.44	9.166_n	+ 4 38 1.8	0.759	+2.52 —12.9	15
"	21	9 31 39	—0 27.13	— 3 41.7	20.10	10 47 57.05	9.166_n	+ 4 38 0.5	0.759	+2.52 —13.1	16
"	22	9 20 47	+1 22.73	— 1 49.4	20. 8	10 47 21.20	9.197_n	+ 4 43 58.0	0.758	+2.52 —12.9	15
"	22	9 20 47	—1 3.24	+ 2 14.8	20. 8	10 47 20.94	9.197_n	+ 4 43 57.0	0.758	+2.52 —13.1	16
						(29) *Amphitrite.*					
Marzo	21	10 26 58	—0 55.24	+16 17.0	20.10	11 13 22.42	8.978_n	+ 5 51 13.8	0.747	+2.57 —14.3	17
"	21	10 26 58	—1 13.05	+ 5 55.5	20.10	11 13 22.37	8.978_n	+ 5 51 12.4	0.747	+2.57 —14.3	18
"	22	10 23 27	+1 36.06	— 0 39.5	20.10	11 12 29.19	8.968_n	+ 5 54 10.2	0.747	+2.57 —14.1	19
"	22	10 23 27	+0 58.20	—10 35.2	20.10	11 12 28.98	8.968_n	+ 5 54 11.8	0.747	+2.57 —14.1	20
Aprile	25	9 50 6	—1 27.50	— 4 40.7	20.10	10 54 12.44	9.078	+ 6 28 19.9	0.742	+2.38 —12.4	21
"	25	9 50 6	—2 10.42	— 4 59.9	20.10	10 54 12.46	9.078	+ 6 28 17.5	0.742	+2.38 —12.4	22
						(113) *Amalthea.*					
Aprile	14	10 18 52	—0 18.89	+ 1 19.8	20.10	12 14 35.85	8.703_n	+ 7 29 44.6	0.730	+2.69 —16.3	23
"	14	10 18 52	—0 32.36	+ 2 10.6	20.10	12 14 35.95	8.703_n	+ 7 29 44.3	0.730	+2.69 —16.3	24
"	15	8 57 25	+0 19.58	+ 1 15.7	20.10	12 13 57.13	9.265_n	+ 7 33 17.2	0.736	+2.68 —16.2	25
"	15	8 57 25	—0 57.54	+ 4 53.2	20.10	12 13 57.20	9.265_n	+ 7 33 18.1	0.736	+2.69 —16.2	23

Data	T. m. Padova	Δα	Δδ	Cfr.	α app.	log. p. Δ	δ app.	log. p. Δ	Red. ad l. app.	★
					(108) *Hecuba.*					
1915	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		s ″	
Aprile 14	11 12 26	−0 35.00	+2 40.9	20. 8	12 20 22.30	8.558	−4 39 41.0	0.826	+2.59 −18.0	26
" 14	11 12 26	−0 39.58	+5 4.4	20. 8	12 20 22.42	8.558	−4 39 40.1	0.826	+2.59 −18.0	27
" 15	9 55 28	+0 48.52	−6 14.2	18.10	12 19 44.13	8.972_n	−4 36 40.8	0.825	+2.59 −17.9	28
" 15	9 55 28	−1 12.81	+5 41.6	18.10	12 19 44.49	8.972_n	−4 36 40.3	0.825	+2.59 −18.0	26
					(11) *Parthenope.*					
Maggio 2	10 29 15	+0 14.69	−0 45.5	18.10	12 41 59.29	8.672	+3 2 35.4	0.769	+2.69 −17.0	29
" 2	10 29 15	+0 1.89	+7 5.9	18.10	12 41 59.58	8.672	+3 2 33.7	0.769	+2.69 −17.0	30
					(704) *Interamnia.*					
Agosto 13	12 38 43	+1 33.19	+0 6.8	18.10	22 28 0.82	8.647_n	+13 54 1.4	0.660	+3.71 +17.8	31
" 13	12 38 43	−0 42.63	+7 56.9	18.10	22 28 0.87	8.647_n	+13 54 1.8	0.660	+3.71 +17.9	32
Ottobre 16	9 51 37	+0 24.23	−3 48.0	18.12	21 49 28.89	9.246	+11 16 10.6	0.700	+3.59 +23.9	33
" 16	9 51 37	+0 9.19	+1 45.4	18.12	21 49 28.79	9.246	+11 16 11.7	0.700	+3.60 +23.9	34
" 17	7 41 28	+0 27.68	−8 10.3	18.10	21 49 32.33	8.698_n	+11 11 48.4	0.691	+3.58 +24.0	33
" 17	7 41 28	+0 12.63	−2 38.6	18.10	21 49 32.21	8.698_n	+11 11 47.8	0.691	+3.58 +24.0	34
" 19	7 22 24	+0 24.43	−11 59.8	18.10	21 49 43.99	8.849_n	+11 2 26.6	0.694	+3.56 +24.0	34
" 19	7 22 24	−0 0.43	+0 6.8	18.10	21 49 44.01	8.849_n	+11 2 26.8	0.694	+3.57 +24.0	35
" 21	7 51 1	+0 18.19	−9 5.8	24.10	21 50 2.60	7.658_n	+10 53 14.2	0.694	+3.54 +24.0	35
" 21	7 51 1	−0 3.17	+0 57.1	24.10	21 50 2.71	7.658_n	+10 53 16.0	0.694	+3.55 +24.0	36
Novembre 6	9 45 8	+0 3.22	−1 15.1	24.10	21 56 14.28	9.450	+9 54 20.7	0.729	+3.38 +24.2	37
" 7	6 46 18	+0 34.53	−3 36.0	12.10	21 56 45.59	8.110_n	+9 51 59.8	0.706	+3.38 +24.2	37
" 7	6 46 18	−1 50.76	−10 23.8	12.10	21 56 45.45	8.110_n	+9 51 60.0	0.706	+3.39 +24.4	38

DATA	T. m. Padova	Δα	Δδ	Cfr.	α app.	log. p. Δ	δ app.	log. p. Δ	Red. ad l. app.	★
				(354) *Eleonora.*						
1915	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		s ″	
Novembre 11	11 33 24	+2 30.43	— 2 17.9	12 8	5 17 28.55	9.385$_n$	— 3 11 56.3	0.812	+4.43 +16.2	39
" 13	10 26 40	+0 1.54	+ 0 41.4	20.10	5 16 20.20	9.503$_n$	— 3 20 24.5	0.809	+4.45 +15.8	40
" 15	10 52 14	+1 3.81	+ 7 23.8	18.12	5 15 4.64	9.439$_n$	— 3 28 32.8	0.812	+4.50 +15.7	41
" 15	10 52 14	—1 10.30	+ 6 56.0	18.12	5 15 4.67	9.439$_n$	— 3 28 33.3	0.812	+4.49 +15.6	42
" 16	11 27 30	+0 23.30	+ 3 32.7	18.10	5 14 24.15	9.337$_n$	— 3 32 24.0	0.816	+4.52 +15.6	41
" 16	11 27 30	—1 50.76	+ 3 4.4	18.10	5 14 24.23	9.337$_n$	— 3 32 25.1	0.816	+4.51 +15.4	42
" 18	10 43 45	+0 58.02	— 4 56.7	18.12	5 13 2.83	9.428$_n$	— 3 39 19.7	0.814	+4.56 +15.5	43
" 18	10 43 45	—0 58.06	— 3 21.3	18.12	5 13 2.83	9.428$_n$	— 3 39 18.3	0.814	+4.56 +15.3	41
" 23	10 33 9	+0 31.18	— 0 33.1	24.10	5 9 18.32	9.398$_n$	— 3 53 22.2	0.815	+4.65 +15.0	44
" 26	11 31 56	+1 22.66	+ 2 23.1	18.12	5 6 50.00	9.128$_n$	— 3 59 20.2	0.820	+4.71 +14.9	45
" 26	11 31 56	+0 49.10	— 2 3.9	18.12	5 6 49.90	9.128$_n$	— 3 59 21.2	0.820	+4.71 +14.8	46
" 28	10 30 22	—0 16.76	— 0 22.4	24.10	5 5 10.61	9.340$_n$	— 4 2 6.1	0.819	+4.74 +14.5	45
" 28	10 30 22	—0 50.19	— 4 49.5	24.10	5 5 10.64	9.340$_n$	— 4 2 7.1	0.819	+4.74 +14.5	46
Dicembre 14	8 45 29	+0 39.55	+ 1 23.6	24.12	4 50 52.51	9.414$_n$	— 3 48 48.0	0.815	+4.94 +13.4	47
1916										
Gennaio 9	10 24 54	+2 16.77	— 4 27.0	18.10	4 32 23.59	9.061	— 1 15 9.6	0.804	+1.96 + 4.4	48
" 9	10 24 54	—0 55.74	+ 0 18.7	18.10	4 32 23.49	9.061	— 1 15 9.4	0.804	+1.97 + 4.4	49
" 10	8 33 49	—1 39.43	— 5 46.0	18.12	4 31 59.69	8.878$_n$	— 1 7 21.6	0.803	+1.97 + 4.3	50
" 10	8 33 49	—2 3.63	+ 2 13.7	18.12	4 31 59.74	8.878$_n$	— 1 7 19.6	0.803	+1.97 + 4.3	51
" 14	8 50 57	—0 9.48	— 2 24.0	18.12	4 30 32.11	8.143$_n$	— 0 31 59.0	0.798	+1.94 + 4.1	52
" 14	8 50 57	—1 42.42	— 3 3.0	18.12	4 30 32.19	8.143$_n$	— 0 31 58.8	0.798	+1.95 + 4.0	53
" 19	10 20 12	+0 23.61	— 1 33.6	18.10	4 29 17.98	9.252	+ 0 15 21.8	0.793	+1.91 + 3.8	54
" 19	10 20 12	—0 24.70	+ 5 18.5	18.10	4 29 17.95	9.252	+ 0 15 24.9	0.793	+1.91 + 3.8	55
" 29	8 3 17	+1 34.18	— 5 18.4	18.10	4 28 53.84	7.974	+ 1 54 13.4	0.779	+1.81 + 3.5	56
" 30	8 29 12	+1 40.54	+ 5 10.5	18.10	4 29 0.19	8.798	+ 2 4 42.3	0.778	+1.80 + 3.5	56
Febbraio 2	7 54 59	+2 29.77	+ 1 29.1	18.10	4 29 28.63	8.338	+ 2 35 37.6	0.774	+1.77 + 3.5	57
" 2	7 54 59	—0 29.24	+ 1 24.6	18.10	4 29 28.71	8.338	+ 2 35 36.7	0.774	+1.79 + 3.4	58
" 5	7 57 56	+2 50.86	— 1 20.9	18.12	4 30 11.78	8.673	+ 3 6 58.6	0.769	+1.74 + 3.4	59
" 6	7 41 11	+1 5.26	+ 0 59.0	18.12	4 30 29.02	8.372	+ 3 17 22.7	0.768	+1.74 + 3.4	60
" 6	7 41 11	—1 50.90	— 3 38.6	18.12	4 30 28.92	8.372	+ 3 17 23.5	0.768	+1.75 + 3.3	61
" 21	9 58 32	—0 6.57	+ 6 10.3	24.10	4 37 49.99	9.505	+ 5 55 35.4	0.762	+1.59 + 3.3	62

Luoghi medî delle stelle di confronto.

★	α 1915.0 h	m	s	δ 1915.0 °	′	″	Autorità
1	4	39	20.31	+ 20	46	48.9	Berl B 1511
2	4	41	15.87	+ 21	0	40 1	" 1516
3	4	42	18.90	+ 21	8	39.4	" 1523
4	4	43	40.85	+ 21	9	59 2	" 1531
5	8	52	1.78	+ 15	25	43.6	Berl A 3598
6	8	53	23.37	+ 15	25	10 8	Bord ph II A. 83 * 63; III A. 84 * 52
7	8	50	48 39	+ 15	31	49.4	" " * 242 " * 25
8	9	24	25.45	+ 6	33	24 0	Lpz II 5139
9	9	27	13.77	+ 6	35	52.9	" 5152
10	9	23	47.63	+ 6	53	31.0	" 5131
11	9	24	58.94	+ 7	35	58.8	" 5143
12	9	22	30.71	+ 7	32	48.3	" 5122
13	10	50	25 85	+ 17	17	43.6	Berl A 4298
14	10	48	41 94	+ 17	25	46.4	" 4289
15	10	45	55 95	+ 4	46	0.3	Alb 4144
16	10	48	21.66	+ 4	41	55.3	Kü 4819
17	11	14	15 09	+ 5	35	11.1	Lpz II 5760
18	11	14	32.85	+ 5	45	3[illegible].2	" 5761
19	11	10	50 56	+ 5	55	3.8	" 5743
20	11	11	28 21	+ 6	5	1.1	" 5750
21	10	55	37.56	+ 6	33	13 0	Kü 4872
22	10	56	20.50	+ 6	33	29 8	Boss PGC 2928
23	12	14	52.05	+ 7	28	41 1	Lpz II 6078
24	12	15	5.62	+ 7	27	50 0	" 6079
25	12	13	34.87	+ 7	32	17.7	" 6071
26	12	20	54.71	— 4	42	3.9	Strb 4579
27	12	20	59.41	— 4	44	26 5	" 4581
28	12	18	53.02	— 4	30	8.7	" 4570
29	12	41	41.91	+ 3	3	37.9	Alb 4563
30	12	41	55.00	+ 2	55	44.8	" 4564
31	22	26	23 92	+ 13	53	36.8	Lpz I 8984
32	22	28	39.79	+ 13	45	47.0	" 9000
33	21	49	1.07	+ 11	19	34.7	Tou_2 5858
34	21	49	16 00	+ 11	14	2.4	Kü 9691
35	21	49	40.87	+ 11	1	56.0	BD + 10° 4652 Equat. Pad.
36	21	50	2.33	+ 10	51	54.9	Tou_2 5864
37	21	56	7.68	+ 9	55	11.6	Lpz II 11059
38	21	58	32.82	+ 10	1	59.4	Kü 9765
39	5	14	53.69	— 3	9	54.6	Abb.dia oss. 4 Ep. 1913.1 m pr.
40	5	16	14.21	3	21	21 7	Strb 1505
41	5	13	56.33	— 3	36	12.3	Abb. oss. 2 Ep. 1913.1
42	5	16	10 48	— 3	35	44.9	" " 3 " "
43	5	12	0.25	— 3	34	38.5	" " 3 " "
44	5	8	42.49	— 3	53	4.1	Strb 1450
45	5	5	22.63	— 4	1	58.2	Abb. oss. 3 Ep. 1913.0
46	5	5	56.09	— 3	57	32.1	" " 1 " 1913.1
47	4	50	8.02	— 3	50	25.0	Strb 1307

*	α 1916.0	δ 1916.0	Autorità
48	4 30 4 86	— 1 10 47.0	Abb.dia oss. 5-6 Ep. 1909 6
49	4 33 17.26	— 1 15 32.5	" " 3 " 1909.4
50	4 33 37.15	— 1 1 39.9	" " 2 " 1910.3
51	4 34 1.40	— 1 9 37.6	" " 4 " 1909 6 m. pr.
52	4 30 39.65	— 0 29 39.1	" " 5 " 1910.2
53	4 32 12.66	— 0 28 59.8	" " 4 " 1910.8
54	4 28 52.46	+ 0 16 51.6	Alg ph V Cliché 49 * 3 Cl. 623 * 80
55	4 29 40.74	+ 0 10 2.6	" " V " 49 * 17
56	4 27 17 85	+ 1 59 28.3	Abb. oss. 5 Ep 1909.9
57	4 26 57.09	+ 2 34 5.0	Alb 1324
58	4 29 56.16	+ 2 34 8.7	Kü 1977
59	4 27 19 18	+ 3 8 16.1	Abb. oss. 4 Ep. 1909.1
60	4 29 22 02	+ 3 16 20.3	" " 4 " 1909.5
61	4 32 18.07	+ 3 20 58.8	" " 4 " 1908.5
62	4 37 54.97	+ 5 49 21.8	Tou, 718

* 35. — La posizione di questa stella, DB + 10°4652 9.m5, fu ottenuta da confronti da me eseguiti la sera del 23 ottobre 1915 con * 76, * 78 e Lpz I 8742.

* 39. — Moto proprio di Küstner in *Veröffentlichungen der Kgl. Sternw. zu Bonn, N°. 2*, * 60, $\mu_\alpha = +0^s.0450$ $\mu_\delta = +0''.15$.

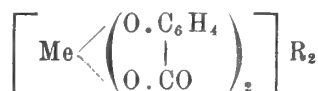
* 43. — Non fu preso in conto il moto proprio dato da Bossert in *Par 6065*, $\mu_\alpha = 0.0000$ $\mu_\delta = -0''.114$.

* 44. — In Strb vi è relativamente a questa stella, a piè di pagina, la nota «dupl.?». Essa fu da me veduta effettivamente doppia: la maggiore differisce in grandezza di assai poco dal compagno, è più boreale di circa 7″ e lo precede di così poco che i due astri sembrano quasi sullo stesso cerchio di declinazione. Questa doppia non esiste in *βGC*.

* 51. — Fu preso in conto il valore approssimato del moto proprio in declinazione $\mu_\delta = -0''.10$ ottenuto dai valori di questa coordinata ricavati da *Kli 800, Cb 1261, Nic 1035, Alg ph oss. 2 Ep. 1907.1* e da *Abbadia*.

Chimica. — *« Sali interni » dell'osmio esavalente, del cobalto e del nickel con l'acido salicilico* [1]. Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

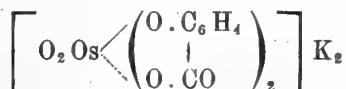
I sali complessi che varî metalli pesanti formano, in soluzione alcalina, con l'acido tartarico e con l'acido salicilico, furono da me interpretati [2], mediante la teoria della coordinazione, come « sali interni ». La costituzione dei cupro-, pallado-, vanadil- salicilati, venne rappresentata con la formula generale

$$\left[Me \left(\begin{matrix} O . C_6H_4 \\ | \\ O . CO \end{matrix} \right)_2 \right] R_2$$

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale dell'Università di Ferrara.

[2] G. A. Barbieri, Rendiconti Accad. Lincei, XXIII, 2° sem., 47-408 (1914); XXIV, 1° sem., 605 (1915).

A questa formula corrispondono anche i salicilati complessi di osmile, di cobalto e di nickel descritti nella presente Nota.

Osmil-salicilato di potassio

$$\left[O_2 Os \left\langle \begin{pmatrix} O \cdot C_6H_4 \\ | \\ O \cdot CO \end{pmatrix}_2 \right.\right] K_2$$

In 10 cc. di acqua si sciolsero gr. 9 di salicilato potassico, poi si aggiunsero gr. 2 di osmiato potassico, preparato riducendo con alcool una soluzione di tetrossido di osmio e potassa caustica. Una parte dell'osmiato subito si sciolse, con colorazione rosso-bruna; il resto passò in soluzione soltanto aggiungendo al liquido, ch'era diventato fortemente alcalino, acido salicilico, in sostanza, fino a reazione neutra. Dopo alcuni minuti, cominciarono a depositarsi cristalli aghiformi rosso-bruni, lucenti. Essi vennero separati per filtrazione alla pompa, lavati ripetutamente con alcool metilico, e in fine seccati nel vuoto su anidride fosforica.

All'analisi qualitativa mostrarono di contenere osmio, acido salicilico e potassio.

La determinazione quantitativa dell'osmio, che è sempre un'operazione molto delicata, causa l'estrema tendenza che ha questo elemento ad ossidarsi all'aria e a volatilizzare come OsO_4, è particolarmente difficile in presenza di sostanze organiche.

Dopo varî tentativi di dosare l'osmio, precipitandolo da soluzioni acquose con sali di idrazina, con solfato ferroso, con alluminio, ho trovato conveniente operare nel modo che segue.

La sostanza, pesata in una navicella di porcellana, venne introdotta in una canna di vetro infusibile, nella quale si fece passare, prima, una corrente di idrogeno purissimo del tutto esente da ossigeno; poi, insieme con l'idrogeno, una corrente di acido cloridrico gazoso. Per azione dell'acido cloridrico, la sostanza dapprima annerì: poi, mentre si scaldava gradatamente il tubo in corrispondenza della navicella, cedette, sotto forma di fumi bianchi, tutto il suo acido salicilico, che andò a depositarsi nelle parti fredde della canna.

Terminata la sublimazione dell'acido salicilico, si scacciò l'idrogeno e l'acido cloridrico con una corrente di anidride carbonica; si lasciò raffreddare la canna in corrente di questo gas, poi, dopo pesata la navicella, se ne esaurì il contenuto (osmio metallico e cloruro potassico) con acqua. L'osmio venne raccolto sopra due filtri sovrapposti e di peso eguale: nel filtrato si dosò il potassio. I filtri con l'osmio vennero seccati nel vuoto su anidride fosforica, poi si pesò l'osmio, insieme col filtro interno, mettendo come tara, sull'altro piatto della bilancia, il filtro esterno.

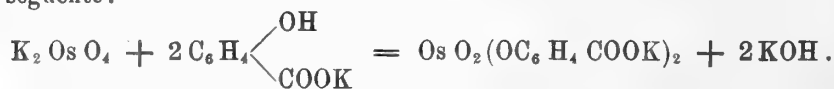
Il carbonio venne dosato nel composto mediante la combustione. Fu necessario d'impedire che il tetrossido di osmio, che si forma nell'ossidazione del composto e che è molto volatile, andasse a finire negli apparecchi a potassa. A tal uopo venne interposto tra la canna da combustione e gli apparecchi di assorbimento un tubo a pomice imbevuta di una soluzione di solfato di idrazina. È evidente che con tale disposizione non si potè dosare l'idrogeno. Il dosamento dell'idrogeno in una sostanza organica contenente osmio è un problema analitico che non è stato ancora risolto ([1]). Del resto, nel nostro caso speciale, il dosamento dell'idrogeno non aveva molto interesse. perchè la sostanza organica (acido salicilico), contenuta nel composto, era di composizione nota.

gr. 0,3618 di sostanza, scaldati in corrente di idrogeno e acido cloridrico, diedero gr. 0,2219 di residuo (Os + KCl); poi gr. 0,1204 di osmio, e gr. 0,1090 di K_2SO_4.
gr. 0,3033 di sostanza diedero gr. 0,3218 di CO_2.

	Trovato	Calcolato per $Os\,O_2(OC_6H_4COOK)_2$
Os + KCl	61,32	61,07
Os	33,28	33,31
K	13,51	13,64
C	28,94	29,31

Che si tratti realmente di un composto dell'osmio esavalente, è facile dimostrare, trattandolo con una soluzione concentrata di potassa caustica, che lo trasforma in osmiato potassico riconoscibile dai caratteristici cristalli roseo-violetti.

La reazione che conduce alla formazione dell'osmilsalicilato potassico è la seguente:

$$K_2OsO_4 + 2\,C_6H_4\left\langle\begin{matrix}OH\\COOK\end{matrix}\right. = Os\,O_2(OC_6H_4COOK)_2 + 2\,KOH.$$

La reazione non è quantitativa, perchè, come è detto più sopra, la potassa caustica, che si libera, dà origine alla reazione inversa. Aggiungendo acido salicilico, o anche acido acetico, la potassa caustica viene salificata, e tutto l'osmiato si trasforma nel composto complesso.

L'osmil-salicilato di potassio si scioglie in acqua senza decomporsi. Dalle sue soluzioni acquose concentrate cristallizza inalterato, per aggiunta di un eccesso di un sale di potassio molto solubile, per esempio l'acetato. Se, invece di un sale di potassio, si aggiunge un sale di ammonio, o di rubidio, o di cesio, precipitano i rispettivi osmil-salicilati.

([1]) C. Paal e C, Amberger, Berichte, *40*, 1395 (1907).

Queste reazioni provano che il composto è realmente un sale alcalino di un acido osmil-salicilico.

La tendenza del radicale osmilico $Os\,O_2$ a formare, con residui acidi (Cl, Br, NO_2, C_2O_4) anioni complessi, è già nota per le ricerche di Vèzes (¹) e di Wintrebert (²).

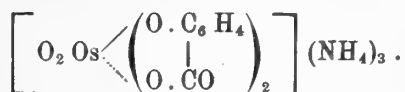
L'osmil-salicilato di potassio si avvicina in special modo all'osmil-ossalato di potassio

$$\left[O_2\,Os\left\langle\begin{pmatrix}O.C_6H_4\\ |\\ O.CO\end{pmatrix}_2\right]K_2 \qquad \left[O_2\,Os\left\langle\begin{pmatrix}O.CO\\ |\\ O.CO\end{pmatrix}_2\right]K_2$$

e ciò conferma l'analogia di costituzione tra ossalati e salicilati complessi, messa da me in evidenza nelle Note su citate.

L'osmil-salicilato di potassio, allo stato solido, è abbastanza stabile all'aria e alla luce. In soluzione acquosa si decompone facilmente, specie a caldo, depositando biossido idrato di osmio, e dando un liquido verde. Dall'acido cloridrico concentrato viene trasformato, all'ebullizione, in un bel sale cristallizzato in ottaedri di color rosso rubino, che all'analisi risultò essere cloroosmiato potassico K_2OsCl_6. (Trovato Os 39,66 %; K 16,16 %. Calcolato Os 39,63 %: K 16,23 %).

Osmil-salicilato di ammonio

$$\left[O_2\,Os\left\langle\begin{pmatrix}O.C_6H_4\\ |\\ O.CO\end{pmatrix}_2\right](NH_4)_3 .$$

Se ad una soluzione concentrata di osmiato sodico si aggiunge salicilato di sodio e acido salicilico sino a reazione neutra, si ottiene un liquido rosso-bruno dal quale non si deposita alcun prodotto. Se ad esso si aggiunge cloruro di ammonio, in soluzione concentrata o in sostanza, si ha tosto formazione di una sostanza cristallizzata in aghi rosso-bruni che contengono osmio, acido salicilico e ammoniaca.

gr. 0,3658 di sostanza, scaldati in corrente di idrogeno e acido cloridrico gazoso, diedero gr. 0,1336 di osmio.

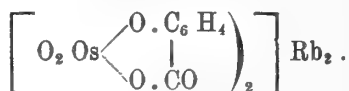
gr. 0,5018 di sostanza, previa eliminazione dell'osmio con solfato ferroso, diedero, per trattamento con soda caustica, ammoniaca che neutralizzò cc. 18,5 di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido solforico.

(¹) Bulletin Société Chim., XXVII, 569 (1899).
(²) Ann. Chim. Phys. [7] XXVIII, 15 (1903).

	Trovato	Calcolato per $Os\,O_2\,(OC_6\,H_4\,COON\,H_4)_2$
Os	36,53	36,79
N	5,16	5,27

L'osmil-salicilato di ammonio rassomiglia, nell'aspetto e nelle proprietà, all'osmil-salicilato di potassio. È soltanto molto più solubile in alcool.

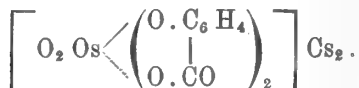
Osmil-salicilato di rubidio

$$\left[O_2\,Os\left\langle\begin{matrix}O\,.\,C_6\,H_4\\ |\\ O\,.\,CO\end{matrix}\right)_2\right]Rb_2\,.$$

Una soluzione concentrata di osmil-salicilato di sodio, preparata come si è detto sopra, addizionata ad una soluzione concentrata di cloruro di rubidio, si rapprende, dopo alcuni minuti, in una melma cristallina, che contiene aghi microscopici, trasparenti, rosso-bruni. Il prodotto, spremuto alla pompa, lavato con alcool e seccato nel vuoto su anidride fosforica, diede all'analisi i seguenti risultati:

gr. 0,4235 di sostanza diedero gr. 0,1225 di osmio e gr. 0,1549 di Rb Cl (determinati nella soluzione neutra col metodo di Mohr).

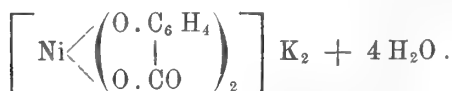
	Trovato	Calcolato per $Os\,O_2\,(OC_6\,H_4\,COO\,Rb)_2$
Os	28,93	28,66
Rb	25,86	25,67

Osmil-salicilato di cesio

$$\left[O_2\,Os\left\langle\begin{matrix}O\,.\,C_6\,H_4\\ |\\ O\,.\,CO\end{matrix}\right)_2\right]Cs_2\,.$$

Si prepara dall'osmil-salicilato di sodio con cloruro di cesio. Cristalli aghiformi rosso-bruni.

gr. 0,2934 di sostanza diedero gr. 0,0730 di osmio e gr. 0,1382 di solfato di cesio.

	Trovato	Calcolato per
Os	24,91	25,10
Cs	34,58	34,92

Nickelo-salicilato di potassio

$$\left[Ni\left\langle\begin{matrix}O\,.\,C_6\,H_4\\ |\\ O\,.\,CO\end{matrix}\right)_2\right]K_2 + 4\,H_2O\,.$$

Gr. 20 di acido salicilico vennero sciolti in 50 cc. di una soluzione al 30 °/₀ di potassa caustica; poi si aggiunsero, a poco a poco e agitando,

gr. 5 di acetato di nickel, sciolti in 20 cc. di acqua: tosto precipitò una polvere verde azzurra, che, dopo circa un quarto d'ora, venne separata per filtrazione alla pompa, lavata più volte con alcool, nel quale è praticamente insolubile, e infine seccata su carta da filtro. Esaminata al microscopio, con forte ingrandimento, essa appare costituita da minutissimi cristalli.

Per ottenere lo stesso prodotto in cristalli ben formati, si scioglie la polvere in acqua, in presenza di acido salicilico (circa 6 gr. di acido salicilico per 10 gr. di polvere secca); si filtra, e al liquido verde, che contiene salicilato di nickel e salicilato di potassio, si aggiunge una soluzione concentrata di potassa caustica. Precipita subito lo stesso prodotto di prima, ma in cristalli laminari che ricordano quelli del cupri-salicilato di potassio.

Per dosare il nickel in questo composto, dapprima lo si calcinò fortemente per eliminare tutta la sostanza organica: si esaurì con acqua il residuo, fino a scomparsa della reazione alcalina nel filtrato: l'ossido di nickel, così ottenuto, venne calcinato e ridotto in corrente di idrogeno, poi sottoposto a nuovo lavaggio e a nuova riduzione.

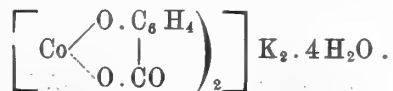
gr. 0,9760 di sostanza diedero gr. 0,1177 di nickel e gr. 0,3550 di solfato potassico,

gr. 0,2130 di sostanza, bruciati con bicromato, diedero gr. 0,2762 di CO_2 e gr. 0,0651 di acqua.

	Trovato	Calcolato per $Ni(OC_6H_4COOK)_2$
Ni	12,06	12,20
K	16,32	16,26
C	35,36	34,93
H	3,42	3,35

Il nickelo-salicilato di potassio è pochissimo solubile in acqua: la soluzione assume tosto reazione alcalina, e finisce col depositare un sale basico amorfo. Non è quindi possibile di eseguire, con questo composto, le reazioni di doppio scambio descritte per i cupri-, i pallado- e gli osmil-salicilati. Tuttavia, data l'analogia di composizione che esiste tra il nickelo-salicilato potassico $Ni(OC_6H_4COOK)_2 . 4H_2O$ e il cupri-salicilato potassico $Cu(OC_6H_4COOK)_2 . 4H_2O$, è naturale di attribuire al primo la costituzione che fu possibile di dimostrare per quest'ultimo.

Cobalto-salicilato di potassio

$$\left[Co \left(\begin{matrix} O . C_6H_4 \\ | \\ O . CO \end{matrix} \right)_2 \right] K_2 . 4H_2O .$$

Gr. 20 di acido salicilico vennero sciolti in 50 cc. di una soluzione al 30 % di potassa caustica; poi si aggiunse, a poco a poco e agitando,

una soluzione di acetato di cobalto (gr. 5 in 20 cc. di acqua). Il liquido, dapprima rosso-violaceo, diventa rapidamente giallastro, mentre si separa una polvere cristallina rosea, costituita da squamette microscopiche trasparenti.

L'analisi che venne eseguita, come fu detto per il composto di nickel, diede i seguenti risultati:

gr. 0,8523 di sostanza diedero gr. 0,1021 di cobalto e gr. 0,3029 di K_2SO_4.
gr. 0,2342 di sostanza, bruciati con bicromato, diedero gr. 0,3019 di CO_2 e gr. 0,718 di H_2O.

	Trovato	Calcolato per $Co(OC_6H_4COOK)_2 . 4H_2O$
Co	11,97	12,25
K	15,90	16,25
C	35,16	34,90
H	3,43	3,35

Il cobalto-salicilato di potassio è pochissimo solubile in acqua, dalla quale viene decomposto come il sale di nickel.

Mineralogia. — *Sopra la cosiddetta roccia a thulite e piro-sclerite di Campo a Peri nell'isola d'Elba* (1). Nota del dott. PROBO COMUCCI, presentata dal Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH (2).

Ho intrapreso lo studio della cosiddetta thulite elbana, minerale compatto di color roseo che fa parte di una roccia eufotidica metamorfosata, risultante inoltre di grosse lamine di diallagio a splendore submetallico e talvolta trasformate in materiale di un verde più intenso, indicato fino ad ora con il nome, datogli da Kobell, di pirosclerite (3).

Fu il Roster che riferì alla thulite il minerale roseo di questa roccia eufotidica, ma in base soltanto ad osservazioni macroscopiche (4).

Il materiale proviene da Campo ai Peri sulle pendici orientali del gruppo dell'Orello, il quale è costituito, come è noto (5), da una massa diabasica

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di mineralogia del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1916.

(3) Kobell, Journ. pr. Chem., 1843, *2*, pag. 53. — D'Achiardi, *Min. della Toscana*, pag. 225

(4) Roster, *Note di mineralogia dell'Isola Elba*. Parte I, pag. 43.

(5) Aloisi, *Rocce del M. Orello*. Atti Soc. Tosc., nuova serie, XXIII, pag. 154.

eocenica, che riposa sulle serpentine; in alcuni luoghi, fra le due formazioni, si hanno lenti di eufotide.

L'analisi della parte rosea diede i seguenti resultati:

H_2O	3,26
SiO_2	37,81
TiO_2	0,11
Al_2O_3	29,51
Fe_2O_3	1,86
MnO	0,41
CaO	27,97
Na_2O	2,29
K_2O	0,41
	100,63

Si tratta dunque di uno o più silicati calcico-alluminiferi idrati, con piccole quantità di ferro, manganese, di metalli alcalini e di titanio. La quantità del ferro non è costante, come potei constatare con saggi quantitativi.

I dati analitici potrebbero corrispondere a quelli di una zoisite, non però tipica ma manganesifera e titanifera e con quantitativo non trascurabile di basi alcaline e in specie di Na_2O, simile, dal lato chimico, a quella varietà rossa, detta thulite, di Souland in Telemarken, analizzata dal Gmelin (1). Ma l'esame microscopico mostra che la porzione rosea della roccia consta non di sola zoisite, ma di una intima miscela di tal minerale con clinozoisite ed epidoto poco ferrifero.

La zoisite è caratterizzata da grossi e lunghi prismi non terminati alle estremità, con nette tracce di sfaldatura (010), estinzione retta e birifrazione bassissima.

Frequenti sono i geminati polisintetici simili a quelli dei plagioclasii con geminazione albitica, corrispondenti in tutto ai cristalli effigiati dal Lacroix (2). Il pleocroismo manca affatto, al contrario di quello che avviene nella tipica thulite. Talvolta i prismi assumono struttura fascicolare o ventagliforme.

Le osservazioni a luce convergente, per quanto ripetute più volte, non furono sufficienti a stabilire se si tratta di zoisite α o zoisite β, e ciò perchè mai mi fu dato di imbattermi in sezioni chiaramente normali ad una bisettrice.

(1) Gmelin, Pogg. Ann., *49*, 539.

(2) Lacroix, *Min. de la France*, I, pag. 129.

Non meno numerosi sono i cristalli con lo stesso aspetto e con birifrazione appena maggiore ma che non presentano estinzione retta. Essi sono riferibili alla clinozoisite [1], alla quale specie pure appartengono altre lamine nelle quali, a causa della forte dispersione delle bisettrici, non si ha mai perfetta estinzione. L'epidoto, pure assai abbondante, si presenta in lunghi prismi, in cristalli tozzi a contorni ben definiti: si riconosce dalla birifrazione forte, ma variabile anche in una stessa lamina. Deve trattarsi, in ogni modo di varietà poco ferrifera perchè sempre incoloro o debolissimamente giallo con pleocroismo quasi insensibile; ciò che del resto è confermato dall'analisi.

Alcuni cristalli di epidoto hanno, non molto marcata, una struttura zonale, passando all'esterno a porzioni di clinozoisite e talvolta a zoisite. In alcuni punti della sezione i tre minerali surricordati si associano per dare origine ad una minuta e confusa miscela granulare.

In ogni caso, zoisite clinozoisite ed epidoto ci rappresentano il prodotto ultimo della trasformazione del feldispato basico calcico-sodico, costituente originariamente l'eufotide; di tale plagioclasio non si ha più alcuna traccia nella roccia; e nemmeno vi si rinviene feldispato di nuova formazione di tipo acido o addirittura albitico, quale si riscontra in abbondanza nelle rocce verdi metamorfiche, ad esempio nelle prasiniti, provenienti dal dinamometamorfismo di rocce gabbrico-diabasiche.

Il Diallagio è talvolta ben conservato, come può vedersi anche macroscopicamente. In tal caso presenta le caratteristiche tracce di pseudosfaldatura (100), rifrazione e birifrazione elevate, estinzione obliqua con angolo oscillante intorno ai 40° per $c:c$; ma i suoi cristalli, per forti azioni meccaniche subite, mostrano contorsioni rotture, ed offrono spesso estinzione ondulata.

Di frequente è fortemente alterato, e la trasformazione conduce ad un notevole intorbidamento e sembra aver dato luogo a delle lamine di clinocloro che ad esso diallagio talora si accompagnano.

Si tratta, per il clinocloro, di lamine verdi pallidissime e non sensibilmente pleocroiche, tagliate obliquamente sulla base con nette tracce di sfaldatura (001), con colore d'interferenza lavanda-chiaro e allungamento negativo.

Il clinocloro forma poi plaghe a sè, non connesse con cristalli di diallagio e tali plaghe, non piccole, consistono di elementi minuti con struttura fibrosa o fibroso-raggiata e mostrano notevole rassomiglianza con il serpentino antigoritico; ma il carattere negativo dell'allungamento delle fibre esclude tale minerale. A queste piccole concentrazioni di clinocloro sembrano

[1] Clinozoisite in cristalli della medesima località venne descritta da F. Millosevich (Rend. Acc. Lincei, 1913, 2° sem., 544).

dovute le porzioni di colore verde intenso che qua e là si osservano macroscopicamente nella roccia.

Se l'epidoto abbia in qualche caso relazione genetica con il diallagio, non può affermarsi sicuramente, ma nemmeno escludersi affatto, perchè si può notare per esempio un concrescimento fra epidoto e diallaggio e persino liste di epidoto incluse nelle lamine di pirosseno.

Risulterebbe dunque, dalle osservazioni fatte, che la piroscleritizzazione del diallagio sta in rapporto con una clorotizzazione del medesimo. Quanto poi alla parte rosea, essa non risulta, ripeto, di una sola specie mineralogica, ma di una miscela di minerali diversi, sebbene strettamente affini. Fra questi è contenuta realmente della zoisite, che ha in parte i caratteri chimici della thulite, attesa in special modo la presenza delle basi alcaline e del manganese, il quale ultimo però è in dosi molto più basse di quelle riscontrate nella thulite tipica.

Si tratta dunque di una forte trasformazione dell'eufodite, nella quale, come di consueto, l'originario Plagioclasio è totalmente scomparso e sostituito da elementi secondarî, mentre il pirosseno ha maggiormente resistito alle azioni decomponenti, per quanto, esso pure, assai alterato.

Chimica fisiologica. — *Sulle azioni enzimatiche del sangue riguardante il glicosio.* IV: *Proprietà enzimatiche del sangue di cane spancreatizzato, prima e dopo circolazione (con glicosio) nell'intestino dello stesso animale.* Nota del dott. U. Lombroso, presentata dal Socio L. Luciani [1].

Per varie ragioni ho creduto opportuno di eseguire alcune ricerche sulle attività enzimatiche del sangue di cane spancreatizzato, prima e dopo circolazione con glicosio nell'intestino dell'animale istesso. Anzitutto mi interessava d'indagare l'attività glicolitica del sangue di cane spancreatizzato, e ciò per chiarire una contraddizione che si dibatte fra gli autori precedenti che si sono occupati dell'argomento. In quanto che alcuni di essi [2] sostengono che il sangue del cane spancreatizzato perde ogni facoltà glicolitica; altri, invece [3], che questa si mantiene invariata.

Ora, mentre ai primi potevasi obbiettare che avevano per troppo poco tempo prolungata l'esperienza affinchè si compisse *in vitro* la glicolisi, ai secondi potevasi opporre che non avevano controllato se la diminuzione del

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1916.
[2] Edelmann, Biochemiche Zeitschrift, vol. XL, pag. 314 (1912).
[3] Macleod, Journal Biol. Chem., vol. XV, pag. 497 (1913).

potere riducente del sangue, da loro constatata, fosse dovuta ad una reale distruzione del glicosio, e non ad una sua condensazione.

Noi abbiamo visto che questo fenomeno si svolge nel sangue normale particolarmente nelle prime ore di esposizione al termostato; mentre la glicolisi vera si ottiene soltanto dopo una esposizione prolungata. Si rendeva quindi necessario di controllare le esperienze precedenti, avendo cura di sfuggire a quelle obbiezioni la cui importanza erasi rivelata nelle nostre ricerche.

Un'altra discussione, alla quale intendevo contribuire e che i precedenti ricercatori avevano sollevata, era quella che riguardava la capacità, da parte dell'intestino isolato di cane spancreatizzato, di utilizzare glicosio. Verzar e Krass [1] ricercando se l'intestino di cane spancreatizzato perde la capacità di consumare il glicosio sciolto in Tyrode, come avverrebbe secondo Macleod e Smedley [2] per il cuore, giunsero alla conclusione che esso continua ad utilizzare bene il glicosio.

Ora io avevo osservato che, esperimentando nel tessuto intestinale con liquido di Tyrode, il consumo di glicosio è minore di quando si esperimenta con sangue. Per giudicare quindi meglio quanto l'intestino di cane spancreatizzato sia capace di utilizzare glicosio, mi parve utile il controllare queste ricerche facendovi circolare il glicosio sciolto in sangue.

Ma ciò che più di tutto interessava nel corso delle presenti ricerche era l'indagare se, facendo circolare sangue di cane spancreatizzato nell'intestino dello stesso animale, si poteva ottenere l'enzima potentemente glicolitico che abbiamo visto sorgere nelle esperienze con animali normali. E ciò perchè molta luce potevasi raccogliere dai risultati, qualunque essi fossero.

Qualora, ad esempio, il risultato fosse stato negativo, sia con sangue diabetico sia con sangue normale, si poteva supporre che non l'intestino per la sua propria funzione avesse dato il risultato sopra descritto, ma bensì l'intestino in quanto viene continuamente rifornito di enzimi pancreatici (forse quegli stessi che continuamente vi giungono con la secrezione esterna e che si modificano opportunamente, durante il loro riassorbimento, per espletare i nuovi compiti).

Se invece si fosse ottenuta la genesi di un enzima glicolitico facendo circolare nell'intestino di cane spancreatizzato sangue normale, e non facendo circolare sangue diabetico, si poteva supporre che l'intestino agisse non in quanto elabori e riversi l'enzima stesso, ma semplicemente in quanto è capace di rilevare, di rendere attuale una proprietà enzimatica che nel sangue esiste allo stato potenziale.

(1) Biochemische Zeitscrift, vol. 66, pag. 49 (1914).
(2) Journal of Physiol., vol. 45, pag. 462 (1912).

Infine, se si fosse dimostrato che, anche usando sangue ed intestino di sangue spancreatizzato, si otteneva il manifestarsi dell'attivo enzima glicolitico, allora potevasi affermare che i risultati ottenuti con intestino di cane normale o spancreatizzato rappresentavano l'esponente di una reazione specifica dell'intestino stesso.

Le esperienze sinora eseguite sono tre; e tutte e tre furono praticate usando sangue ed intestino di cane spancreatizzato. I risultati ottenuti, pur lasciando àdito a varii quesiti complementari, ci esimono, come vedremo, dal proseguire le indagini con intestino normale e sangue diabetico, o con intestino diabetico e sangue normale.

Per i dosaggi e per le disposizioni sperimentali valgano gli avvertimenti dati nelle precedenti Note.

I. — Cane femmina, kgr. 7,600.

I-IV-1916, ore 15: estirpazione totale del pancreas. Il diabete è manifesto sin dalla mattina del giorno successivo. Urina quotidianamente eliminata da 200 a 400 cc., con una media giornaliera di glicosio di 25-35 gr. Alimentazione con carne di cavallo, gr. 500 al giorno.

Il giorno 8-IV pesa kgr. 5,250. Viene sacrificato per dissanguamento.

A 500 cc. sangue si aggiungono gr. 4 glicosio. Se ne fanno circolare cc. 400 in gr. 210 di intestino. Durata della circolazione ore 1 $^{1}/_{4}$. Pressione 50-110 mm. Hg.

Appena finita la circolazione	10 cc. sangue normale	. . . . . .	potere riducente	= 108 mgr. glicosio
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 113 » »
	10 cc. » circolato	. . . . . .	» »	= 101 » »
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 104 » »
Dopo 2 ore di permanenza in termostato	10 cc. sangue normale	. . . . . .	potere riducente	= 102 mgr. glicosio
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 112 » »
	10 cc. » circolato	. . . . . .	» »	= 98 » »
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 102 » »
Dopo 10 ore di permanenna in termostato	10 cc. sangue normale	. . . . . .	potere riducente	= 99 mgr. glicosio
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 114 » »
	10 cc. » circolato	. . . . . .	» »	= 90.2 » »
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 92 » »

II. — Cane maschio, kgr. 6,81.

9-V-1916, ore 12: estirpazione del pancreas.

10-11-12-13-V: orina complessiva cc. 1260 contenente gr. 98,4 glicosio complessionato.

13, ore 10. Dissanguamento (con aggiunta di liquido di Tyrode *in* circolo).

A 500 cc. sangue si aggiungono gr. 2,5 glicosio. Se ne fanno circolare cc. 400 in gr. 200 di intestino. Durata della circolazione ore 1. Pressione 80-110 mm. Hg.

Appena finita la circolazione	10 cc. sangue normale	. . . . . .	potere riducente	= 65.5 mgr. glicosio
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 68.6 » »
	10 cc. » circolato	. . . . . .	» »	= 55.8 » »
	10 cc. » »	bollito con HCl	» »	= 57 » »

Dopo 3 ore di permanenza in termostato	10 cc. sangue normale	potere riducente	= 62.5 mgr. glicosio
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 64.2 » »
	10 cc. » circolato	» »	= 52.4 » »
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 54.1 » »
Dopo 6 ore di permanenza in termostato	10 cc. sangue normale	potere riducente	= 57 mgr. glicosio
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 65 » »
	10 cc. » circolato	» »	= 31.9 » »
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 34.1 » »
Dopo 10 ore di permanenza in termostato	10 cc sangue normale	potere riducente	= 64.8 mgr. glicosio
	10 cc. » circolato	» »	= 32 » »
	Non si pratica l'idrolisi con HCl.		

III. — Cane maschio, kgr. 6,900.

Il 14-V 1916: estirpazione del pancreas.

15-16-17 orina complessiva cc. 890 contenente gr. 71 glicosio. Il 18 mattina viene ucciso per dissanguamento (pesa kgr. 5.050), con aggiunta di liquido di Tyrode in circolo. A 500 cc. sangue si aggiungono gr. 2.5 glicosio. Se ne fanno circolare cc. 400 in gr. 220 di intestino. Durata della circolazione ore 1 $^{1}/_{4}$. Pressione 80-110 mm. Hg.

Appena finita la circolazione	10 cc. sangue normale	potere riducente	= 66.2 mgr. glicosio
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 69.4 » »
	10 cc. » circolato	» »	= 50.1 » »
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 53.4 » »
Dopo 6 ore di permanenza in termostato	10 cc. sangue normale	potere riducente	= 64.5 mgr. glicosio
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 65.4 » »
	10 cc. » circolato	» »	= 28.6 mgr. glicosio
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 29.2 » »
Dopo 24 ore di permanenza in termostato	10 cc. sangue normale	potere riducente	= 53.8 mgr. glicosio
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 55.1 » »
	10 cc. » circolato	» »	= 20.4 » »
	10 cc. » » bollito con HCl	» »	= 21.3 » »

Dalle esperienze eseguite risulta che:

1°) il sangue di cane spancreatizzato dimostra di possedere un potere sintetizzante, di fronte al glicosio, presso a poco eguale a quello di sangue normale. Più o meno profondamente diminuito, ma non scomparso, appare l'enzima glicolitico. È importante a questo proposito l'osservare che l'esperienza nella quale si usò il sangue di cane da più tempo spancreatizzato non fu quella nella quale si avvertì la maggiore diminuzione del potere glicolitico;

2°) il consumo del glicosio sciolto in sangue diabetico, da parte dell'intestino dello stesso animale, è notevolmente minore di quello avvertito per opera di un intestino normale, in un eguale lasso di tempo. Minimo fu il consumo del glicosio nell'esperienza praticata con intestino di cane da più lungo tempo spancreatizzato: maggiore, senza però raggiungere la misura del normale, nelle altre due esperienze;

3°) il sangue di cane spancreatizzato, circolato nell'intestino dello stesso animale, dimostra la presenza di un enzima glicolitico molto attivo, capace di distruggere, nelle prime ore di permanenza in termostato, dal 10 al 50 °/₀ del glicosio rimasto nel sangue dopo la circolazione.

Anche in queste esperienze si avverte una differenza notevole da caso a caso: in quanto che nell'esperienza, eseguita con intestino di cane da più lungo tempo spancreatizzato, l'esaltazione dell'enzima glicolitico è stata minima in confronto agli altri due casi.

Il verificarsi che il potere glicolitico del sangue e l'esaltazione dello stesso enzima, in seguito alla circolazione nell'intestino dei cani spancreatizzati, va diminuendo col tempo dopo l'operazione, potrebbe rappresentare un argomento in favore di una interpretazione che rimandasse pur sempre al *pancreas* la funzione di provvedere alla elaborazione dell'enzima glicolitico. Ma io non credo, almeno per ora, accettabile questa ipotesi, considerando che l'animale spancreatizzato va incontro ad una profonda progressiva atrofia; atrofia che colpisce singolarmenta anche l'intestino. È da presumere che l'intestino così profondamente atrofizzato non possa svolgere le sue funzioni con la stessa efficacia di prima.

In ogni modo mi riservo una più fondata risposta sulla questione dopo aver compiuto apposite ricerche. Mi preme pertanto rilevare che il risultato da noi ottenuto circa la capacità dell'intestino di cane spancreatizzato a fornire al sangue, in esso circolante una cospicua attività glicolitica, è molto importante. Anzitutto perchè ci fornisce la spiegazione sulla fonte (o sulle fonti) dell'enzima glicolitico dopo l'estirpazione del *pancreas*, e sulle ragioni quindi per cui si continua, per quanto diminuita, l'utilizzazione degli idrati di carbonio nei cani spancreatizzati.

In oltre esso ci permette di interpretare un fatto, apparentemente paradossale, segnalato recentemente dal Lo Monaco [1], secondo il quale le iniezioni di zuccheri in animali diabetici non aumenterebbero la glicosuria, ma anzi la diminuirebbero, almeno in un secondo tempo. Questo interessante fenomeno si potrebbe interpretare nel senso che gli zuccheri iniettati stimolassero la elaborazione dell'enzima glicolitico da parte di quegli organi che con il *pancreas* collaborano a regolare la glicolisi.

Lasciando pertanto ad ulteriori esperienze quelle maggiori dilucidazioni ed applicazioni che si possono svolgere da questi primi risultati, ciò non pertanto emerge: che il sangue di cane spancreatizzato possiede ancora, in grado sia pure minore, l'attività glicolitica, e che con la circolazione nell'intestino dello stesso animale si esalta notevolmente tale attitudine.

[1] Archivio di Farmacologia Sperimentale ecc., vol. XVII (1914).

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 1°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 1-2.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 10.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia durante le ferie del 1916.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 3.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXV.° — Fascicolo 3°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Paletnologia. — *Grotta preistorica di Equi in Lunigiana.* Nota del Socio CARLO DE STEFANI [1].

Nell'agosto del 1909 il signor Podenzana, conservatore del Museo civico della Spezia, faceva alcuni scavi alla Tecchia presso Equi in Lunigiana nell'estremo settentrionale delle Alpi apuane, trovando una certa quantità di resti fossili di mammiferi che il compianto prof. Regalia illustrava nel 1911. Mi venne il desiderio di continuare gli scavi per conto dell'Istituto geologico di Firenze ed invero li intrapresi nell'ottobre del 1911 mediante l'efficace intervento dell'ing. Carlo Tonelli di Equi, sotto la continua, diligentissima sorveglianza del signor Enrico Bercigli capo tecnico dell'Istituto geologico, e con frequenti visite mie. Gli scavi sono continuati per cinque anni fino al settembre del 1915 e li continueremo ancora. A diminuire le gravi spese, ebbi pure l'assegno di 500 lire dalla Società italiana per il progresso delle Scienze presieduta allora dal senatore prof. Golgi. Credo mio debito dare un sommario resoconto dell'opera intrapresa che verrà poi man mano estesamente illustrata da competenti persone.

La Tecchia d'Equi è un vero *abri sous roche* che si apre nei calcari triassici a piè di una delle regioni più selvagge delle Alpi apuane, alla quota di m. 352 sul mare. Fin dai primi scavi il Bercigli scoprì una apertura che immetteva in una spaziosa grotta riempita di materiali ancora intatti. Questi, e così pure quelli esterni della Tecchia, sono stati ordinatamente scavati, e si può dire che in cinque anni se ne sia scavata alquanto più della metà. Gli scavi non sono stati turbati dall'incontro di grandi

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1916.

massi eventualmente caduti dalla vôlta. La stratificazione delle successive accumulazioni si presenta sempre abbastanza regolare.

La Tecchia esterna servì più volte di abitazione umana anche in tempi recentissimi. Al principio del secolo XIX gli abitanti del prossimo paese di Equi vi si rifugiarono e si rafforzarono costruendo un muro con massi d'arenaria portati dal vicino fiume, il Lucido, fluente all'Aulella ed al Magra, del quale muro rimangono ancora tracce. A tempi storici rimontano un acciarino da fucile, un denaro minuto della Repubblica Senese, dei primi battuti dal 1100 al 1180, così giudicato dall'avv. Tito Cini di Montevarchi ed una perfettissima fusaiola di terra cotta quale fu lungamente in uso dal neolitico in poi. Questi oggetti furono trovati fra il pietrisco nella Tecchia alla superficie. Così pure, seppelliti a poca profondità, trovammo due scheletrini di neonati, assai recenti, frutto forse di un duplice recidivo delitto di età moderne e civili.

Lo scavo scende nella grotta fino a m. 6,70 sotto il livello del piazzale esterno della Tecchia; ma la parte superiore dell'entrata si apre a m. 1,35 sotto il detto piazzale esterno; quindi a quella profondità cessano i depositi interni della grotta e la loro rispondenza a quelli esterni, e da quella profondità in su si alzano solo i depositi esterni. Questi possono essere stati più volte rimestati, anche da cercatori di tesori; ma scavando ampio tratto del deposito non è difficile accorgersi delle brevi parti nelle quali venne sconvolto.

La grotta e la Tecchia furono principalmente abitate dall'orso speleo: basti dire che abbiamo raccolto 206 ossa di pene d'orso fra integre e rotte, trascurando tutte quelle rotte che non venivano curate prima del 1915. Sono dunque almeno 300 orsi maschi morti durante il solo riempimento di circa metà dell'ambiente, e poichè è costume di tali animali vivere in famiglia, si può calcolare altrettale il numero delle femmine, con un totale di circa 600 orsi i cui scheletri o parti di scheletri rimasero sul posto. Se ne trovano di tutte le età, dallo stato fetale, forse anche morti con la madre gestante, nell'inverno, come è loro natura, fino agl'individui più colossali. Un cranio (lunghezza condilobasale mm. 445; larghezza zigomatica mm. 310) contuso al fronte, doveva appartenere ad un maschio alto alquanto più di 3 metri dal naso al principio della coda. Questi orsi, considerando che non più d'una famiglia convive, dovettero succedersi per centinaia di generazioni.

Si trovarono insieme, in assai minori proporzioni, resti di parecchi altri animali e dell'uomo. Non si trovarono però scheletri intieri in posto, bensì arti, ed altre parti più o meno complete, specialmente negli strati inferiori della grotta e poi dappresso alle pareti dove più facilmente potevano serbarsi; solitamente le ossa sono disperse, anche assai lontane, ma d'ordinario ad un medesimo livello. È noto che gli orsi viventi gettano all'aria e disordinano quanto loro capita tra i piedi. Singolare negli orsi,

nell'uomo ed in altri animali è il numero delle tubercolosi, dei casi patologici, delle fratture risaldate o meno. Parecchie ossa mostrano le zannate di grossi felini (leone o leopardo), e del lupo; altre molte, anche d'uomo, furono rose dai piccoli roditori. Quattro cranî d'orso presentarono in fronte ferite prodotte da cadute di massi, da sassate, da zannate e pare anche da punte di frecce; ma sono risaldate per esostosi: nemmeno per gli orsi odierni le ferite al cranio sogliono essere mortali.

Dagli strati più profondi ai più alti non si può fare alcuna distinzione di fauna. Ecco l'elenco delle specie trovate:

Homo. Resti sparsi, incompleti, di una trentina di individui, prevalentemente di donne e di giovani.

Talpa caeca Savi. Ancora vivente sul luogo. Una diecina.

Sorex Sp.

Erinaceus europäeus L. Riccio, vivente. Resti di una diecina.

Rhinolophus ferrum equinum Schreber. Vive anche nella prossima grande Buca di Equi.

Ursus spelaeus Blum. Sicuramente diverso dall' *U. arctos* L. del quale mai si trovarono resti e che pur visse numeroso nel prossimo Appennino fino al principio del secolo XVIII.

Canis lupus L. Frequenta assai raramente il prossimo Appennino, e da circa 70 anni non ha figliato nelle Alpi apuane. Era assai comune una volta. Circa 100 individui.

Canis aureus L. Sciacallo: vive solo nella Balcania e nell'isola di Curzola in Dalmazia. Resti di una ventina di individui.

Vulpes vulpes L. Vive frequente: una mattina fu trovata nella grotta già scavata. Una trentina di individui.

Martes foina Erxleben. Faina, vivente, non rara. È per ora incerta la *M. martes* L. (martora) vivente, ma assai più rara. Circa 20 individui.

Mustela erminea L. Donnola. Vivente, comune. Una diecina.

M. nivalis L. Ermellino. Vivente solo nelle regioni fredde delle Alpi.

M. putorius L. Tuttora frequente.

Felis silvestris Schreber. Gatto selvatico, oggi raro e forse attribuibile a gatti domestici inselvatichiti. 4 o 5 individui.

Felis pardus L. Leopardo o pantera. Visse in Europa solo fino al neolitico ed oggi vive in Africa ed in Asia. Si trovarono denti ed ossa sparse di un centinaio di individui.

Felis leo L. var. *spelaea* Goldfuss. Trovammo i resti frammentarî di circa 60 individui, sia negli strati più bassi, sia nei più alti. Hanno qualche carattere che li ravvicina al tigre asiatico. Secondo Boyd-Dawkins, Mayer, Boule ed altri, il Leone visse in Grecia e nell'Asia minore, fino a tempi storici e si adattò anche a climi freddi.

Lynx lynx L. Lince o lupo cerviero. Non era raro nel prossimo Appennino fino a tutto il secolo XVI; oggi vive nelle Alpi ed in Calabria. Resti di 4 o 5 individui.

Lepus europaeus Pallas. Lepre comune, tuttora frequente. Circa 30.

L. variabilis Pall. Citato dal Regalia: oggi vive solo in luoghi freddi delle Alpi.

Glis glis L. var. *italicus* Barret-Hamilton. Ghiro. Tuttora comune. Una ventina.

Microtus arvalis Pall. Vivente.

M. nivalis Martens. Oggi abita le cime dell'Appennino centrale e le Alpi.

Apodemus sylvaticus L. Così determinato da Carlo Forsyth Major. Vivente.

Epimys rattus L. (Major). Vivente.

Arvicola amphibius L. Vivente. Un centinaio.

Marmota marmota L. Tre cranî e resti di una cinquantina d'individui. Fossile in tutti gli strati e comune nelle grotte preistoriche di Toscana. Oggi non vive che nelle Alpi non lungi dai ghiacciai.

Sus scrofa L. Il Cinghiale vive tuttora nella Maremma toscana; ma dall'Appennino adiacente è scomparso da qualche secolo. Resti di 19 o 20 individui.

Cervus elaphus L. Non vive più nell'Appennino. Cinque o sei pezzi.

Capra ibex L. Stambecco. Vive solo in Val di Cogne nelle Alpi. Una ventina.

C. hircus L. Una ventina.

Ovis aries L. Pezzi d'una ventina di individui specialmente negli strati esterni superiori.

Rupicapra rupicapra L. Camoscio. Corna e ossa varie di oltre 50 individui. Oggi vive solo nelle Alpi e nel Gran Sasso. Di alcune delle corna fossili da noi trovate ebbe già ad occuparsi il Camerano nella sua classica monografia.

Bos taurus L. Bove di piccole dimensioni, raro. 5 o 6 pezzi.

I seguenti uccelli furono determinati dal Regalia:

Lyrurus tetrix L.

Tetrao urogallus L. Gallo di monte. Urogallo. Un tempo comunissimo in tutta la penisola, oggi è limitato alle Alpi.

Haliaethus albicilla L.

Pyrrhocorax alpinus Vieill.

Bubo maximus Gerini.

Coledus monedula L.

Truta fario L. Trota, vivente anche oggi nel torrente vicino. A giudicar dalle vertebre, le fossili erano pari a quelle di 3 a 5 chilogr., oggi assai rare per via dell'abbondante pesca.

Questo insieme ha i caratteri di una fauna perfettamente alpina e per la presenza della marmotta, del lepre bianco, dell'ermellino, mostra di aver vissuto in un clima più freddo d'ora. Non si trovano tracce di depositi glaciali nella valle della Tecchia, bensì nelle due valli adiacenti. La fauna della grotta è per lo meno un residuo della fauna glaciale se pure non fu a dirittura contemporanea agli ultimi tempi del periodo medesimo.

Interesserà dire qualche cosa di più dei resti d'industria umana.

A m. 3,80 di profondità, sotto il piazzale esterno, trovasi il piano orizzontale di un focolare alto da 1 a 3 decimetri, che feci mettere, in molta parte, allo scoperto nel 1915, acciò potesse essere esaminato da chi volesse, ricoprendolo di piccolo strato di terra mobile, per sua difesa. Quel focolare segna una lunga dimora dell'uomo, forse la più lunga, e separa in certo modo due età; la sua cessazione improvvisa risponde forse a qualche ignoto evento importante di quegli uomini primitivi. Inferiormente si trovano rare ossa umane sperse fin dagli strati più antichi, con rozze selci, frecce, si direbbe, di tipo Moustieriano, una freccia triangolare ed una peduncolata di rozza lavorazione, e rozzi cocci.

Il focolare è costituito da alternanza di carbone vegetale, che parve, ad un carbonaio, di castagno; ed animale, di ceneri e di frammentini d'ossa calcinate. In esso si trovarono rozzi cocci, rozze punte e dischi di selce, ossa lunghe, mandibole, vertebre ed altre ossa di giovani orsi calcinate, arrostite o lessate: anche oggi l'orso giovane è preferito, essendo cattive e dicesi nocive le carni d'orso vecchio. Si trovarono pure ossa bruciate di camoscio o stambecco e di porchetta. Spezzata e bruciacchiata era pure una rotula umana. Quasi immediatamente sotto il focolare erano un osso lungo di bove spezzato con intenzione ed un femore di camoscio sbozzato, forse per ricavarne un fermaglio di veste, quali se ne trovano più in alto.

A livello del focolare la parete meridionale della grotta si interna formando una specie di ripostiglio entro il quale per 10 cm. sotto e circa 20 sopra il livello predetto, entro la terra, trovammo ossa umane sciolte di almeno due individuí, una donna e un giovane, con ossa di orso, leone, lupo, camoscio, arvicola, uccelli, con numerosi pezzi di coccio, frecce a mandorla di tipo Moustieriano od Aurignaciano, ed un rettangolo di *Pectunculus*, come se ne trovò nelle grotte neolitiche di Liguria, con due forellini, probabilmente una fibbia: altri due di questi si trovarono quasi allo stesso livello nel mezzo della grotta, ed uno alquanto più in alto, circa a m. 2,55. Scavi ulteriori diranno se le ossa umane siano state collocate nel ripostiglio a uso sepolcreto. Presso a poco contemporanei alle fibbie, e sempre alquanto sopra al focolare, erano due pezzi di *fibule* d'orso lavorate, forse ad uso fermagli o bottoni di veste: un terzo pezzo identico, trovossi un poco più in alto, poco sotto m. 1,35 dal piazzale. Altre ossa d'orso lavorate, raccolte sempre sopra il focolare, furono un incisivo lustrato (circa m. 0,80 sopra), uno zigomo di

orso abbozzato a freccia peduncolata (m. 1 sopra), un temporale bucato (m. 1,20 sopra), un incisivo di latte cominciato a bucare (m. 1,30). Un grosso canino di *Sus*, del quale fu iniziata la lavorazione, proviene pure dalla grotta a circa m. 1,80 sopra il focolare. Sono ancora a rammentare una piastrina di ematite identica a quella che si trova al monte Arsiccio nelle stesse Alpi apuane (1 m.), e 7 chicchi di monile di marmo bianco, simili ad altri trovati dal Regnoli nella grotta di Castello nell'estremo opposto delle Alpi apuane (m. 1,20). È da notare che specialmente a m. 1,80 sopra il focolare si trovarono, con resti umani, 6 cranî e molte ossa di orso integri, con buoni resti di leone, leopardo ecc. che seguitarono, del resto, fino quasi alla superficie.

Nei più antichi strati, e più ancora per 1 metro o 2 sopra il focolare, ma non pare negli strati più alti, trovaronsi grosse ghiaie tonde di marmo del luogo e più raramente di arenaria del Lucido: esse probabilmente erano usate come pietre da fionda o *Bolas* e si vedono forse le tracce dei loro colpi in alcuni frontali di orso. Abbondano le selci in pezzi informi, in residui di lavorazione, in arnesi, in punte di lancia e frecce di lavorazione tanto più perfetta quanto più si sale. Una bella freccia peduncolata trovai già pochi centimetri sopra il focolare. Il materiale di queste selci proviene tutto da circa 1500 metri lontano, verso il Mulino di Casciana. Solo le due frecce della lavorazione più perfetta, di calcedonio chiaro e di selce giallognola. trovate alla superficie nell' interno della grotta, hanno una provevienza estranea non precisata.

Piccoli frammenti informi di cocci d'assai cattiva terra granulosa, calcarea, con frammentini di marmo e di calcite cristallina, ricavata dai fanghi del vicino torrente Lucido, talora forse con impasto di paglie e di stecchi, si trovarono a tutte le altezze. Solo alcuni dei cocci più alti sono più sottili, e parrebbero meglio impastati e lavorati a partire dal focolare. Sono lavorati con la stecca: uno, presso il focolare, ha l'orlo appiccicato formato da pizzicature, come se ne trovano nel Neolitico.

Non pare esservi dubbio che il focolare, acceso primieramente da uomini del periodo forse Aurignaziano abbia durato anche più tardi nel Neolitico e che al Neolitico appartengano tutti gli strati superiori durante i quali, come precedentemente, l'uomo fu certo a lungo compagno dell'orso speleo, della marmotta e della rimanente fauna dei luoghi alpini più selvaggi. Ciò aveva già constatato per le Alpi apuane il Regnoli, sebbene poi il Major lo avesse posto in dubbio. La grotta all'Onda ed altre grotte apuane furono seguitate ad abitare dall'uomo preistorico in periodi anche più recenti della grotta nostra.

Quanto al periodo anteriore al focolare, gli scavi non sono stati ancora protratti a sufficenza per trarre conclusioni definitive: d'altronde prima di seguitare a quel livello converrà continuare alquanto lo scavo della parte

superiore. Intanto però il materiale paleontologico raccolto e radunato nel Museo geologico dell'Istituto di studî superiori di Firenze è preziosissimo e preziose sono le notizie raccolte sul nostro uomo preistorico. Ai cultori della scienza ho posto e pongo a disposizione, per lo studio, il materiale raccolto.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* VIII: *Azione dei gas della respirazione sul preparato diaframmatico* (parte 4ª). Nota del Corrispondente FILIPPO BOTTAZZI [1].

V.

Influenza dell'acido carbonico sul preparato diaframmatico stimolato ritmicamente.

I tracciati *A* e *B* della fig. 1 furono scritti da due preparati diaframmatici, tenuti nelle identiche condizioni entro la stessa camera-termostato: all'asciutto durante i periodi di stimolazione ritmica alterna, immersi in liquido di Ringer durante i periodi di riposo. Ma da 1 a 2, sul muscolo *B*, fu fatto agire l'acido carbonico, mentre *A* si trovava in atmosfera di ossigeno. Di conseguenza, le contrazioni ritmiche di *B* subito incominciarono a diminuire di altezza e poi cessarono del tutto; inoltre il preparato subì un accorciamento considerevole.

Degno di nota fu il fatto che il riposo produsse restaurazione della contrattilità, non ostante che il muscolo continuasse a rimanere in atmosfera di CO_2. Sostituito a CO_2 l'ossigeno, le contrazioni non aumentarono molto, e dopo un certo tempo diminuirono improvvisamente di altezza, mentre si produsse un ulteriore accorciamento del muscolo, che continuò ad accentuarsi col tempo.

Si confrontino i successivi periodi del tracciato *B* con quelli corrispondenti del tracciato *A*.

Quanto il muscolo possa essere danneggiato da un lavoro eseguito in atmosfera di solo acido carbonico, risulta anche evidentemente dall'esperimento, di cui riproduco i tracciati nella fig. 2.

Dei due preparati tenuti in atmosfera di CO_2 (da 1 a 2), uno (*A*) fu stimolato a lungo, l'altro (*B*) fu lasciato per lo stesso tempo a riposo.

Quindi fu sostituito all'acido carbonico l'ossigeno, che poi continuò a gorgogliare per tutta la durata dell'esperimento.

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1916.

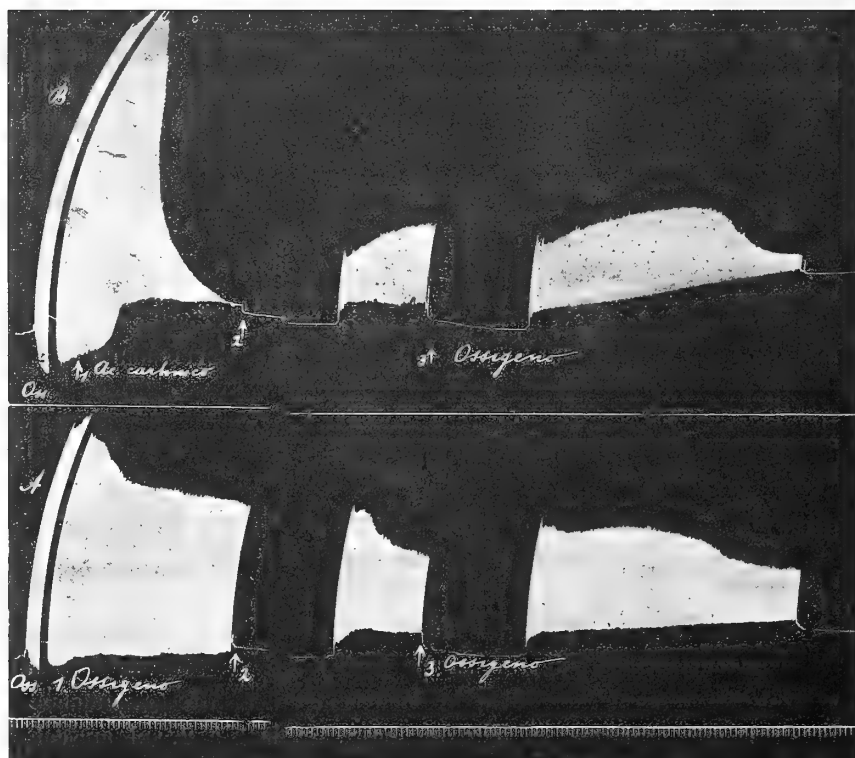



FIG. 1 ($^1/_2$). — *A* e *B*, due preparati della metà destra del diaframma di un cane molto giovane, immersi in liquido di Ringer durante i periodi di riposo, non immersi durante le stimolazioni.

Temper. 32° C. Peso: gr. 4; Tempo 1'. Stimolazioni: 2 acc. Edison. DR = prima 150, poi 160 mm. Frequenza: 30 stim. al 1' (29 giugno 1915).

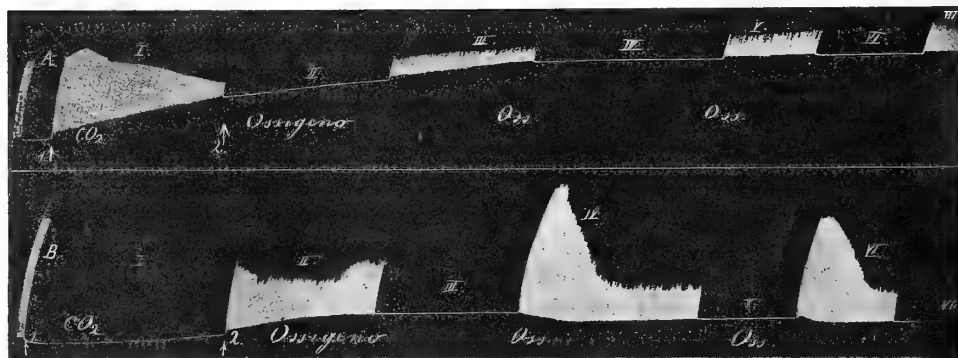



FIG. 2. — *A* e *B*, due preparati diaframmatici dello stesso cane, immersi in liquido di Ringer per $^4/_5$ della loro lunghezza, e stimolati in periodi alternantisi con periodi di riposo.

Temper.: 29° C. Peso: gr. 10. Tempo 1'. Stimolazioni: 2 acc. Edison. DR = 180 mm. Frequenza: 34 stim. al 1' (19 gennaio 1915).

Stimolato il muscolo *B*, dopo il riposo in CO_2, esso eseguì contrazioni di mediocre altezza (II), che andarono aumentando, sebbene assai lentamente, col tempo. E, dopo un altro lungo riposo in ossigeno (III), le contrazioni di *B* divennero (IV) così alte, come erano state quelle del muscolo fresco; e alte furono anche quelle del gruppo (VI), eseguite dopo un altro riposo (V), sempre in ossigeno.

Il preparato *A*, invece, dopo essere stato stimolato in presenza di CO_2, si restaurò assai poco in ossigeno, come dimostra l'altezza delle contrazioni dei tre gruppi (III, V e VII), eseguite sempre con lunghi intervalli di riposo.

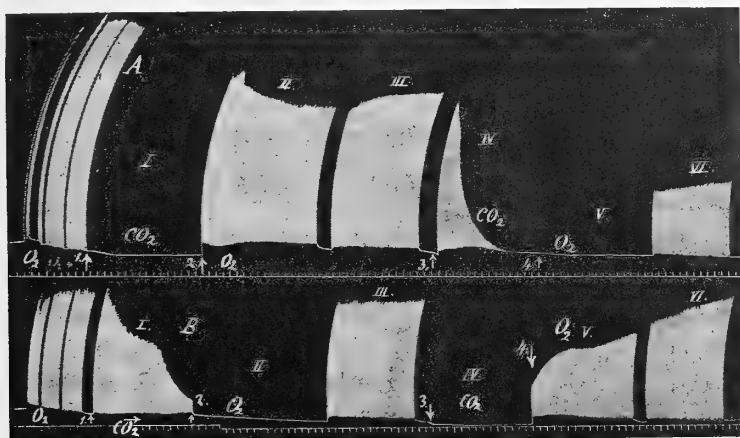



Fig. 3 (1/3). — *A* e *B*, due preparati rispettivamente della metà destra e sinistra del diaframma di un cane, non immersi in liquido di Ringer, nemmeno durante i periodi di riposo.

Temper.: 29° C. Peso: gr. 10. Tempo 1'. Stimol.: 2 acc. Edison. DR = 150 mm. Frequenza: 31 stim. al 1'. (L'ossigeno passa: fino a 1, da 2 a 3, da 4 in poi; e l'acido carbonico: da 1 a 2, da 3 a 4; per tutti e due i preparati) (20 gennaio 1915).

È vero che il muscolo *A* subì un forte accorciamento, onde esso s'immerse nel liquido di Ringer assai più del muscolo *B*, e quindi fu percosso da stimoli relativamente più deboli, per cui le contrazioni che eseguì furono meno alte di quanto sarebbero state se il livello del liquido non si fosse mutato. Ma ciò non toglie che la restaurazione fu in esso minore che nel muscolo *B*. A questa minore restaurazione delle contrazioni rapide riparò tuttavia, almeno in parte, il cospicuo accorciamento tonico del preparato, per cui si ottenne l'effetto, che le contrazioni del gruppo VII, sebbene assolutamente poco alte, raggiunsero coi loro apici un livello notevolmente superiore a quello delle prime contrazioni del muscolo freschissimo.

Un riposo prolungato iniziale del muscolo in atmosfera di sola CO_2 non ne altera sensibilmente la contrattilità (fig. 3, tracc. *A*, I), come dimostra il fatto che, dopo il riposo, esso si contrae per molto tempo vigorosamente,

le contrazioni ritmiche essendo così alte, se non forse più alte, di quelle che sarebbero state, se il muscolo, per lo stesso tempo, fosse stato ritmicamente stimolato in O_2. Basta invece stimolare il muscolo per breve tempo in atmosfera di CO_2, perchè le contrazioni rapidamente diminuiscano di altezza e quindi cessino del tutto (fig. 3, tracc. *A*, IV). E pure, un riposo di durata conveniente in O_2 è ancòra capace di restituirgli, almeno in parte, la eccitabilità (fig. 3, tracc. *A*, V e VI).

Fig. 4 (1/3). — Preparato diaframmatico di cane immerso in liquidi di Ringer per 4/5 della sua lunghezza. Temper.: 31°-32° C. Peso: gr. 10. Tempo 1'. Stim.: 2 acc. Edison. DR = 150 mm. Frequenza: 30 stim. al 1' (5 febbraio 1915).

L'azione deprimente della CO_2 sul muscolo stimolato ritmicamente, cioè mentre lavora, risulta dalla stessa fig. 3 (tracc. *B*, I), dove anche si vede come il riposo e l'ossigeno restituiscono al muscolo la sua capacità funzionale primitiva (fig. 3, tracc. *B*, II-III e V-VI).

In un altro esperimento giunsi a ottenere la quasi totale restaurazione del muscolo, reso già ineccitabile dall'acido carbonico, prolungando di molto l'osservazione, somministrando al preparato molto ossigeno, e da ultimo alternando i periodi di stimolazione ritmica con opportuni intervalli di riposo. Il corrispondente tracciato è quello della fig. 4. L'acido carbonico agì da 1 a 2. Quando si ricominciò a far passare l'ossigeno, il muscolo era già da un pezzo divenuto ineccitabile. Dopo un certo tempo, il preparato tornò a rispondere agli stimoli ritmici, e le contrazioni andarono via via aumentando di altezza, mentre anche il tono del preparato progressivamente si elevava (III).

Durante il IV periodo dell'esperimento, le stimolazioni furono applicate a gruppi, con grandi intervalli (durante i quali il cilindro rimaneva fermo). Come si vede, col tempo, mentre il muscolo si andò man mano riallungando, le contrazioni crebbero di altezza, fino a raggiungere (per es. quelle dell'ultimo gruppo a destra) un'altezza superiore a quella delle contrazioni scritte nel tratto II del tracciato.

Che la restaurazione del tono e dell'altezza delle contrazioni in questo caso abbia avuto luogo, non c'è dubbio; e vi avranno contribuito la lunga durata dell'esperimento, l'aver tenuto il muscolo sempre immerso in liquido di Ringer per $^4/_5$ della sua lunghezza, e forse anche una eccezionale resistenza del preparato. Ma io debbo far osservare che la permanente parziale immersione del muscolo in liquido di Ringer produsse, anche questa volta, l'inconveniente di aumentare, man mano che il muscolo si veniva accorciando, il suo grado d'immersione, e quindi di diminuire l'intensità degli stimoli.

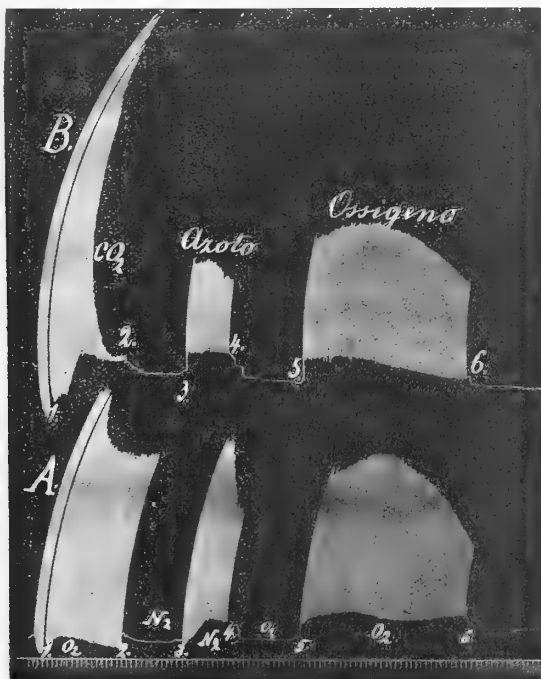



Fig. 5 ($^1/_2$). — *A* e *B*, due preparati della metà destra del diaframma di un cane giovane, immersi in liquido di Ringer durante i periodi di riposo, non immersi durante le stimolazioni.

Temper.: 32° C. Peso: gr. 4. Tempo 1'. Stimolazioni: 2 acc. Edison. DR = 160 mm. Frequenza: 32-34 stim. al 1'.

L'esperimento, di cui riproduco i tracciati nella fig. 5, dimostra che il semplice allontanamento dell'acido carbonico per mezzo di una corrente di azoto, basta, senza somministrazione di ossigeno, a restaurare in parte il muscolo già reso ineccitabile (tracciato *B*).

Dallo stesso esperimento si rileva che, in presenza di solo azoto (da 2 a 4, nei tracciati *A* e *B*) il muscolo, come ho già detto, si affatica più presto che in presenza di ossigeno (fra 5 e 6, nei tracciati *A* e *B*), ma meno rapidamente che in atmosfera di sola CO_2 (fra 1 e 2, nel tracciato *B*).

Quando, a causa dell'azione dell'acido carbonico, il muscolo non risponde più alle stimolazioni del nervo, il muscolo invece risponde ancora alle stimolazioni dirette; e con contrazioni che, per un certo tempo, non sono meno

Fig. 6. — Preparato frenico-diaframmatico di cane non immerso in liquido di Ringer. Temper.: 32° C. Peso: gr. 10. Tempo 1'. Stimolazioni: 2 acc. Edison. DR = 120 mm. Frequenza: 30 stim. al 1' (5 gennaio 1915).

M = contrazioni provocate mediante stimolazione diretta.

N = " " " " del nervo.

alte di quelle che lo stesso muscolo aveva eseguito, prima dell'azione dell'acide carbonico, in risposta a stimoli diretti della stessa intensità (ved. fig. 6, dove *M* significa stimolazioni del muscolo, *N* del nervo).

Inoltre, la stessa fig. 6 dimostra che l'ossigeno ripristina col tempo anche l'eccitabilità indiretta del preparato.

Un altro esempio di restaurazione graduale dell'altezza delle contrazioni, che già erano diminuite ma non soppresse sotto l'influenza dell'acido carbonico, per opera dell'ossigeno, può vedersi nella fig. 7, nel qual caso la restaurazione fu certamente favorita dal fatto, che a un certo momento il muscolo fu stimolato, non continuamente come prima, ma a periodi separati da intervalli di riposo.

***

Finora, cioè facendo agire l'azoto o l'acido carbonico da soli, non mi è riescito di osservare traccia di un aumento, sia pure transitorio, dell'altezza delle contrazioni muscolari, sperimentando nelle condizioni sopra dette, vale a dire sul muscolo immerso o tenuto all'asciutto, alla temperatura di 34°-37° C., e variando la frequenza degli stimoli da 30 a 40 per minuto.

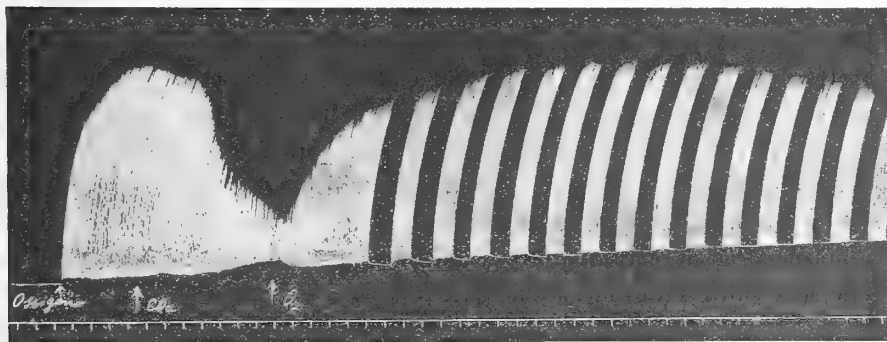



Fig. 7. — Preparato diaframmatico di cane non immerso in liquido di Ringer (il muscolo aveva già funzionato per parecchio tempo).

Temper.: 32° C. Peso: gr. 10. Tempo 1'. Stimolazioni: 2 acc. Edison. DR = 120 mm. Frequenza: 34-36 stim. al 1' (4 gennaio 1915).

Ma ho fatto anche molti esperimenti mescolando i detti gas con ossigeno in proporzioni diverse, cioè una parte, per es., di anidride carbonica con una, due, tre o quattro parti di ossigeno. I risultati ottenuti, però, non sono stati soddisfacenti. Infatti, nel maggior numero dei casi ho osservato che quando all'ossigeno era mescolata anidride carbonica, secondo che questa veniva a trovarsi in proporzione più o meno grande nel miscuglio gasoso, le contrazioni muscolari diminuivano più o meno di altezza.

Solo in qaalche caso mi è occorso di notare un lieve e transitorio aumento dell'altezza delle contrazioni. Ma la stessa rarità del fenomeno scema di molto l'importanza di esso.

In un caso, nel quale il muscolo non era immerso, l'aumento fu reale, ma probabilmente dovuto al fatto, che il muscolo freschissimo fu stimolato a intervalli considerevoli e per breve tempo ciascuna volta. Ci trovavamo, quindi, in condizioni analoghe a quelle nelle quali fu già da me osservata

la possibilità dell'aumento in altezza delle contrazioni muscolari sotto l'influenza dell'acido carbonico (ved. questa Nota VIII, parte 1ª). Ma negli altri casi, nei quali il muscolo era per $^4/_5$ della sua lunghezza immerso in liquido di Ringer, il transitorio aumento poteva esser dovuto a differenze della intensità degli stimoli che provocavano le contrazioni.

Fisica matematica. — *Sui moti di un liquido viscoso compatibili col moto traslatorio di un solido di rivoluzione immerso nel liquido stesso.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Corrispondente E. ALMANSI [1].

In una Nota inserita nei Rendiconti di questa R. Accademia (1° sem., 1911, pag. 341) il dott. Zondadari, inspirandosi ai metodi ed alle ipotesi del Basset [2] relativi allo studio dei moti lenti del liquido secondo piani passanti per l'asse di rivoluzione del solido, dimostra che lo studio di cotesti movimenti, nella supposizione che ciascuno di essi avvenga nello stesso modo in ognuno di quei piani, si traduce nell'integrazione di una complicata equazione alle derivate parziali del quarto ordine, alla quale soddisfa la funzione ψ di corrente. Precisamente egli dimostra che l'equazione in discorso resulta dalle due seguenti:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \left(\Delta^2 \Omega - \dfrac{\Omega}{r^2} \right) \\ \Omega = -\dfrac{1}{2} \left\{ \dfrac{\partial}{\partial r} \left(\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\}, \end{cases}$$

mediante eliminazione di Ω.

Mi propongo qui di mostrare che, seguitando a denotare con r la distanza di un generico punto del liquido dall'asse di rivoluzione del solido, ed introducendo una nuova funzione $F(r, z, t)$ legata alla ψ mediante $\psi = r \dfrac{\partial F}{\partial r}$, la suddetta equazione può condursi alla seguente:

$$\frac{\partial \Delta^2 F}{\partial t} = \nu \Delta^4 F,$$

dove ν (rapporto fra viscosità e densità del liquido) è un'assegnata costante positiva.

[1] Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1916.

[2] *Treatise on Hydrodynamics*, vol. II.

Infatti, la seconda delle (1) potrà scriversi

$$\Omega = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right\}.$$

Per cui, tenendo presente che, nel nostro caso,

$$\Delta^2 F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \tag{2}$$

resulta

$$\Omega = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Delta^2 F}{\partial r}.$$

Quindi, sostituendo nella prima delle (1) ed osservando che, in virtù della (2), si ha

$$\Delta^2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{\partial \Delta^2 F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r},$$

si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Delta^2 F}{\partial t}\right) = \nu\,\frac{\partial \Delta^4 F}{\partial r},$$

ovvero

$$\frac{\partial \Delta^2 F}{\partial t} = \nu \Delta^4 F + f(t, z).$$

Ma, supponendo che $h(t, z)$ sia, delle sole variabili t e z, funzione tale che

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right) = \nu\,\frac{\partial^4 h}{\partial z^4} - f(t, z),$$

avremo

$$\frac{\partial \Delta^2 (F+h)}{\partial t} = \nu \Delta^4 (F+h).$$

E, poichè, essendo $\psi = r\frac{\partial F}{\partial r}$, l'aggiungere alla F una funzione delle sole variabili t e z non altera i caratteri del moto, sarà lecito, in conclusione, scrivere l'equazione indefinita

$$\frac{\partial \Delta^2 F}{\partial t} = \nu \Delta^4 F. \tag{3}$$

In una prossima Nota, integrerò la (3) nel caso particolare che il solido immerso sia sferico, prefissate la completa aderenza fra solido e liquido, la quiete del liquido all'infinito e la condizione iniziale.

Fisica matematica. — *Sulla variazione di resistenza elettrica di un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico.* Nota I della dott. ELENA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

1. Le ricerche sperimentali sulla variazione di resistenza elettrica determinata da un campo magnetico in una sostanza conduttrice sottoposta alla sua azione, sono numerosissime, forse anche troppe [2]. Non poche volte appaiono discordi i risultati di tali ricerche ed inconciliabili tra loro le formule empiriche proposte dai diversi sperimentatori per esprimere, in funzione dell' intensità H del campo, il rapporto $\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0}$ della variazione di resistenza $\Delta\varrho$ alla resistenza ϱ_0, corrispondente ad $H=0$.

Come risulterà da quanto dirò nei seguenti paragrafi, tali discordanze dipendono in parte dal non aver ben precisato che cosa si debba intendere per variazione di resistenza prodotta dal campo.

Un risultato relativamente al quale le dette ricerche sperimentali si possono ritenere concordi, è il seguente: le sostanze ferro-magnetiche (ferro, nichel, cobalto) presentano un aumento di resistenza parallelamente alle linee di forza magnetiche, una diminuzione nelle direzioni perpendicolari; le sostanze diamagnetiche, tra le quali il bismuto occupa il primo posto, presentano un aumento di resistenza in tutte le direzioni (diverso nelle diverse direzioni); per le altre sostanze la variazione di resistenza è molto piccola.

Per spiegare questi risultati sperimentali, è stata affacciata l'ipotesi che il campo determini una vera e propria alterazione temporanea delle proprietà specifiche delle sostanze conduttrici sottoposte alla sua azione. Le ricerche teoriche che sono state fatte per dare una spiegazione dei detti risultati, prendendo come base non l'ipotesi sopra accennata, ma le leggi del movimento della elettricità in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico, sono poche, al contrario delle ricerche sperimentali.

Citerò brevemente i lavori che, in proposito, ho potuto trovare. Il meno recente è quello di Goldhammer [3]; questi ha considerato una lamina rettangolare fornita lungo due lati opposti di due elettrodi di resistenza trascurabile e disposta trasversalmente in un campo magnetico uniforme; ha am-

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1916.

[2] Per notizie bibliografiche in proposito, cfr. Chwolson, *Traité de Physique,* tome IV, pag. 1018 (Paris, Librairie scientifique A. Hermann et fils, 1913).

[3] Annalen der Physik (31), 1887, pag. 370.

messo che le linee di flusso sotto l'azione del campo siano ancora rette perpendicolari agli elettrodi; ha trovato che la teoria non prevede la variazione di resistenza che si constata sperimentalmente ed ha introdotta allora l'ipotesi che il campo alteri le proprietà dei conduttori, determinando in essi una temporanea anisotropia. Come ha dimostrato il prof. Corbino ([1]), non è giusta l'ipotesi di Goldhammer, ammessa più tardi anche dal Drude, che per una lamina, nelle condizioni dette, le linee di flusso restino, sotto l'azione del campo, rettilinee e perpendicolari agli elettrodi.

Il Drude ([2]), poste le basi della teoria elettronica che da lui ha preso nome, ha esaminata, tra le altre questioni, anche la variazione di resistenza elettrica determinata dal campo. Anch'egli ha considerato una lamina rettangolare, fornita di elettrodi lungo due lati opposti e disposta trasversalmente nel campo. Secondo il Drude la causa del fenomeno in questione sarebbe la differenza di temperatura che si stabilisce tra i due orli liberi della lamina. In conseguenza di questa differenza di temperatura si produrrebbe un accumulo di ioni positivi lungo un elettrodo e di ioni negativi lungo l'altro elettrodo; da ciò prenderebbe origine un effetto longitudinale, interpretabile come una variazione di resistenza. Ma lo Zahn ([3]) ha trovato che il rapporto $\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0}$ varia pochissimo se una lamina di bismuto, nelle condizioni supposte dal Drude, si trova nell'aria (nel qual caso la differenza di temperatura tra i due orli non saldati agli elettrodi può stabilirsi liberamente) o se è immersa in acqua circolante (nel qual caso le differenze di temperatura, se non si eliminano del tutto, si attenuano però molto). La spiegazione del Drude non sembra perciò soddisfacente.

J. J. Thomson ([4]) ha cercato una spiegazione dell'aumento di resistenza di una lamina di sostanza diamagnetica disposta trasversalmente nel campo, basandosi sulla sua teoria elettronica, alquanto diversa da quella di Drude. Ha trovato che si può spiegare tale aumento, se si ammette che gli urti tra molecole e corpuscoli elettrizzati siano fortemente influenzati dalla carica posseduta da quest'ultimi. Basandosi sul calcolo fatto da Thomson, Adams ([5]) ha esaminato quali ipotesi si debbano fare sulla natura di un'eventuale alterazione delle proprietà dei conduttori determinata dal campo, se si vuole ammettere tale alterazione.

C'è infine una ricerca di Gans ([6]) il quale ha ammesso, con Lorentz,

([1]) Rendic. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 213.

([2]) Annalen der Physik, III, 1900, pag. 377.

([3]) Annalen der Physik, XXIII, 1907, pag. 142.

([4]) *Rapports presentés au Congrès International de Physique*, III, pag. 138, 1900; Philosophical Magazine, 3, pag. 353, 1902.

([5]) Physical Review, XXIV, 1907, pag. 428.

([6]) Annalen der Physik, XX, 1906, pag. 293.

una sola specie di elettroni mobili, quelli negativi; l'autore stesso ha riconosciuto che le formule trovate per la dipendenza della variazione di resistenza dal campo non si accordano con le esperienze, almeno per campi di intensità arbitraria.

In questo lavoro mi propongo di esaminare che cosa preveda la teoria elettronica che fa capo a Drude nei riguardi dei risultati sperimentali che possono interpretarsi come una vaziazione di resistenza elettrica prodotta dal campo magnetico; se ci siano o no fenomeni che la teoria non prevede e per spiegare i quali sia necessario introdurre l'ipotesi di un'alterazione di proprietà specifiche prodotta dal campo nelle sostanze conduttrici sottoposte alla sua azione.

Mi limiterò a considerare il caso di un campo magnetico uniforme e di un conduttore omogeneo ed isotropo, tenuto a temperatura costante.

2. In un precedente lavoro [1] ho stabilite le equazioni che individuano il movimento della elettricità in un conduttore a tre dimensioni non omogeneo, anisotropo, tenuto a temperatura costante e sottoposto all'azione di un campo magnetico non uniforme, ammettendo che quest'ultimo possa eventualmente alterare le proprietà specifiche del conduttore. Da tali equazioni si ricavano facilmente quelle valide nel caso di un campo magnetico uniforme e di un conduttore omogeneo ed isotropo, nell'ipotesi che le proprietà specifiche di quest'ultimo non si alterino per azione del campo.

Siano $x\,y\,z$ tre assi che formino un triedro ortogonale destrorso; sia l'asse z parallelo alle linee di forza del campo magnetico. Se si indicano con N_1 ed N_2 i numeri di ioni positivi e di ioni negativi per cm³ della sostanza conduttrice, con v_1 e v_2 le mobilità degli ioni delle due specie, con e il valore assoluto della carica di uno ione (positivo o negativo), se si pone

$$m_1 = e v_1 \mathrm{H} \quad , \quad m_2 = e v_2 \mathrm{H} \quad , \quad \mathrm{K}_1 = \frac{e^2 v_1 \mathrm{N}_1}{1 + m_1^2} \quad , \quad \mathrm{K}_2 = \frac{e^2 v_2 \mathrm{N}_2}{1 + m_2^2}$$

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 \quad , \quad \varepsilon = m_1 \mathrm{K}_1 - m_2 \mathrm{K}_2 \quad ; \quad \sigma = e^2 (v_1 \mathrm{N}_1 + v_2 \mathrm{N}_2) \, ,$$

si ottengono le seguenti relazioni tra le componenti $\dot{\gamma}_x\,\dot{\gamma}_y\,\dot{\gamma}_z$ della densità di corrente e le derivate del potenziale elettrico V:

$$(1) \quad \dot{\gamma}_x = -\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} \quad ; \quad \dot{\gamma}_y = -\varepsilon \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} \quad ; \quad \dot{\gamma}_z = -\sigma \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} \; [2].$$

3. Consideriamo un punto P del conduttore; quando quest'ultimo non è sottoposto all'azione del campo magnetico sia l_0 la linea di flusso passante

(1) Rendic. Accad. dei Lincei, 2° sem., pag. 28.

(2) Queste formule sono perfettamente analoghe a quelle stabilite dal prof. Corbino nel caso di una lamina disposta trasversalmente in un campo magnetico uniforme. Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 213.

per P, γ_0 la densità di corrente, V_0 il potenziale in P, c_0 la conducibilità specifica della sostanza. Si avrà

$$\dot{\gamma}_0 = - c_0 \frac{\partial V_0}{\partial l_0} .$$

Sia l la linea di flusso passante per P, quando il conduttore è sottoposto all'azione dal campo magnetico; siano $\dot{\gamma}$ e V i valori della densità di corrente e del potenziale in P. Se la teoria prevede un' uguaglianza del tipo

$$\dot{\gamma} = - c \frac{\partial V}{\partial l}$$

con $c \gtrless c_0$, potremo dire che la teoria prevede un'apparente alterazione della conducibilità specifica o della resistenza specifica del conduttore.

Moltiplicando la prima delle (1) per $\cos lx$, la seconda per $\cos ly$, la terza per $\cos lz$ e sommandole membro a membro, si ottiene

$$(2) \qquad \dot{\gamma} = - K \frac{\partial V}{\partial l} - \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos ly - \frac{\partial V}{\partial y} \cos lx \right) - (\sigma - K) \frac{\partial V}{\partial z} \cos lz .$$

Posto nelle (1), in luogo di $\dot{\gamma}_x \, \dot{\gamma}_y \, \dot{\gamma}_z$, $\dot{\gamma} \cos lx \;\; \dot{\gamma} \cos ly \;\; \dot{\gamma} \cos lz$, moltiplicando la prima delle (1) per $\cos ly$, la seconda per $\cos lx$, e sottraendo membro a membro, si ottiene

$$(3) \qquad 0 = - K \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos ly - \frac{\partial V}{\partial y} \cos lx \right) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial l} - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} \cos lz .$$

Moltiplicando la prima delle (1) per $\cos lx \cos lz$, la seconda per $\cos ly \cos lz$, la terza per $(\cos^2 lz - 1)$ e sommando membro a membro, si ha

$$(4) \qquad 0 = - \varepsilon \cos lz \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos ly - \frac{\partial V}{\partial y} \cos lx \right) - K \cos lz \frac{\partial V}{\partial l} + \\ + [K \cos^2 lz + \sigma (1 - \cos^2 lz)] \frac{\partial V}{\partial z} .$$

Per mezzo delle (3) e (4) si possono esprimere $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos ly - \frac{\partial V}{\partial y} \cos lx \right)$ e $\frac{\partial V}{\partial z}$ in funzione di $\frac{\partial V}{\partial l}$. Sostituendo nella (2) si ottiene

$$(5) \qquad \dot{\gamma} = - \left[\frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} + \left(\sigma - \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} \right) \times \\ \times \frac{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz}{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz + K\sigma (1 - \cos^2 lz)} \right] \frac{\partial V}{\partial l} = - c \frac{\partial V}{\partial l} .$$

Per $\cos lz = 0$ (condizione che si ritiene per es. soddisfatta nel caso di lamine e fili sottili disposti trasversalmente nel campo) si ha

$$c = \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} \ [1] .$$

Si dimostra facilmente la diseguaglianza

$$(6) \qquad c_0 > \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} .$$

Infatti: Partiamo dalla diseguaglianza, evidentemente soddisfatta,

$$(m_1 + m_2)^2 > 0 .$$

Da questa si possono dedurre successivamente le altre

$$(1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) - 2(1 - m_1 m_2) > 0$$

$$\frac{e^2 v_1 N_1}{K_1} + \frac{e^2 v_2 N_2}{K_2} - 2(1 - m_1 m_2) > 0$$

$$e^2 v_1 N_1 K_2 + e^2 v_2 N_2 K_1 > 2 K_1 K_2 (1 - m_1 m_2)$$

$$e^2 v_1 N_1 K_2 + e^2 v_2 N_2 K_1 + K_1^2(1 + m_1^2) +$$
$$+ K_2^2(1 + m_2^2) > 2 K_1 K_2 (1 - m_1 m_2) + K_1^2(1 + m_1^2) + K_2^2(1 + m_2^2)$$

$$e^2 v_1 N_1 K_2 + e^2 v_2 N_2 K_1 + e^2 v_1 N_1 K_1 +$$
$$+ e^2 v_2 N_2 K_2 > (K_1 + K_2)^2 + (m_1 K_1 - m_2 K_2)^2$$

$$e^2 (v_1 N_1 + v_2 N_2) K > K^2 + \varepsilon^2$$

$$c_0 > \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} .$$

Dalla diseguaglianza (6) si deduce immediatamente che, per $\cos^2 lz < 1$, si ha sempre

$$(7) \qquad c < c_0 .$$

Infatti, nell'ipotesi che il campo non alteri le proprietà specifiche del conduttore, si ha $\sigma = c_0$ e quindi, per la (6), $\sigma' - \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} > 0$; la frazione $\frac{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz}{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz + K\sigma(1 - \cos^2 lz)}$, il cui valore è sempre positivo, è mi-

[1] La (5), in questo caso, si identifica con una delle formule stabilite dal prof. Corbino. Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 216.

nore di 1 se $\cos^2 lz$ è minore di 1; in tal caso si ha perciò

$$\left(\sigma - \frac{K^2+\varepsilon^2}{K}\right)\frac{(K^2+\varepsilon^2)\cos^2 lz}{(K^2+\varepsilon^2)\cos^2 lz + K\sigma(1-\cos^2 lz)} < \sigma - \frac{K^2+\varepsilon^2}{K}.$$

Questa diseguaglianza è perfettamente equivalente alla (7).

Per $\cos^2 lz = 1$ si ha $c = c_0$.

La teoria elettronica di Drude prevede dunque, per un conduttore omogeneo ed isotropo, tenuto a temperatura costante e sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme, un apparente aumento di resistenza specifica in tutte le direzioni, fatta eccezione per quella delle linee di forza magnetiche: in quest'ultima direzione non prevede alcuna apparente alterazione della resistenza specifica.

K, σ, ε^2 non mutano quando si cambi H in $-$H; quindi c non muta all'invertire del campo magnetico, se non muta $\cos^2 lz$. Questa condizione è soddisfatta, per es., nel caso di una lamina disposta trasversalmente nel campo, perchè allora, qualunque sia il senso di quest'ultimo, si può ritenere $\cos lz = 0$; la detta condizione è pure soddisfatta nel caso di un filo, rettilineo o no, comunque orientato, poichè allora, sia col campo diretto, sia col campo inverso, la direzione della linea di flusso in ciascun punto del filo si può identificare con la direzione di quest'ultimo.

L'apparente conducibilità specifica c, poichè dipende da $\cos^2 lz$, varierà in genere da punto a punto, per un conduttore di forma qualsiasi. La dipendenza di c da $\cos^2 lz$ ci dice che la teoria prevede un'apparente anisotropia del conduttore [ciò che del resto ci dicono anche le equazioni (1)].

Nel seguente paragrafo esaminerò quale influenza abbia sulla resistenza globale di un conduttore posto in un campo magnetico, l'apparente variazione di resistenza specifica che la teoria prevede.

Astronomia. — *Osservazioni di pianetini fatte all'equatoriale Dembowski di 187 mm. del R. Osservatorio di Padova. — Confronti.* Nota di B. Viaro, presentata dal Socio E. Millosevich.

Le osservazioni sui pianetini (2) Pallas, (4) Vesta, (704) Interamnia e (354) Eleonora, il primo dei quali fu osservato nel 1914 e gli altri tre nel 1915, già pubblicate nelle pagine precedenti [1], furono messe a confronto con le effemeridi.

Gli O-C che si riferiscono ai primi due pianeti (2) Pallas, (4) Vesta, furono ottenuti confrontando le coordinate osservate con le coordinate calcolate dalle rispettive effemeridi inserite nei Nautical Almanac 1914 e 1915;

[1] Veggansi questi Rendiconti, vol. XXV (1916), 1° sem., pag. 782; 2° sem., pag. 68.

quelli relativi a (704) Interamnia mi furono gentilmente comunicati per lettera dal sig. prof. Cerulli in seguito all' invio delle mie osservazioni manoscritte; quelli di (354) Eleonora furono ricavati dal confronto delle posizioni osservate con le posizioni ottenute dalla effemeride del prof. Antoniazzi inserita negli Atti del R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti. Tomo LXXV, parte seconda.

(2) *Pallas.*

1914		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Giugno	27	$-1^{s}.86$	$+1''.4$
"	27	-2.10	$+2.5$
"	28	-1.88	$+0.2$
"	28	-2.02	$+3.2$
Agosto	14	-2.06	$+3.9$
"	14	-1.97	$+0.5$
"	25	-1.83	$+1.5$
"	25	-1.75	$+2.1$

(4) *Vesta.*

1915		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Febbraio	27	$-0^{s}.14$	$-1''.6$
Marzo	3	$+0.12$	-1.2
"	3	$+0.01$	-1.3
"	4	$+0.01$	-0.8
"	4	$+0.04$	-1.8
"	5	$+0.09$	-0.1
"	5	$+0.09$	-0.6

(704) *Interamnia.*

1915		$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
Agosto	13	$-1^{s}.31$	$-7''.3$
"	13	-1.27	-6.9
Ottobre	16	-0.67	-11.2
"	16	-0.77	-10.1
"	17	-0.59	-11.3
"	17	-0.71	-11.9
"	19	-0.81	-12.6
"	19	-0.79	-12.4
"	21	-0.69	-13.5
"	21	-0.59	-11.7
Novembre	6	-0.43	-13.5
"	7	-0.34	-13.5
"	7	-0.48	-13.3

(354) *Eleonora.*

1915-16		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	1916		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Nov.	11	$-0^{s}.47$	$-1''.2$	Genn.	9	$-0^{s}.50$	$-0''.3$
"	13	-0.61	$+0.6$	"	10	-0.69	-2.0
"	15	-0.42	-0.4	"	10	-0.64	-0.0
"	15	-0.39	-0.9	"	14	-0.59	-2.2
"	16	-0.48	-0.1	"	14	-0.51	-2.0
"	16	-0.40	-1.2	"	19	-0.69	-0.6
"	18	-0.65	-2.7	"	19	-0.72	$+2.5$
"	18	-0.65	-1.3	"	29	-0.46	$+1.3$
"	23	-0.50	-1.1	"	30	-0.55	$+1.0$
"	26	-0.49	$+0.1$	Febbr.	2	-0.57	$+3.1$
"	26	-0.59	-0.9	"	2	-0.49	$+2.2$
"	28	-0.68	-1.5	"	5	-0.31	-1.0
"	28	-0.65	-2.5	"	6	-0.28	$+0.2$
Dic.	14	-0.61	-0.1	"	6	-0.38	$+1.0$
Genn.	9	-0.40	-0.5	"	21	-0.30	-1.2

Mineralogia. — *Sulla composizione chimica di un solfosale di S. Giorgio in Sardegna* [1]. Nota del dott. PROBO COMUCCI, presentata dal Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH [2].

Il minerale, del quale mi occupo in questa breve Nota, mi fu donato dall'ing. Agostino Busachi, che sento il dovere di ringraziare vivamente. Proviene dal permesso minerario di S. Giorgio presso Flumini maggiore in Sardegna, ove forma una piccola lente racchiusa negli scisti siluriani; ma, per la sua limitata estensione, non ha, fino ad ora almeno, importanza industriale, ed è stato solo oggetto di superficiali ricerche.

Si presenta come una massa a struttura lamellare-fibrosa, di colore grigio-piombo e a splendore metallico. La frattura è cristallina, ma non si dà mai possibilità di fare una qualsiasi misura al goniometro. Per questo fatto l'identificazione della sostanza si deve fondare solamente sull'analisi chimica.

Nei saggi al cannello il minerale risulta facilmente fusibile, dando origine a fumi bianchi. Sul carbone si ottiene aureola gialla: in questa ed in altra prova mai ho avuto odore agliaceo per arsenico. All'analisi qualitativa il minerale non diede reazione che di S, Sb, Pb con piccole quantità di ferro.

Per l'analisi quantitativa la sostanza fu sciolta in acqua regia, scaldando assai leggermente per evitare possibili perdite di cloruro d'antimonio; rimasero indietro piccole quantità di solfo e qualche rara laminetta di cloruro di piombo. Dopo avere diluito un poco la soluzione, sempre fortemente acida, fu sottoposta ad una rapida corrente di acido solfidrico; venne poi diluita a poco a poco convenientemente con acqua satura di idrogeno solforato e lasciata molto a lungo sotto l'azione della corrente solfidrica; in tal modo precipitarono totalmente e piombo e antimonio, come potei verificare con successivi saggi sui filtrati, che mi servirono poi per il dosamento del ferro.

La separazione del solfuro di piombo da quello di antimonio fu fatta mediante il solfuro ammonico. Il solfuro di piombo insolubile fu disciolto con acido nitrico; la soluzione fu concentrata fin quasi a secchezza, addizionata di H_2SO_4 e riscaldata fino ad emissione di fumi bianchi; vi fu aggiunto infine alcool. Il solfato di piombo così ottenuto fu raccolto e pesato.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di mineralogia del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1916.

Il solfuro di antimonio, sciolto nel solfuro ammonico, fu riprecipitato mediante scomposizione del liquido con acido cloridrico diluito, quindi ridisciolto in soluzione di potassa caustica diluita e riprecipitato con il medesimo acido: i liquidi filtrati vennero sempre saggiati con H_2S. Il solfuro lavato successivamente con alcool, alcool ed etere e solfuro di carbonio, per allontanare alquanto solfo libero [1] fu seccato a 70°; poi la maggior parte introdotta in un crogiuolo di porcellana per ossidarla direttamente. Il solfuro d'antimonio ancora aderente al filtro fu disciolto con solfuro ammonico, e la soluzione venne raccolta in un secondo crogiuolo, ove si diluiva con acqua e si scaldava poi a bagnomaria. La diluizione ebbe per scopo di evitare con il riscaldamento l'effervescenza eventuale, con conseguenti proiezioni e perdite. L'ossidazione fu fatta gradualmente, fino ad usare acido nitrico fumante, per lunga e ripetuta digestione a bagnomaria in un crogiuolo di porcellana coperto di un vetro da orologio. Il pentossido così ottenuto venne ridotto a tetrossido mediante prolungato riscaldamento, in bagno d'aria, del crogiuolo contenuto a sua volta in uno più grande, onde difendere la sostanza dai gas della fiamma ed evitare qualsiasi perdita per un'eventuale riduzione in triossido.

Lo solfo fu determinato con il metodo di Antony e Lucchesi, già applicato soddisfacentemente alle analisi dei solfosali dal D'Achiardi [2] e Manasse [3].

Il metodo classico di Fresenius, per ossidazione con nitrato di potassio e carbonato alcalino, fu tentato, ma con resultato non soddisfacente, perchè, dopo avere acidulato, si aveva una precipitazione lenta e continua, probabilmente dovuta a decomposizione di un qualche antimoniato alcalino, dapprima passato in soluzione.

I dati dell'analisi sono i seguenti:

S	21,54
Fe	3,99
Pb	37,86
Sb	36,01
	99.40

Facendo il calcolo dei solfuri corrispondenti alle quantità trovate di Fe, Pb, Sb si otterrebbe invece:

		Quozienti molecolari
Sb_2S_3	50,41	0,150
Pb S	43,41	0.183
Fe S	6,27	0,071
	100,39	

[1] Se fosse stato possibile togliere tutto lo zolfo, si sarebbe potuto, con metodo molto più semplice, determinare l'antimonio allo stato di solfuro.

[2] D'Achiardi, *Geocronite di Val di Castello presso Pietrasanta*. Mem. Soc. tosc. sc. nat., vol. XVIII, pag. 35 (1902).

[3] Manasse, *Tetraedrite del Frigrido*. Ibid., vol. XXII, pag. 81.

Le proporzioni molecolari sono dunque:

$$15\,Sb_2S_3 + 18\,PbS + 7\,FeS$$

e queste richiederebbero le seguenti percentuali teoriche:

S	22.52	Sb_2S_3	50,61
Fe	3,92	PbS	43,21
Pb	37.39	FeS	6,18
Sb	36,17		
	100.00		100,00

Il ferro è in proporzione tale da non potersi trascurare; e riguardo ad esso non si può scartare senz'altro l'ipotesi che si trovi nel minerale in forma di solfanidride Fe_2S_3, ammessa per altri solfosali.

Osserviamo che 3,99 di Fe, anzichè a 6,18 di FeS, conducono a 7,24 di Fe_2S_3 e ad un quoziente molecolare di 0,034. Se si supponesse il Fe sostituente Sb, si avrebbe: $15\,Sb_2S_3 + 3{,}4\,Fe_2S_3 = 18{,}4\,\overset{III}{R}_2S_3$, cioè in cifre tonde 18 molecole di solfanidride per 18 molecole di solfobase, e tale proporzione sarebbe proprio quella della zinchenite. Però, ammessa questa ipotesi, la somma dei solfuri calcolata in base ai quantitativi ottenuti dei tre metalli Fe, Sb, Pb, invece 100.39 salirebbe a 101,36, risultandone un'eccedenza di solfo un po' troppo forte (1,96), rispetto alle percentuali trovate. Fondandosi dunque sopra i risultati sperimentali, questi portano piuttosto ad ammettere nel minerale il ferro come FeS sostituente di PbS.

Si avrebbero pertanto 15 molecole di solfanidride con 25 molecole di solfobase, cioè in rapporto di 3 a 5, il che potrebbe spiegarsi con l'associazione di una molecola di zinchenite ($PbS \cdot Sb_2S_3$) con due molecole di iamesonite ($2\,PbS \cdot Sb_2S_3$).

Le proporzioni sono così semplici da non escludere che si abbia a che fare con un composto doppio, ma mancano i dati cristallografici per stabilire una specie nuova, e in armonia con ciò che è stato adottato in casi simili specialmente da Zambonini [1] è più conveniente ritenere che si tratti di una soluzione solida, non potendosi ricorrere all'ipotesi di una miscela isomorfa, dati i caratteri cristallografici ben diversi della zinchenite e della iamesonite. Anche il peso specifico del minerale, trovato uguale a 5,65, corrisponde soddisfacentemente a quello di una soluzione solida nelle proporzioni date di $(Pb, Fe)S \cdot Sb_2S_3$ e di $2\,(Pb, Fe)S \cdot Sb_2S_3$; infatti il peso specifico della zinchenite è 5,3 e quello della iamesonite è 5,8 circa.

[1] F. Zambonini, *Contributi allo studio dei solfosali naturali. Il gruppo della plagionite*. Riv. min. crist. it, vol. XLI, pag. 3.

Innegabilmente poi il minerale studiato ha dal lato chimico una notevolissima analogia con quelli del gruppo della plagionite.

Secondo F. Zambonini (1) tale gruppo è costituito dai solfosali di piombo e antimonio con composizione compresa fra $1.25\,PbS . Sb_2S_3$ e $2{,}50\,PbS . Sb_2S_3$ e considerati dall'autore come soluzioni in varie proporzioni di questi due termini estremi. Il minerale da me esaminato si può esprimere così: $1{,}66\,PbS . Sb_2S_3$; esso quindi diverrebbe un termine della serie suaccennata; anzi contribuirebbe a riempire la lacuna che oggi esiste in questa serie fra il termine $1{,}35\,PbS . Sb_2S_3$ e $1{,}78\,PbS . Sb_2S_3$, la quale lacuna nella supposizione di soluzioni solide in tutti i rapporti è da aspettarsi che venga colmata.

Ultimamente lo stesso prof. Zambonini (2) studiando le piriti d'argento è venuto all'interessante conclusione che si trovi in esse il ferro sotto forma di pirrotina rombica FeS in soluzione solida in varie proporzioni con solfo e il solfosale ferrico $AgFe_2S_3$. La quantità notevole di solfuro ferroso contenuta nel solfosale qui studiato potrebbe fare avanzare un'ipotesi di simil genere. Nel caso presente però è da escludere che esista il solfo libero in soluzione solida, essendo esso appena sufficiente a saturare i diversi elementi al minimo di valenza, mentre dei nove casi studiati da Zambonini in un solo si ha assenza di solfo disciolto. Questa mancanza ed, insieme, il fatto, che il solfosale, che risulterebbe unito in soluzione solida al semplice FeS, avrebbe la composizione $5\,Sb_2S_3 . 6\,PbS$, non ancora conosciuta, e non chiaramente spiegabile se non ricorrendo a formule complicate, escludono la sovraccennata ipotesi.

In qualunque dei due modi sopradiscussi si voglia considerare il minerale, ne risulta che si tratta di una soluzione solida; ed è desiderabile che altre analisi di solfosali vengano ad arricchire i dati sperimentali già esistenti, in modo da permettere un unico criterio per l'interpretazione di un gruppo di minerali tanto importante.

(1) loc. cit.
(2) Riv. min. crist. it., vol. XLVII, pag. 50.

Chimica-fisiologica. — *Sulle proprietà enzimatiche del sangue di fronte al glicosio. V: Sulla glicolisi del sangue circolato con glicosio nel fegato-milza-rene-muscolo.* Nota del dott. Ugo Lombroso, presentata dal Socio L. Luciani.

Nelle ricerche precedenti abbiamo constatato che il pancreas e l'intestino sono capaci di provocare la formazione di un attivissimo enzima glicolitico nel sangue che circola in essi, quando a tale sangue è stata aggiunta una certa quantità di glicosio.

Dovevamo considerare tale risultato come dovuto ad una specifica attitudine reattiva dei tessuti esperimentati, o invece era esso l'esponente di una reazione generica di tutti i tessuti dell'organismo quando vengono irrorati da un sangue ricco di glicosio?

Era sommamente importante risolvere questo problema, perchè, se fosse stato dimostrato che tutti gli organi sono capaci di provocare l'insorgere di un attivo enzima glicolitico, quando circola in essi sangue con glicosio, il isultato ottenuto col pancreas e l'intestino non avrebbe avuto quel significato che in via di ipotesi gli si era attribuito. Che cioè questi organi abbiano normalmente la funzione di elaborare l'enzima glicolitico, e che tale funzione si esalti quando in essi circoli quella sostanza (glicosio) sulla quale si esplica l'azione dell'enzima.

Se invece si fosse potuto dimostrare che soltanto il pancreas e l'intestino sono capaci di reagire alla circolazione di sangue e glicosio con la formazione di un attivo enzima glicolitico, un altro interessante problema si sarebbe affacciato. Quello cioè di spiegare il meccanesimo mediante il quale altri organi, milza, muscolo, fegato, rene, sono capaci di distruggere il glicosio in essi circolante, sciolto in sangue od in liquido di Tjrode.

Si sarebbe forse allora potuto ammettere che in questi ultimi organi la distruzione del glicosio avveniva in virtù di un'azione specifica del loro metabolismo funzionale, indipendentemente dall'intervento di enzimi glicolitici riversantisi all'esterno.

Per risolvere tale interessante problema ho praticato numerose esperienze con la circolazione dei più importanti tessuti dell'organismo, milza, muscolo, fegato, rene. Le ricerche furono per ora limitate alla circolazione di sangue con glicosio; ed in alcuni casi, per risparmiare troppo numerosi dosaggi, mi sono soltanto interessato di determinare la glicolisi effettivamente svoltasi, senza preoccuparmi del fenomeno della condensazione del glicosio: vale a dire ho praticato i dosaggi dopo avere idrolizzato il sangue

con HCl per liberare il glicosio eventualmente sintetizzato. Però nella maggior parte delle esperienze ho anche studiato il fenomeno della condensazione.

Per ciò che riguarda la tecnica esperimentale ed i metodi adoperati nelle determinazioni, valgono le avvertenze date nelle precedenti Note.

Per brevità non riferisco i dosaggi eseguiti per confronto col sangue non circolato, ma semplicemente quelli eseguiti col sangue dopo la circolazione. In tutte le esperienze praticate col fegato la quantità di glicosio rinvenuta nel sangue fu sempre e notevolmente superiore a quella del sangue campione (per il riversarsi di glicosio proveniente dal glicogeno epatico).

In tutti gli altri organi fu sempre minore, ma la diminuzione non risultò costante per grado e rapidità, ma fu or più or meno in questo o quell'altro organo senza regola fissa. Di ciò verrà trattato più ampiamente, riferendo le ricerche eseguite appunto con lo scopo di determinare l'attitudine dei varî tessuti ad utilizzare il glicosio.

ESPERIENZE

CON LA CIRCOLAZIONE DI SANGUE O GLICOSIO NEL FEGATO.

I. — Cane di kgr. 4.700. Fegato esperimentato, peso gr. 125; dopo gr. 175. Circolazione con 300 cc. sangue 0.6 % glicosio. Durata circolazione ore 1 1/4. Pressione 40-60 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	. . . .	potere riducente	= 112.4	mgr.	glicosio
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 119.6	»	»
Dopo 4 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 105.6	»	»
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 119.2	»	»
Dopo 8 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 108.8	»	»
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 115.6	»	»
Dopo 20 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 105.6	»	»
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 108.2	»	»

II. — Cane di kgr. 9.400. Fegato esperimentato, peso gr. 215; dopo gr. 300. Circolazione con 500 cc. sangue 1 % glicosio. Durata circolazione ore 1. Pressione 30-50 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	. . . .	potere riducente	= 126.6	mgr.	glicosio
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 127.4	»	»
Dopo 3 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 120.4	»	»
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 121.2	»	»
Dopo 6 ore di termostato	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 120.6	»	»
Dopo 20 ore di termostato	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 92.5	»	»

III. — Cane di kgr. 11. Fegato esperimentato, peso gr. 220; dopo gr. 270. Circolazione con 500 cc. sangue con gr. 2.5 glicosio. Durata circolazione ore 1. Pressione 40-60 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	. . . .	potere riducente	= 103 6	mgr. glicosio
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 106.3	» »
Dopo 3 ore di termostrato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 101.2	» »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 105.8	» »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 104.2	» »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 104.6	» »

MILZA.

I. — Cane di kgr. 11. Milza, peso gr. 40; dopo gr. 55. Circolazione con 250 cc. sangue 0.5 °/₀ glicosio. Durata circolazione ore 1 1/4. Pressione 80-130 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	. . . .	potere riducente	= 48	mgr. glicosio
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 51.2	» »
Dopo 3 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 47.9	» »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 50.4	» »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 46.8	» »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 17.6	» »

II. — Cane di kgr. 9.400 Milza, peso gr. 50; dopo gr. 75. Circolazione con 200 cc. sangue 1 °/₀ glicosio. Durata circolazione ore 1 1/4. Pressione 80-149 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	. . . .	potere riducente	= 91.8	mgr. glicosio
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 96.2	» »
Dopo 3 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 88.1	» »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 90.2	» »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 88.6	» »
Dopo 12 ore di termostato	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 85.2	» »

III. — Cane di kgr. 14.5. Milza, peso gr. 55; dopo gr. 70. Circolazione con 250 cc. sangue 0.5 °/₀ glicosio. Durata circolazione ore 1. Pressione 80-150 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	. . . .	potere riducente	= 46.9	mgr. glicosio
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 49.8	» »
Dopo 2 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 45.4	» »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 49.2	» »
Dopo 4 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 45.8	» »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 48.6	» »
Dopo 12 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 25.6	» »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 25.6	» »

RENE.

I. — Cane di kgr. 7.900. Rene, peso gr. 25; dopo gr. 31. Circolazione con 250 cc. sangue 0.5 % glicosio. Durata circolazione ore 1. Pressione 80-150 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	idrolizzato con HCl	potere riducente	= 50.8 mgr. glicosio
Dopo 3 ore di termostato	10 cc. » »	» » » »	» »	= 48.1 » »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc. » »	» » » »	» »	= 47.2 » »

II. — Cane di kgr. 7.200. Rene, peso gr. 22; dopo gr. 30. Circolazione con 120 cc. sangue 0.5 % glicosio. Durata circolazione ore 1 $^1/_4$. Pressione 150-180 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	. . . .	potere riducente	= 45.9 mgr. glicosio
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 49.3 » »
Dopo 3 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 40.8 » »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 45.8 » »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 41.1 » »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 42.5 » »
Dopo 22 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 42.1 » »

III. — Cane di kgr. 14.5. Rene, peso gr. 50; dopo gr. 70. Circolazione con 250 cc. sangue 0.5 % glicosio. Durata circolazione ore 1 $^1/_2$. Pressione 150-180 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	. . . .	potere riducente	= 39.1 mgr. glicosio
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 40.8 » »
Dopo 4 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 35.7 » »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 36.4 » »
Dopo 12 ore di termostato	10 cc. » »	. . . .	» »	= 25.6 » »
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 27.2 » »

MUSCOLO.

I. — Cane di kgr. 7.900. Peso arto posteriore, gr. 500; dopo gr. 550. Circolazione con 250 cc. sangue 0.5 % glicosio. Durata circolazione ore 1 $^1/_4$. Pressione 160-180 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	. . . .	potere riducente	= 40.5 mgr. glicosio
	10 cc. » »	idrolizzato con HCl	» »	= 42.5 » »

Dopo 3 ore di termostato	10 cc. » » idrolizzato con HCl	» »	= 40.1 » »
Diopo 6 ore p termostato	10 cc. » » » » »	» »	= 36.2 » »

II. — Cane di kgr. 7.200. Peso arto, gr. 450; dopo gr. 460. Circolazione con 250 cc. sangue 0.5 % glicosio. Durata circolazione ore 1. Pressione 160-180 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	potere riducente	= 40.1 mgr. glicosio
	10 cc. » » idrolizzato con HCl	» »	= 43 2 » »
Dopo 4 ore di termostato	10 cc. » »	» »	= 39.1 » »
	10 cc. » » idrolizzato con HCl	» »	= 40.3 » »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc. » » » » »	» »	= 39.6 » »

III. — Cane di kgr. 6.500. Peso arto, gr. 400; dopo gr. 425. Circolazione con 250 cc. sangue 0.5 %. Durata ore 1. Pressione 160-180 mm. Hg.

Appena cessata la circolazione	10 cc. sangue circolato	potere riducente	= 46.2 mgr. glicosio
	10 cc. » » idrolizzato con HCl	» »	= 48.3 » »
Dopo 2 ore di termostato	10 cc. » »	» »	= 43 4 » »
	10 cc. » » idrolizzato con HCl	» »	= 45.2 » »
Dopo 6 ore di termostato	10 cc. » »	» »	= 43 0 » »
	10 cc. » » idrolizzato con HCl	» »	= 43.3 » »
Dopo 12 ore di termostato	10 cc. » » » » »	» »	= 35.8 » »

Conclusioni.

1. Facendo circolare nella milza-fegato-rene-muscolo, sangue contenente glicosio, si avverte una diminuzione, più o meno cospicua a seconda dei casi, del glicosio stesso. Fa eccezione il fegato, pel quale organo invece il sangue si dimostrò sempre (nelle presenti ricerche) più ricco di glicosio dopo la circolazione; tantochè non si potrebbe, dalla semplice indagine del glicosio nel sangue prima e dopo la circolazione, dedurre che il fegato sia capace di consumare il glicosio. Ma per ciò che riguarda la capacità degli organi a consumare il glicosio tratteremo a parte, essendo necessario riferire non soltanto quanto avviene nel liquido circolante, ma pure, come abbiamo dimostrato nelle precedenti ricerche sul metabolismo degli amino acidi, quanto avviene nell'organo stesso.

2. Il fenomeno della condensazione del glicosio nel sangue in seguito alla circolazione in questi organi (fegato, milza, rene, muscolo) non superò

mai la misura osservata nel sangue normale. Pel fegato poi si riscontrò che il glicosio era pressochè tutto allo stato libero.

3. In tutte le esperienze riferite si osservò che il potere glicolitico del sangue non venne modificato profondamente, come nelle esperienze eseguite col pancreas ed intestino. Si deve a questo proposito osservare che un certo aumento del potere glicolitico si ottenne specialmente per i periodi di permanenza in termostato, superiori alle sei ore. Ma, come abbiamo detto, i periodi che più interessano sono quelli brevi; sia perchè in essi non è probabile che si faccia sentire l'azione dei microrganismi (dato che non è possibile impedire l'inquinamento durante le nostre esperienze); sia perchè era appunto durante questi primi periodi che più si manifestava l'esaltazione del potere glicolitico nelle esperienze col pancreas ed intestino.

Del resto, dato che il glicosio viene consumato in misura cospicua, in tutti gli organi, e probabilmente mercè l'intervento di enzimi glicolitici (se di autogena elaborazione, o se forniti dal pancreas ed intestino, è questione sulla quale non è possibile per ora pronunciare una affermazione definitiva) era da attendersi che se ne potesse riversare nel liquido circolante. Con ciò non viene diminuita l'importanza del fenomeno fondamentale osservato, che cioè: il sangue contenente glicosio circolando nel pancreas ed intestino provoca il riversarsi nel sangue stesso, di un attivissimo enzima glicolitico, mentre circolando in altri organi (rene-fegato-milza-muscolo) o non modifica o modifica assai lievemente il potere glicolitico normale del sangue stesso.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 3°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 1-2.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 10.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia durante le ferie del 1916.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 4.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXV.° — Fascicolo 4°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Zoologia. — *Sulla maturazione dell'ovo, fecondazione e formazione del trophamnios nel* *P l a t y g a s t e r   d r y o m y i a e* Silv. (*Imenottero Proctotrupide*). Nota del Corrisp. F. SILVESTRI (1).

Il Marchal (2) nella sua interessante Memoria sulla biologia e sviluppo dei *Platygaster* non si occupò della maturazione dell'ovo e della fecondazione, nè potè accertare l'origine del *trophamnios*, che egli credette « se sépare dès le début de la segmentation », aggiungendo in nota: « l'origine serait même encore plus précoce, si les faits tout récemment signalés par Silvestri (1906) pour l'oeuf d'un Chalcidien, le Litomastix, sont susceptibles de généralisation et cette enveloppe (amniotique) dériverait alors des globules polaires ».

In questa Nota io espongo le osservazioni che ho potuto fare intorno ai punti non trattati o non chiariti dal Marchal; in seguito tratterò del resto dello sviluppo.

Il *Platygaster dryomyiae* mihi è un Imenottero Proctotrupide parassita della *Dryomyia Lichtensteinii* Fr. Löw (*Diptera*: *Cecidomyidae*), ai costumi della quale accenno prima di passare al *Platygaster*.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1916.

(2) Marchal P., *Recherches sur la biologie et le développement des Hyménoptères parasites.* II: *Les Platygasters.* Arch. zool. exper., (4) IV (1906), pp. 485-640, pl. XVII-XXIV.

Dryomyia Lichtensteinii Fr. Löw.

Gli adulti di questa specie fuoriescono dalle galle, a Portici, dal 10 aprile al 20 maggio con un massimo di comparsa qualche anno in maggio, qualche altro nella seconda quindicina di aprile e primi di maggio.

Le femmine depongono le uova sui germogli dell'annata di *Quercus ilex* L. sulle foglie in sviluppo tanto sul picciuolo quanto sulla pagina superiore e sull'inferiore, frequentemente tra le fogliuzze apicali, e sulla faccia esterna od interna delle stipole caduche. Sulla lamina delle fogliuzze le uova si trovano per lo più isolate e variamente sparse, meno frequentemente a gruppetti di due o più uova; invece tra le foglie apicali e alla base dei picciuoli e sulla faccia interna prossimale delle stipole, si trovano spesso in numero grande riunite in uno strato o a mucchi irregolari comprendenti talora anche più di un centinaio di uova.

Quando la femmina depone le uova, estroflette i segmenti posteriori dell'addome e li rivolge, specialmente l'ultimo, in varie direzioni con movimenti vermicolari, li introduce tra i peli delle fogliuzze o del germoglio o tra le stipole e con sforzo depone un uovo e così di seguito nello stesso punto o altrove.

L'uovo è lungo mm. 0,364 e largo mm. 0,091-0,104, appena concavo sopra un lato (dorsale) e pochissimo convesso sull'altro (ventrale) coi due poli convessi quasi egualmente. Il suo colore è rosso miniato.

Dopo 5-6 giorni in aprile nascono le larve, le quali vanno sulla pagina superiore delle foglie, se le uova si trovavano su altro punto, e si nascondono tra i peli e cominciano a pungere il parenchima, col risultato che la foglia in corrispondenza alle punture delle larve si infossa dalla pagina superiore all'inferiore formando una galla ipofilla uniloculare.

Questa a completo sviluppo è di forma semiovale compressa, è lunga di regola mm. 4, larga mm. 2,5, alta circa quanto larga. È tutta chiusa sulla pagina inferiore della foglia, mentre sulla pagina superiore presenta una fessura longitudinale che ha i margini affatto avvicinati fra di loro, così che la cavità della galla non resta in comunicazione coll'esterno, finchè la larva, che è una per galla, non ha finito il suo accrescimento.

La larva si trasforma in pupa nella galla stessa alla fine di marzo o primi di aprile dell'anno successivo a quello della nascita e la pupa dà l'adulto sporgendosi col corpo attraverso un angolo della fessura epifilla della galla.

Il numero delle larve neonate, che si possono osservare sopra la pagina superiore di una foglia, naturalmente varia col numero di adulti di *Dryomyia* presenti sopra un albero. Io ne ho contate anche 157 sopra una lamina lunga 20 centimetri, ma il numero di galle che si può vedere sopra una foglia è quasi sempre inferiore a cento, frequentemente di 30 a 50 o al di

sotto di 30 fino ad 1. La galla è tipicamente solitaria; ma quando buon numero di galle si trovano sulla stessa foglia possono essere avvicinate e anche congregate a due o tre o più, conservando però cavità separate.

Platygaster dryomyiae Silv.

Comparsa degli adulti. Gli adulti del *Platygaster dryomyiae* compaiono in aprile ed in maggio contemporaneamente agli adulti della *Dryomyia*, ma rispetto alla massima comparsa di quest'ultima il massimo loro numero è di 1-4 giorni in ritardo. Essi sono molto attivi, ma toccati si fermano, raccolgono rapidamente contro il corpo tutte le appendici e si lasciano cadere per rimettersi dopo pochi secondi in moto. Si cibano volentieri di sostanze zuccherine, ma in cattività vivono pochi giorni anche se nutriti e tenuti con cura. Quando fuoriescono allo stato adulto dalla galla di *Dryomyia* hanno già gli organi genitali completamente sviluppati, provvedono all'accoppiamento e cercano subito di deporre le uova.

Deposizione delle uova. La femmina depone le uova nelle uova della *Dryomyia* o anche nelle larve neonate; giunta sopra una foglia di elce che abbia uova di *Dryomyia* si pone a camminare sveltamente e va tastando con rapidi movimenti delle antenne la superficie. Toccato un uovo si porta un poco innanzi o di fianco ad esso, poi si ferma; piega le antenne ad angolo acuto tra lo scapo ed il pedicello, l'addome un poco ad arco colla convessità in alto ed estratto l'ovopositore comincia a dare qualche colpo in basso, a destra o a sinistra, finchè toccato l'uovo vi introduce la punta dell'ovopositore e rimane in tale posizione per circa 30 secondi, dopo i quali, toglie dall'uovo l'ovopositore, allunga in dietro l'addome strofinando l'ovopositore sulla foglia un paio di volte e poi torna a cercare un altro uovo.

La femmina è attivissima nel deporre le uova. Il numero delle uova, che ciascuna di esse depone, è molto grande essendo uova piccolissime e riempiendo, quando sono tutte sviluppate, ovario e ovidotti.

In un uovo di *Dryomyia* possono essere deposte, da varie femmine di *Platygaster*, più uova; ma di esse una o al massimo due possono compiere l'ulteriore sviluppo fino a larva completa nella larva della *Dryomyia*.

Sviluppo (sunto). Lo sviluppo del *Platygaster* comincia nell'ovo o nella larva neonata della *Dryomyia* e continua gradatamente con quello della larva della *Dryomyia* fino a marzo o primi di aprile dell'anno successivo, epoca in cui la larva del *Platygaster* divora tutte le parti molli della larva della *Dryomyia*, lasciando di essa solo il dermascheletro, sotto del quale si trasforma in pupa. Questa, sempre contenuta nella galla della *Dryomyia*, si trasforma in pochi giorni in adulto, che fuoriesce nell'epoca sopra indicata.

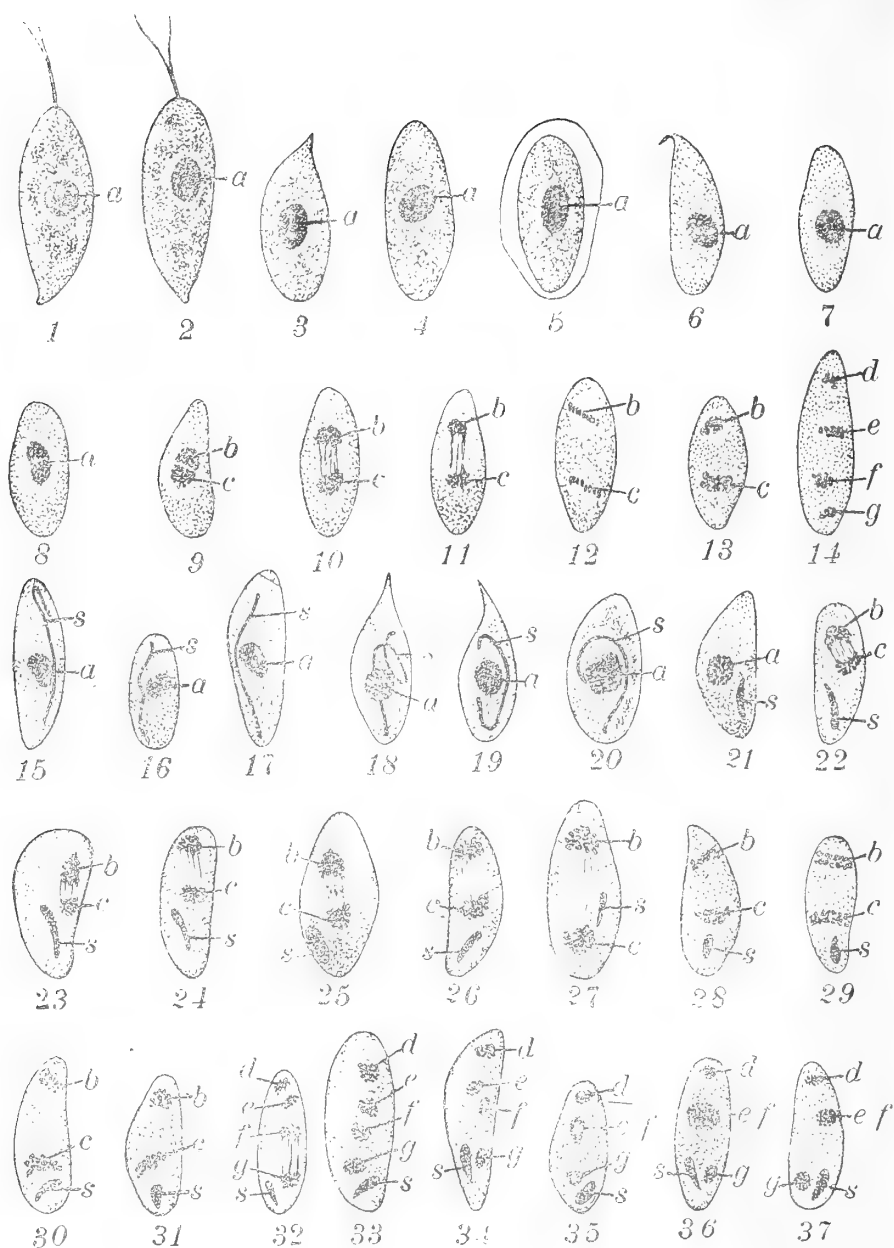



Fig. I. — 1-2. Ova ovariche esaminate a fresco; 3-14. ova partenogenetiche dopo la deposizione fino alla formazione del 2° globulo polare (nella figura 5 è disegnato anche il chorion per azione del fissativo (sublimato alcoolico acetico) distaccato dall'ooplasma; 15-37, ova fecondate fino alla formazione del pronucleo maschile e femminile vicini a coniugarsi: *a*) nucleo dell'ovocite di primo ordine; *b*) primo globulo polare; *c*) nucleo dell'ovocite di secondo ordine; *d*) nucleo figlio distale del primo globulo polare; *e*) nucleo figlio prossimale del primo globulo polare; *f*) secondo globulo polare; *g*) pronucleo femminile; *s*) spermatozoo e pronucleo maschile.

(Tutte queste figure come quelle della fig. II, sono state disegnate con camera lucida Abbe-Apathy sul piano del tavolino cogli ingrandimenti oculare 8 compens. e obbiettivo 2 mm. apocr. Koristka).

Ovo ovarico.

L'uovo ovarico del *Platygaster dryomyiae* (fig. I, 1-2) è estremamente piccolo misurando senza appendici μ 15-17 in lunghezza e 7-8 in larghezza; ha una forma ovoide o a limone ed è fornito ad un polo di una sottile appendice bifida, lunga circa quanto metà dell'ovo, e di una brevissima e stretta sporgenza al polo opposto. L'appendice si vede già abbastanza osservando l'uovo a fresco in soluzione fisiologica; diventa molto distinta osservandolo in soluzione diluita di picrocarminio. È circondato da un sottilissimo chorion, che diventa ben distinto quando è trattato con acido acetico; ha un ooplasma che a fresco mostra alcune gocciole di sostanza rifrangente irregolari per grandezza e contorno, distribuite irregolarmente in mezzo al resto che appare finamente granuloso, ed ha un grosso nucleo quasi centrale.

Nelle uova fissate col liquido Carnoy (alcool assoluto ed acido acetico) o di Mingazzini e colorite all'ematossilina ferrica o con emallume si distingue il grosso nucleo quasi centrale formato di una massa di cromatina compatta e nell'ooplasma si vedono piccolissimi spazî vacuolizzati di forma irregolare e variamente disposti in mezzo ad una sostanza protoplasmatica che si colora uniformemente.

Formazione e destino dei globuli polari.

L'ovo appena deposto (fig. I, 3-7) ha la struttura dell'ovo ovarico completamente sviluppato e sopra descritta, notando però che l'appendice scompare del tutto o quasi; e che se è un ovo deposto da femmina fecondata, può contenere lo spermatozoo (fig. I, 15-20). Tanto l'uovo che non ha ricevuto lo spermatozoo, come quello fecondato forma due globuli polari. La prima divisione di maturazione in questa specie avviene per mitosi, ma secondo un tipo che si avvicina a quello noto per la divisione nucleare di alcuni Protozoi (p. es. *Trichosphaerium*); infatti il nucleo dell'ovocite di primo ordine nella profasi presenta la cromatina divisa in granuli (cromosomi ?) molto avvicinati gli uni agli altri e confusi da non potersi distintamente vedere nemmeno a forti aumenti, così che il nucleo ha l'apparenza quasi di una morula (fig. I, 21); nella metafasi (fig. I, 8-11) l'una metà del nucleo si allontana gradatamente dall'altra senza che si sia formato un fuso evidente con piastra equatoriale. Le due metà del nucleo, che si allontanano fra di loro, si vedono riunite da fili acromatici fino a che il nucleo prende un aspetto di manubrio. Nell'anafase i cromosomi sono sempre molto avvicinati fra di loro e non bene distinguibili gli uni dagli altri.

La seconda divisione di maturazione (fig. I, 31-33) e la divisione del primo globulo polare sono sincrone; in tale periodo i cromosomi sono abba-

stanza distinti, ma non tanto da potersi vedere il limite dell'uno da quelli dell'altro e da potersi contare. A seconda divisione compiuta (fig. I, 14 e 33-34) il secondo globulo polare si trova verso il centro o nella metà anteriore dell'uovo e molto vicino al nucleo prossimale dei due derivati dalla divisione del primo globulo polare; la metà distale del primo globulo rimane vicino al polo anteriore dell'uovo, il pronucleo femminile sempre nella metà posteriore dell'uovo in vicinanza dello spermatozoo. I tre nuclei dei globuli polari ed il pronucleo femminile si presentano ora con cromatina addensata quasi quanto quella dello spermatozoo.

Poco dopo che è avvenuta la formazione dei globuli polari, si nota la fusione del secondo globulo col nucleo prossimale del primo, così che nella parte anteriore dell'uovo (fig. I, 35-37) si vedono due masse nucleari invece di tre. Talvolta anche il nucleo distale del primo globulo polare si unisce al nucleo prossimale ed al secondo globulo polare ed in questo caso la parte anteriore dell'uovo (fig. II, 4) presenta una sola massa nucleare. Quest'unica massa nucleare o le due masse nucleari derivate dai globuli polari diventano paranucleo del *trophamnios*, come in seguito sarà detto.

Nell'ooplasma fino a questo periodo dello sviluppo non si nota evidente alcun cambiamento.

Fecondazione.

Nell'uovo fecondato da poco deposto (fig. I, 15-20) si vede lo spermatozoo vermicolare, disposto longitudinalmente per quasi tutta la lunghezza dell'uovo facendo una curva più o meno grande o ripiegato colla parte posteriore su sè stesso, mentre l'anteriore raggiunge, o quasi, il polo posteriore dell'uovo. In seguito, dopo circa tre ore dalla deposizione, lo spermatozoo si contrae nella parte posteriore dell'uovo, si accorcia, si ingrossa un poco e costituisce un pronucleo maschile che ha una leggera forma a pistillo (fig. I, 21-34). Tale pronucleo è composto di una densa massa di cromatina e durante la prima divisione di maturazione e anche la seconda conserva la stessa forma e lo stesso posto. Compiuta la formazione dei globuli polari, il pronucleo femminile viene a trovarsi nella parte posteriore dell'uovo vicino al pronucleo maschile ed ha prima l'aspetto di un nucleo a cromatina condensata, poi comincia ad allargarsi un poco, a mostrare la cromatina sotto forma di granuli, mentre altrettanto avviene del vicino pronucleo maschile (fig. I, 37), finchè l'uno e l'altro si toccano e si confondono formando il primo nucleo di segmentazione. Questo assume subito una forma vescicolare con membrana e con cromatina a reticolo e a granuli.

A fecondazione terminata (fig. II, 1-5), a circa 20 ore dopo la deposizione, l'uovo del *Platygaster* conserva la forma e la grandezza che aveva al momento della deposizione, ha un nucleo vescicolare (primo nucleo di segmentazione) nella metà posteriore, due nuclei (qualche volta uno) con cro-

matina addensata derivati dai globuli polari, come sopra ho detto, nella metà anteriore. L'ooplasma in questo periodo si presenta molto rado intorno al nucleo di segmentazione.

Distinzione della cellula embrionale e del trophamnios.

Formatosi il primo nucleo di segmentazione, a poco a poco una piccola massa di ooplasma circostante ad esso si separa dal resto e forma col nucleo una cellula, che è affatto distinta ed è situata nella metà posteriore dell'ovo (fig. II, 6-10). Questa è la prima cellula di segmentazione la quale

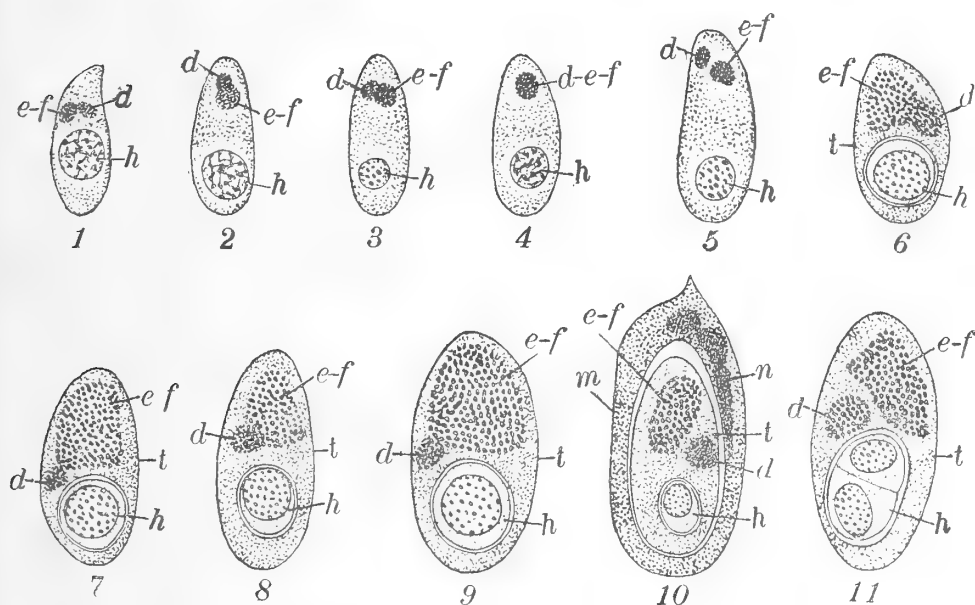



Fig. II. — 1-5. Ova col primo nucleo di segmentazione circondato da ooplasma non ancora separato dal resto; 6-9, ova colla prima cellula embrionale distinta dal resto dell'ooplasma; 10, ovo allo stesso stadio dei precedenti, ma circondato da cisti avventizia; 11, ovo con due cellule embrionali; *d*) nucleo figlio distale del primo globulo polare; *d-e-f*) nucleo derivato dalla fusione dei nuclei figli del primo globulo polare col secondo globulo polare; *e-f*) nucleo derivato dalla fusione del nucleo figlio prossimale del primo globulo polare e del secondo globulo polare; *h*) primo nucleo di segmentazione (nelle figure 1-5) o prima cellula di segmentazione (nelle figure 6-10); *m*) cisti avventizia; *n*) nucleo della stessa; *t*) trophamnios.

rimane completamente circondata dal resto dell'ooplasma, che è disposto in strato sottile nella metà posteriore dell'uovo e in strato alquanto spesso (lungo circa la metà dell'ovo) nella anteriore. Da questo momento l'uovo è nettamente distinto in una parte embrionale costituita dall'unica cellula di

segmentazione ed in una parte polare, la quale assume una funzione di protezione e forse di nutrizione e che è il *trophamnios*.

Mentre si inizia e procede la distinzione dell'uovo in cellula embrionale ed in *trophamnios* i due nuclei (fig. II, 7-10), o l'unico nucleo, derivati dai globuli polari cominciano ad allargarsi, la loro cromatina si divide in piccoli granuli che si espandono per la maggior parte della metà anteriore del *trophamnios*. In tale diradamento ed allargamento il nucleo derivato dalla metà distale del primo globulo polare resta un poco in ritardo su quello formatosi per fusione della metà prossimale del primo globulo polare col secondo globulo, però non tarda anch'esso ad assumere un aspetto uguale a quello dell'altro, col quale pure a poco a poco si può confondere.

Essi formano il paranucleo.

In questo periodo, o poco più tardi, l'ovo del *Platygaster* (fig. II, 10) è inglobato da una cellula embrionale della larva ospite, la quale cellula ipertrofizzandosi forma una cisti avventizia intorno al *trophamnios*.

Conclusione.

Nel *Platygaster dryomyiae*, che è un Imenottero della famiglia *Proctotrupidae*, la maturazione dell'ovo, la fecondazione e la distinzione della prima cellula embrionale dall'ooplasma polare, che formerà il *trophamnios*, hanno luogo in modo simile a quello da me [1] descritto per varî Imenotteri parassiti della famiglia *Chalcididae*.

[1] Silvestri F., *Contribuzioni alla conoscenza biologica degli Imenotteri parassiti*. I: *Biologia del* Litomastix truncatellus (Dalm). Ann. R. Sc. Agr. Portici, vol. VI (1906) e Boll. Labor. Zool. R. Sc Agr. Portici, vol. I, 1906. pp. 17-64; Idem, *Contribuzioni* etc. II: *Sviluppo dell'*Ageniaspis fuscicollis (Dalm). Boll. Labor. Zool. R. Sc. Agr. Portici, vol. III, 1908, pp. 30-53; Idem, *Prime fasi di sviluppo del* Copidosoma Buyssoni (Mayr), *Imenottero Calcidide*. Anatomischer Anz., XLVII (1914), pp. 45-56; Idem, *Struttura dell'ovo e prime fasi di sviluppo di alcuni Imenotteri parassiti*. I: *Encyrtus Mayri* Masi. Boll. Labor. Zool. R. Sc. Agr. Portici, vol. X, 1915, pp. 66-72.

Matematica. — *Sull' iterazione delle funzioni di variabili reali.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

1. In questa breve Nota è assegnata una condizione sufficiente affinchè le iterate successive d'una funzione di una variabile reale, ottenute partendo da un valore x, convergano tutte ad un valore X, radice dell'equazione

$$f(X) = X,$$

per x qualunque, scelto in un intorno di X.

Lo stesso problema [2] si può porre per una n-pla di funzioni di n variabili reali, ove si studii l'intorno della n-pla soluzione del sistema

$$f_1(X_1, \dots, X_n) = X_1; \dots;$$

il teorema che enunciamo e la dimostrazione data, valgono ancora. Premettiamo un lemma:

Secondo che le iterate d'una funzione $f(x)$ convergono o no ad un valore limite X, partendo da $x = x_0$, le iterate della funzione φ, definita da

$$\varphi(g(y)) = g(f(y)),$$

ottenute partendo da un valore iniziale $y = y_0 = g(x_0)$, convergeranno o no al limite $Y = g(X)$, se la funzione g è invertibile e se essa e la sua inversa γ sono monotòne nel campo.

Infatti, in tal caso la g e la γ sono continue, e si può porre

$$\varphi(y) = g(f(\gamma(y))),$$

e con la solita notazione delle iterate

$$\varphi_n(y) = g(f_n(\gamma(y)));$$

epperò, posto $y = g(x)$,

$$\varphi_n(g(x)) = g(f_n(x));$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1916.

[2] La stessa quistione è stata trattata recentemente del sig. Tricomi: la condizione che egli assegna è un caso specialissimo di quella qui enunciata. — Per la bibliografia dell'argomento si può vedere la Nota del Tricomi: *Un teorema sulla convergenza delle successioni* ecc. (Giorn. Mat. di Battaglini, vol. LIV, ser. 3ª, 1916).

da cui, per la continuità di g e γ, si trae

$$\lim \varphi_n(y_0) = \lim \varphi_n(g(x_0)) = \lim g(f_n(x_0)) = g(\mathrm{X}) \quad (n \to \infty).$$

Se, in particolare, scegliamo come g la funzione $x - \mathrm{X}$, avremo che Y diventa zero, e la φ si annulla per $y = 0$. Quindi noi potremo, senza ledere la generalità, ridurci al caso che la $f(x)$ si annulli per $x = 0$ e che l'origine sia proprio il punto attorno a cui studiamo le iterate.

2. L'enunciato del teorema, per le funzioni di una variabile, è il seguente:

Se una funzione $f(x)$ che si annulla per $x = 0$, si può racchiudere tutta (1) *in un quadrato avente la retta $y = x$ come diagonale, il quale comprenda l'origine almeno sul contorno; se inoltre soddisfa, insieme ai suoi valori-limiti nei punti di discontinuità, alla*

$f(x) \langle\langle\, [w, \psi(x)]$ (si legga inclusa nell'intervallo, estremi esclusi)

ove la ψ è una funzione nulla per x eguale a zero, monotona, soddisfacente alla $\psi(\psi(x)) = x$; allora, scelto un x qualunque sulla porzione di asse interna al quadrato, le iterate della f, ottenute partendo da x, convergono a zero.

Cominciamo dall'osservare che la ψ è allora una funzione a periodo di iterazione 2: si ha cioè

$$\psi(\psi(x)) = x \; ; \; \psi(\alpha) = \beta \; ; \; \psi(\beta) = \alpha .$$

Siano ora

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \ldots$$

i successivi iterati della f; si abbia cioè

$$f(x_{n-1}) = x_n .$$

Poniamo $\mathrm{I}_n = (x_n, \psi(x_n))$: avremo

$$\mathrm{I}_{n+1} \langle\langle\, \mathrm{I}_n .$$

Infatti, per le ipotesi fatte,

$$x_{n+1} = f(x_n) \langle\langle\, [x_n, \psi(x_n)] ;$$

cioè

$$x_{n+1} \langle\langle\, \mathrm{I}_n .$$

(1) Se soddisfa cioè alle condizioni

$$-\lambda_1^2 \leq f(x) \leq +\lambda_2^2$$
$$-\lambda_1^2 \leq x \leq \lambda_2^2 .$$

Ora è facile vedere che, per le condizioni imposte, la ψ è negativa per x positivo, e positiva per x negativo: in caso contrario non potrebbe essere monotona, a periodo d'iterazione 2, e nulla per $x = 0$. Quindi l'intervallo I_n avrà un estremo positivo b_n ed uno negativo a_n (qualunque sia n) che coincidono, a meno dell'ordine, con x_n, $\psi(x_n)$ [si ha quindi: $\psi(a_n) = b_n$, $\psi(b_n) = a_n$].

3. Se ξ è un valore negativo dell'intervallo I_n, sarà, per la monotonia di ψ,

$$0 < \psi(\xi) \leq \psi(a_n) ;$$

se invece è un valore positivo, per la stessa ragione avremo

$$0 > \psi(\xi) \geq \psi(b_n) ;$$

i due segni d'eguaglianza sono raggiunti solo per $\xi = a_n$ o $\xi = b_n$. In ogni caso però, se escludiamo gli estremi, si ha

$$\psi(b_n) < \psi(\xi) < \psi(a_n) .$$

Ma, per le proprietà della ψ, essendo già $b_n = \psi(a_n)$, avremo (¹)

$$a_n = \psi(b_n) < \psi(\xi) < b_n = \psi(a_n) .$$

In particolare, se $\xi = x_{n+1}$, avremo

$$\varphi(x_{n+1}) \ll I_n ;$$

e tenuto conto che anche

$$x_{n+1} \ll I_n ,$$

avremo

$$I_{n+1} \ll I_n .$$

Quindi gli intervalli I_{n+h} sono tutti interni ad I_n; epperò i loro estremi inferiori formano una successione negativa crescente $a_0, a_1, \ldots$; i superiori ne formano un'altra positiva decrescente $b_0, b_1, \ldots$ con la relazione

$$\psi(a_n) = b_n \ ; \ \psi(b_n) = a_n .$$

4. Siano α e β i due limiti della successione a_n e della successione b_n; per la continuità (²) di ψ, sarà $\psi(\alpha) = \beta$, $\psi(\beta) = \alpha$, e possiamo avere i seguenti casi:

(¹) Si verificano quindi contemporaneamente le relazioni

$$u \ll [v, \psi(v)] \quad , \quad \psi(u) \ll [v, \psi(v)] .$$

(²) Se la ψ non fosse continua, basterebbe che fosse

$$\psi(\alpha) = \lim\sup \psi(\alpha - 0)$$

per α negativo, e

$$\psi(\beta) = \lim\sup (\beta + 0)$$

per β negativo: cioè la ψ sarebbe semicontinua superiormente a destra per x positivo ed a sinistra per x negativo.

Caso I. Fra le a si trovano infinite x_n, e fra le b anche; le x, supposto per semplicità x_0 negativo, saranno quindi distribuite nelle a, b nel seguente modo:

$$a \equiv x_0, x_1, \dots x_m \quad , \psi(x_{m+1}) \dots \psi(x_n), x_{n+1} \quad , \dots, x_p \quad , \psi(x_{p+1}), \dots, \dots$$
$$b \equiv \psi(x_0) \quad , \dots \psi(x_m), x_{m+1} \quad \dots x_n \quad , \psi(x_{n+1}), \dots, \psi(x_p), x_{p+1} \quad , \dots, \dots$$

Consideriamo la successione $x_m, x_p, \dots$: essa tenderà ad α; così la successione $x_{m+1}, x_{p+1}, \dots$ tenderà a β.

D'altra parte però, $x_{m+1} = f(x_m)$; $x_{p+1} = f(x_p) \dots$

Quindi, le $x_{m+1}, x_{p+1}, \dots$ devono anche tendere ad $f(\alpha)$, se la f è ivi continua: o, più generalmente, il loro punto limite β sarà uno dei limiti $f(\alpha \pm 0)$ se f è discontinuo. Si ha quindi che la successione decrescente positiva

$$x_{m+1}, x_{p+1}, \dots$$

avendo un solo limite, sarà

$$f(\alpha \pm 0) = \psi(\alpha);$$

il che si verifica solo per $\alpha = 0$, per le ipotesi fatte.

Quindi sarà

$$\lim a_n = \alpha = 0 \ ; \ \lim b_n = \psi(\alpha) = 0 \ ;$$

epperò anche $\lim x_n = 0$.

Caso II. Fra le a_n (o fra le b_n) si trova un numero finito di x.

Allora, da un certo m in poi, tutte le x_m appartengono alle b (o alle a).

Quindi la successione positiva decrescente (o negativa crescente)

$$x_m, x_{m+1}, \dots$$

tenderà al limite β (oppure α).

Ma $f(x_m) = x_{m+1}, \dots$: quindi β è uno dei valori $f(\beta \pm 0)$ [α è uno dei valori $f(\alpha \pm 0)$].

Ed anche questo avviene solo per $\beta = 0$ (o $\alpha = 0$): quindi sarà anche $\psi(\beta) = \alpha = 0$ [e rispettivamente $\beta = \psi(\alpha) = 0$]: cioè gli intervalli I_n tendono a zero, e con essi le x_n.

Con questi due casi, perciò, resta esaurita la dimostrazione del teorema enunciato.

5. Per il caso di n funzioni di n variabili, il teorema e la dimostrazione sussistono inalterati. Bisogna solo fare le seguenti convenzioni (o altre analoghe). Una n-pla di valori $[\xi] \equiv (\xi_1, \dots \xi_n)$ è minore di un'altra $(\eta_1, \dots \eta_n)$ se ogni ξ non è minore del corrispondente η, ed almeno uno è maggiore.

Una n-pla di funzioni si dirà crescente o decrescente (monotona) se dalle

$$[\xi'] < [\xi'']$$

si ricava sempre

$$\left[f[\xi']\right] < \left[f[\xi'']\right]$$

oppure sempre

$$\left[f[\xi'']\right] > \left[f[\xi']\right].$$

La n-pla nulla è composta da n zeri. Alla retta $y = x$ corrisponde lo spazio definito da

$$[\xi] = [\eta]$$

cioè da $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2$, ... $\xi_n = \eta_n$; alla curva ψ lo spazio

$$[\eta] = \left[\psi[\xi]\right]$$

ove la n-pla $\psi_1, \dots, \psi_n$ rappresenta una n-pla monotona, nulla per $[\xi] = 0$, ed eguale alla propria n-pla inversa; alla curva f, la n-pla $[f]$; e così via pel quadrato ecc.

In particolare, se si scelgono come funzioni $[f]$ le funzioni

$$f_1(x_1 \dots x_n) = f(x_2)$$
$$f_2(x_1 \dots x_n) = f(x_3)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n(x_1 \dots x_n) = f(x_1),$$

si otterrà un teorema (come caso particolare di quello enunciato) riguardante le soluzioni del sistema

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_3 \dots f(x_n) = x_1.$$

Notiamo, infine, che nel teorema del Tricomi la curva ψ è rappresentata da due segmenti di retta, uscenti dall'origine, simmetrici rispetto alla $y = x$: ciò che è conseguenza della relazione $\psi(x) = x$.

6. Come corollarî del teorema generale da noi dato, si ricavano facilmente le seguenti condizioni sufficienti:

I. Se la $f(x)$ è compresa nel quadrato, non minore di x, per x negativo, ed è positiva per x positivo.

II. Se la $f(x)$ è compresa nel quadrato, non maggiore di x, per x positivo, ed è negativa per x negativo,

Basta considerare nel I caso come curva ψ quella che per x negativo è eguale a $+\lambda_2^2$ e per x positivo è zero; pel secondo caso, invece, la ψ per x negativo è nulla, e per x positivo ha il valore costante $-\lambda_1^2$, ambedue essendo nulle per $x = 0$.

Geofisica. — *Sulla dispersione sismica.* Risposta al professor E. ODDONE [1], di LUIGI DE MARCHI, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA [2].

Dalla discussione che il prof. Oddone fa delle mie due Note sulle onde sismiche superficiali, pubblicate in questi Rendiconti, egli è condotto a concludere che sono inammissibili ambedue le condizioni necessariamente impostemi per l'applicazione della teoria delle onde elastiche piane all'analisi dei sismogrammi; costanza delle proprietà elastiche e paragonabilità della sfera al piano. Io stesso avevo riconosciuto che tale applicazione non poteva essere che un tentativo di prima approssimazione a un problema enormemente complesso, ma mi pareva che segnasse almeno un passo in avanti sulla classica teoria dell'*onda di Rayleigh*, che è pur basata sulle stesse semplificazioni, e che i sismologi, compreso il prof. Oddone nella sua Memoria, accettano senza discussione. La teoria dava, se non altro, un fondamento al concetto della dispersione anomala che, come dice il mio egregio contradittore, *fu prospettato fin dall'inizio della sismometria, allorchè si vide che nei sismogrammi giungevano prima le onde rapidc e in seguito le onde lente.*

Egli crede però che io applico abusivamente tale teoria estendendola a onde di natura diversa, e qui mi pare che non abbia bene afferrato il mio pensiero. Secondo lui la formola

$$V = \sqrt{\frac{3\mu}{\varrho}\left(1 - \frac{\gamma_1^2 L^2}{4\pi^2}\right)}$$

che lega la velocità di propagazione alla lunghezza d'onda L e al coefficiente d'assorbimento γ_1, supposto costante, dice che *a partire dall'inizio delle onde* (S) *sino alla fine del sismogramma,* L *dovrebbe aumentare con continuità, con incremento totale assai piccolo, eguale a circa* $^2/_{10}$ *di* L.

Ora io ho detto invece che il sismogramma tipico rappresenterebbe una successione di *treni di onde*, ciascuno dei quali corrisponde a una scossa epicentrale ed è costituito da un numero *finito* di onde, quelle cioè in cui si puo scomporre la scossa medesima e che, simultanee all'origine, si separano durante la propagazione. In ogni treno le onde brevi (sempre secondo la teoria) precedono le onde lunghe, ma a queste possono succedere le onde

[1] Questi Rendiconti. vol. XXV, fasc. 1°.
[2] Pervenuta all'Accademia il 15 agosto 1916.

brevi di treni successivi. Nella sovrapposizione di parecchi gruppi d'onde di generazione successiva e ciascuna delle quali si propaga con velocità propria, sarà certamente difficile stabilire a quale treno ciascuna appartiene; io presi un esempio dall'opera di Knott, e mi parve che rispondesse alle conclusioni teoriche nel caso più semplice. Può considerarsi arbitraria l'assegnazione delle onde (l) allo stesso treno delle (S) (benchè io mi sia limitato ad affermare che *si possono considerare* come tali), ma in ciò fui confortato dal fatto che ambedue erano onde trasversali, mentre le (P) antecedenti e le (L) seguenti erano longitudinali [1].

Non vedendo tale contradizione tra teoria e fatti, io non poteva farmi suggerire di modificare in variabile la γ_1, che per il tipo stesso d'integrale assunto è per ipotesi costante. Io dissi solo che in una lunga traiettoria l'onda può attraversare regioni alle quali possono rispondere valori diversissimi di γ_1, intendendo però che in ogni regione si deve ritenere costante.

Il prof. Oddone fa un tentativo di applicazione della formola (1) nel caso di γ_1 variabile, ma non già variabile per tutte le onde col posto, bensì variabile in ogni posto con la lunghezza d'onda. « È naturale — egli dice — che un'onda superficiale corta interessi lo strato superficiale a rigidità piccola, dove la propagazione è lenta, mentre un'onda superficiale lunga interessi lo spessore di varî strati a rigidità media maggiore, dove la propagazione è più veloce ». È probabile, ma è un altro problema.

In questo nuovo problema sono dispostissimo a seguire il mio egregio critico, e ad ammettere che possono verificarsi ambedue i tipi di dispersione, che le mie formole non escludono, com'egli stesso dimostra [2], benchè, quando si tratta di onde tutte molto lunghe, quali sono le onde sismiche che arrivano a grandi distanze, l'influenza degli strati superficiali sia certamente

[1] Qui non accetto la correzione in *trasversali* suggerita dal prof. Oddone nella sua *errata-corrige* alle mie Note. La tabella di Knott da me riassunta definisce le (L), almeno nel caso del terremoto indiano del 1905, come longitudinali. Delle altre correzioni, che fortunatamente non importano correzione di concetto, lo ringrazio, confessandomi un correttore assai poco corretto.

[2] Le formole che egli deduce dalla (1) nell'ipotesi di $\gamma_1 = e^{-KL}$ (K costante) possono essere assai semplificate. Dalla (1) si ha infatti

$$dV = dL \sqrt{\frac{3\mu}{\varrho}} \left(1 - \frac{\gamma_1^2 L^2}{4\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (KL - 1)$$

la quale ci dice che si ha velocità crescente con la lunghezza (dispersione normale) o decrescente col crescere della lunghezza (dispersione anomala) secondo che KL è maggiore o minore di 1. Anche ammessa la legge di dipendenza di γ_1 da L, non conoscendo K, non si può dire oltre quale lunghezza si passi dalla dispersione anomala, valida per le onde più brevi, alla dispersione normale valida per le più lunghe. Il problema merita a ogni modo seria considerazione.

secondaria, cioè γ_1 possa assai probabilmente considerarsi come indipendente da L, in quanto tutte le onde interessano l'intera crosta terrestre a rigidità elevata.

Come ultimo argomento contrario, il prof. Oddone adduce il fatto che tra le velocità delle onde lunghe e quella dei secondi tremiti, nel terremoto indiano del 1905, si avrebbe il rapporto 0,5, mentre tra esse *deve* correre la relazione $V_L = 0{,}9\, V_S$, cioè la relazione che definisce l'onda di Rayleigh *solo valevole se il mezzo ha proprietà elastiche costanti*. Dunque tutta la discussione, e la formola (1), fu inutile?

Fisica. — *Su la polarizzazione detta reticolare.* I: *Effetto polarizzante delle fenditure sottili.* Nota preliminare di A. Pochettino, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

In una Nota relativamente recente [2] P. Zeemann richiama l'attenzione su una causa d'errore che può presentarsi in alcune ricerche di magneto-ottica e proviene dalla azione polarizzante che le fenditure sottili, quali si usano negli apparecchi spettroscopici, esercitano su la luce che le attraversa.

Fin dal 1861 infatti Fizeau [3] aveva osservato che la luce emergente da una fenditura molto stretta, della quale uno almeno dei bordi abbia potere riflettente, presenta una polarizzazione parziale normalmente ai bordi stessi. Nel 1892 Du Bois [4], in uno studio sul comportamento ottico di diversi reticoli (tutti però a costante enormemente maggiore della λ della luce usata), concludeva che la trasparenza dei reticoli stessi è maggiore per la luce polarizzata normalmente ai tratti del reticolo se questo *è metallico*, minore se *è scalfito su vetro*. Gli effetti riscontrati dal Du Bois in questo suo primo studio sono in generale piccolissimi; solo più tardi, ne le note ricerche compiute in collaborazione con Rubens [5], usando i raggi ultrarossi residui e reticoli di fili metallici, egli è riuscito ad ottenere effetti più cospicui, a raggiungere il cosidetto *punto di inversione* e a dimostrare l'esistenza anche di una polarizzazione parallelamente ai tratti del reticolo, che lo stesso Fizeau aveva del resto già intravisto. In una certa relazione con le osservazioni di Fizeau stanno le ricerche di Braun [6] sul comportamento ottico dei depositi

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1916.
[2] Phys. Zeit., *14*, pag. 95 (1913).
[3] Ann. de Chim. et Phys. (3), *63*, pag. 385 (1861): queste osservazioni furono ripetute e confermate da Ambronn: Wied. Ann., *48*, pag. 717 (1893).
[4] Wied. Ann., *46*, pag. 546 (1892).
[5] Wied. Ann., *49*, p. 593 (1893); Ann. d. Phys., *35*, pag. 243 (1911).
[6] Ann. d. Phys., *16*, pp. 1 e 238 (1905).

metallici, ottenuti volatilizzando un filo molto sottile di platino, di argento, ecc. con una energica scarica elettrica, e dei preparati istologici di legno colorati con l'oro; conviene osservare però che qui si tratta di sistemi la cui struttura è così fine da sfuggire ai metodi d'osservazione finora noti: il Braun la ritiene reticolare appunto dalle proprietà ottiche osservate.

I tentativi più recenti di trattazione teorica di questi fenomeni sono quelli di Schaefer e Reiche [1] e di Ignatowski [2]: in ambedue si considera il caso di un reticolo composto di fili cilindrici, supponendo però sempre che la costante del reticolo stesso sia molto piccola rispetto alla λ della radiazione incidente. Le conclusioni non sono quindi verificabili con l'osservazione nel campo dello spettro visibile; neppure del resto nel caso delle λ usate da Du Bois e da Rubens le formole meno approssimate dell'Ignatowski permettono un confronto soddisfacente con i dati dell'osservazione.

Le lacune e le contradizioni che si rilevano nelle osservazioni fatte finora su questo importante argomento, mi hanno indotto a riprendere l'esame di questi fenomeni appunto nel caso che maggiormente interessa e che sfugge, per ora, ad una trattazione teorica: cioè per la luce visibile. La ricerca è semplicemente iniziata e qui riferisco solo i risultati preliminari che possono interessare nel caso di ricerche polariscopiche su luce proveniente da fenditure sottili; mi riserbo di proseguire sistematicamente lo studio quando potrò procurarmi i mezzi opportuni per una lavorazione più accurata del materiale costituente i bordi delle fenditure da esaminare e gli strumenti necessarî per una indagine quantitativa approfondita. Le osservazioni, delle quali qui riporto i risultati, vennero tutte compiute con un microscopio a polarizzazione Leitz M I, e si riferiscono esclusivamente alla immagine « centrale » data dalle fenditure esaminate.

La prima fenditura studiata appartiene ad uno spettrometro Hilger: i suoi bordi, di metallo bianco inalterabile Hilger, sono così ben lavorati che si possono avvicinare ad una distanza anche inferiore [3] a 1 μ; non ho potuto però spingere l'osservazione fino a larghezze inferiori a 0,8 μ perchè, causa lo spessore dell'armatura, non mi fu possibile usare il condensatore del microscopio, nè d'altra parte mi potei giovare di una illuminazione molto intensa

(1) Ann. d. Phys., *35*, pag. 817 (1911).

(2) Ann. d. Phys., *44*, pag. 369 (1914).

(3) Questa distanza si determinò, per le fenditure più larghe, con un oculare micrometrico; per le più strette, projettando l'immagine data dall'obbiettivo, con un apparato microfotografico, su una lastra di vetro non smerigliato, ed osservando l'immagine risultante con un piccolo microscopio ad oculare micrometrico: più che una misura è un apprezzamento che mi è sembrato ad ogni modo più conveniente che non il giudizio ad occhio usato dal Fizeau, tanto più che il metodo, provato nel caso di quei preparati che si usano come oggetti di prova per gli obbiettivi microscopici e dei quali si conoscono le dimensioni, mi ha dato dei risultati soddisfacenti.

perchè allora la luce diffratta lateralmente ai bordi è troppo vivace e rende impossibile l'esame della immagine centrale. La luce emergente da questa fenditura comincia a presentare traccie di polarizzazione normale ai bordi (circa 3 $^{0}/_{0}$ per la luce rossa) [1] in corrispondenza ad una larghezza di 30 μ; man mano che questa diminuisce, la polarizzazione si va facendo più forte. In corrispondenza ad una larghezza di 6 μ circa, la luce emergente, quando la fenditura sia disposta con i bordi paralleli al piano di polarizzazione della luce (bianca) incidente, comincia a presentare una tinta bleu chiaro, la quale passa in bleu scuro se la larghezza della fenditura è di 3 μ e finalmente diventa violetta se la larghezza stessa si riduce a 1,5 μ; girando la fenditura nel suo piano anche di soli 10°, la luce emergente apparisce di nuovo bianca. La causa di ciò è la maggiore polarizzazione corrispondente alle λ più lunghe; infatti l'ammontare della polarizzazione è circa il doppio nel rosso che nel bleu [2]. In corrispondenza ad una larghezza di 0,8 μ si ha una polarizzazione normale ai bordi del 95 $^{0}/_{0}$ per la luce rossa e del 50-60 $^{0}/_{0}$ per la luce bleu.

Se disponiamo la fenditura fra nicol incrociati, a 45° su le loro sezioni principali e inseriamo al solito modo l'usuale lamina di gesso « Rosso I ordine », si osserva che la luce emergente presenta i noti colori di addizione e di sottrazione; ora, poichè non ho mai notato che la fenditura esaminata provocasse una rotazione del piano di polarizzazione della luce incidente e poichè d'altra parte, girando l'analizzatore, il colore osservato passa nel complementare, conviene concludere che le componenti della luce emergente polarizzate rispettivamente normalmente e parallelamente ai bordi della fenditura, *presentano una differenza di fase.*

Ecco così, oltre l'effetto polarizzante, un altro elemento di cui conviene tener conto. Questa differenza di fase corrisponde, nel caso che esaminiamo, ad un ritardo della componente polarizzata parallelamente ai bordi rispetto alla componente polarizzata normalmente ai bordi stessi; comincia a manifestarsi in corrispondenza ad una larghezza della fenditura di 17 μ, cresce [3] al diminuire della larghezza stessa ed è maggiore per la luce rossa che non per la bleu.

(1) La luce rossa e la luce bleu venivano ottenute ponendo avanti allo specchio del microscopio dei vetri colorati: il vetro rosso lasciava passare la luce da $\lambda = 0{,}65$ a $\lambda = 0{,}70$; il vetro bleu da $\lambda = 0{,}40$ a $\lambda = 0{,}45$.

(2) Usando uno spettroscopio oculare si vede che, in corrispondenza ad una larghezza di 3 μ, quando la fenditura sia disposta nella posizione suddetta, nello spettro della luce emergente manca quasi completamente la regione fino a $\lambda = 0{,}67$ e si ha un indebolimento molto forte fino a $\lambda = 0{,}65$; per una larghezza di 1,5 μ la porzione quasi mancante si estende fino a $\lambda = 0{,}65$ e l'indebolimento forte fino a $\lambda = 0{,}55$.

(3) Per stimare il valore di questa differenza di fase, in alcuni casi fu possibile usare un oculare munito di compensatore di Babinet; per gli altri si usò il metodo della mica compensatrice suggerito dal Kämpf (Ann. d. Phys., *16*, pag. 308 (1905).

Una fenditura con i bordi di nichelina, appartenente ad uno spettrofotometro König-Martens, mi diede sostanzialmente gli stessi risultati. Interessante è invece il comportamento di una fenditura appartenente ad uno spettrometro Steinheil: essa ha i bordi di ottone annerito, conservante però un certo potere riflettente; la luce emergente da essa presenta la solita polarizzazione parziale normalmente ai bordi, minore però, a parità di larghezza, di quella che si riscontra con la fenditura Hilger e non presenta accenno di differenza di fase; se si toglie l'annerimento, strofinando il metallo con ammoniaca, e si rendono lucenti i bordi, l'effetto polarizzante aumenta e compare una differenza di fase nettissima nello stesso senso di quella osservata per la fenditura Hilger.

Ho successivamente esaminate fenditure, preparate da me, con i bordi di diverse sostanze; le lamine rispettive venivano deposte su un portaoggetti assolutamente privo di birifrangenza propria.

La difficoltà maggiore si incontrò nella lavorazione dei bordi i quali vennero levigati su di una lastra di vetro da specchi ben piana usando smeriglio di finezza crescente e variando continuamente l'inclinazione del piano della lamina su la lastra di vetro se si voleva dare ai bordi una forma arrotondata; si sceglievano poi fra i numerosi pezzi preparati quelli che si prestavano meglio all'esame microscopico. Malgrado ogni cura non sono riuscito finora quasi mai ad avere bordi a profilo ben rettilineo, ma portando le due lamine a toccarsi ho sempre trovato dei tratti in cui il contatto fra i bordi mancava e veniva così a formarsi una fenditura di larghezza variabile, alcune porzioni della quale si prestavano abbastanza bene all'esame in questione. Vennero così studiate fenditure fra lamine di *zinco* (spessore delle lamine 0,4 mm.; bordi arrotondati); di *rame* (spessore 0,1 mm.; bordi arrotondati); di *argento* (spessore 0,9 mm.; bordi arrotondati); di *oro* (spessore 1 mm.; bordi piani, lucenti); di *vetro* (spessore 1,5 mm.; bordi arrotondati smerigliati); di *vetro* (spessore 0,16 mm.; bordi piani non smerigliati); di *ebanite* (spessore 1 mm.; bordi arrotondati, smerigliati).

Per quanto riguarda l'effetto polarizzante non ho riscontrato differenze sostanziali tra i comportamenti delle diverse fenditure; in *tutte*, almeno per larghezze non inferiori a 1 μ, la luce emergente presenta una polarizzazione parziale normalmente ai bordi, tanto più marcata quanto più stretta è la fenditura, e sempre maggiore per il rosso [1]. Notevoli diversità si rile-

[1] Evidente al riguardo è il caso dell'ebanite: se, disposte le due lamine molto vicine sul portaoggetti incollandovele sopra al solo orlo esterno, si usa luce solare molto intensa, questa riscalda vetro ed ebanite, ma la maggiore dilatabilità dell'ebanite fa sì che la fenditura si vada restringendo e, se essa è disposta parallelamente al piano di polarizzazione della luce incidente, la luce emergente presenta successivamente, al diminuire della larghezza, i colori bianco, bleu chiaro, bleu scuro, violetto ecc. Esperienze di controllo mostrano che l'effetto non è dovuto a birifrangenza acquistata dal vetro.

vano invece riguardo alla differenza di fase: mentre per le fenditure a bordi metallici la componente parallela ai bordi è, più o meno, sempre *ritardata* rispetto alla componente normale, per le fenditure a bordi di ebanite o di vetro la componente parallela ai bordi è *accelerata* rispetto alla componente normale. Poichè la differenza di fase ha lo stesso segno tanto nel caso di fenditure a bordi piani, lucenti, che nel caso di fenditure a bordi arrotondati, lavorati a smeriglio, la diversità di comportamento notata deve attribuirsi a la natura della sostanza costituente i bordi. In ambedue i casi però la differenza di fase va aumentando al diminuire della larghezza della fenditura, almeno fino a le larghezze minime osservate (circa 1 μ). Vi sarebbe dunque una diversità sostanziale fra il modo di presentarsi dell'effetto polarizzante e della differenza di fase: mentre il segno di questa dipende dalla sostanza costituente i bordi della fenditura, il senso del primo ne è indipendente, almeno per larghezze maggiori di 1 μ.

Posso confermare una osservazione di Fizeau: annerendo con nero fumo *tutti e due* i bordi di una fenditura, l'effetto polarizzante scompare; basta però anche un potere riflettente molto piccolo per avere l'effetto stesso in modo marcatissimo; oltre infatti che nel caso del vetro smerigliato, si ottengono effetti polarizzanti marcati con fenditure aventi i bordi di quel cartoncino, nero da un lato, rosso dall'altro, in cui sono avvolte le pellicole Kodak.

Ho anche esaminato il comportamento di fenditure praticate in strati metallici molto sottili: mi sono servito di specchi d'argento e d'oro con lo strato metallico di sottigliezza tale da essere nettamente trasparente e su di essi ho tracciato delle fenditure con il procedimento suggerito dall'Ambronn, cioè strisciando leggermente sulla superficie metallica (liberata dalla verniciatura protettrice) il dito intriso di olio in cui si è stemperato del finissimo rossetto inglese; si hanno così delle fenditure a bordi molto regolari fra le quali si possono scegliere quelle di larghezza conveniente. Per quanto riguarda l'effetto polarizzante, ho potuto constatare che, tanto per l'oro come per l'argento, si ha ancora una polarizzazione della luce emergente normale ai bordi un po' minore [1] (a parità di larghezza) che nel caso di fenditure a bordi spessi; essa comincia ad essere sensibile, nelle porzioni meno trasparenti, in corrispondenza ad una larghezza di 10 μ; cresce, al diminuire della larghezza stessa, dapprima lentamente, poi, a partire da circa 2 μ, più rapidamente fino a raggiungere per la luce rossa un massimo (polarizzazione totale) verso 0,4 μ. In corrispondenza ad una larghezza certo non superiore a 0,2 μ, la polarizzazione diventa nettamente parallela ai bordi, tanto per le fenditure su argento che per quelle su oro, tanto per la luce rossa che

[1] e tanto minore quanto minore è lo spessore dello strato metallico in cui è praticata la fenditura.

per la luce bleu. L'inversione deve dunque avvenire in corrispondenza ad una larghezza fra 0,4 μ e 0,1 μ a seconda della λ della luce incidente: infatti, per una fenditura in argento che stimerei larga 0,2 μ, ho trovato una polarizzazione ancora normale ai bordi quasi totale per il bleu, e nessuna traccia di polarizzazione sensibile per il rosso. In tutte queste fenditure, tanto in oro che in argento, qualunque sia la larghezza, purchè inferiore a 5 μ (1), la componente parallela ai bordi è *accelerata* rispetto alla componente normale; si ha dunque il contrario di quanto si verifica nelle fenditure fra lamine spesse.

Ora poichè, come esperienze apposite mi hanno dimostrato, lo stato di maggiore o minore lucentezza dei bordi, pure influendo sulla differenza di fase quanto al valore assoluto (2), non ne inverte mai il segno, e poichè, nel caso dell'argento, ricorrendo a depositi, per via chimica, di spessore via via crescente, sono giunto ad ottenerne di quelli (i più spessi) in cui la differenza di fase (nel senso su esposto) era appena sensibile, la differenza di comportamento nei due casi deve dipendere dalla enorme diversità di spessore dei bordi.

Per completare queste ricerche preliminari, ho esaminato anche delle fenditure fra bordi di inchiostro di China, rosso Congo, eritrosina, bleu di metilene, safranina, aurantia, ecc. Facendo una soluzione acquosa piuttosto concentrata di tali sostanze e deponendone una goccia su un portaoggetto, si ottiene, dopo essicazione, un deposito solido che presenta delle screpolature per lo più di profilo triangolare molto allungato, nelle quali è facile trovare dei tratti che si prestano all'osservazione. La luce emergente da queste fenditure (fino ad una larghezza di 0,5 μ) presenta una polarizzazione, più o meno marcata, sempre normale ai bordi, al solito maggiore per le fenditure più strette e più grande per la luce rossa che non per la bleu; per una larghezza di 0,5 μ questa polarizzazione è, per il rosso, quasi totale. La differenza di fase, per le fenditure in inchiostro di Cina, è molto piccola e nel senso che la componente parallela ai bordi è *accelerata* rispetto alla componente normale; nelle altre è sensibilmente nulla. È da notare che nei depositi di bleu di metilene, di rosso Congo e di aurantia le crepature si formano fra masse cristallizzate fortemente birifrangenti e dotate di vivaci colori superficiali.

Riassumendo: La luce, passando attraverso una fenditura molto stretta, subisce dunque una polarizzazione parziale. Dalle mie ricerche risulta che questa comincia ad essere sensibile in corrispondenza a larghezze diverse a seconda dello spessore, della forma e della lucentezza dei bordi; la sostanza che li costituisce sembra avere una influenza secondaria. Se i bordi sono ben

(1) Nelle fenditure di larghezza superiore non si nota differenza di fase sensibile.
(2) Il quale è minore in corrispondenza a minore lucentezza.

lucenti e spessi la polarizzazione comincia ad essere sensibile per una larghezza di 50 μ; per i bordi molto sottili, solo per una larghezza di 10 μ. Perchè questo effetto si verifichi è necessario che uno almeno dei bordi non sia assolutamente privo di potere riflettente, ma questo può essere anche molto piccolo. Man mano che la larghezza della fenditura diminuisce, la differenza di comportamento fra bordi di varie sostanze e di diverso grado di lucentezza va diminuendo, tanto che per le fenditure più sottili (larghezza $< 2\,\mu$) non si hanno più differenze marcate fra fenditure a bordi dielettrici o conduttori, trasparenti o opachi, isotropi o anisotropi, colorati o incolori. Fino in corrispondenza ad una larghezza di 0,3 μ la polarizzazione è sempre normale ai bordi, essa cresce col diminuire della larghezza pressochè linearmente, ma con due velocità diverse: assai lentamente fino a 1,5 μ e molto più rapidamente per larghezze inferiori; è meno marcata, a parità di larghezza, nelle fenditure a bordi molto sottili. Se la larghezza è inferiore a 0,2 μ, la polarizzazione diventa parallela ai bordi; l'inversione deve aver luogo per una larghezza di 0,2-0,3 μ. L'effetto è *in ogni caso* più grande per la luce rossa che non per la luce bleu.

Oltre a questa polarizzazione parziale, compare spesso anche una differenza di fase fra le componenti rispettivamente normale e parallela ai bordi. Nel caso di fenditure a bordi spessi, la componente parallela è *ritardata* rispetto alla normale per i metalli, *accelerata* invece per i dielettrici. Per le fenditure metalliche nelle quali lo spessore dei bordi è dell'ordine della lunghezza d'onda luminosa il segno della differenza di fase cambia (la componente parallela risulta *accelerata*) e il suo valore assoluto è, a parità di larghezza della fenditura, molto minore. Questa differenza di fase comincia ad essere sensibile in corrispondenza a larghezze minori di quelle per le quali si incomincia ad avere l'effetto polarizzante: essa è, nelle fenditure metalliche a bordi spessi, tanto più marcata quanto più forte è il potere riflettente dei bordi.

Fisica matematica. — *Sulla variazione di resistenza elettrica di un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico.* Nota II della dott.ssa Elena Freda, presentata dal Socio V. Volterra [1].

4. Esaminiamo il caso di un conduttore in cui, con o senza l'azione del campo, le linee di flusso rimangono le stesse e resta lo stesso in ciascun punto di esse il valore della densità di corrente, se si lascia inalterata la corrente totale che attraversa il conduttore (questa condizione si può, ad es., ritener soddisfatta nel caso di un filo metallico, rettilineo o no, comunque

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1916.

disposto nel campo). Dalla uguaglianza (5) si deduce che la differenza di potenziale tra due punti di una stessa linea di flusso, l, è uguale per $|H| = 0$ e per $|H| > 0$ solo se l è una retta parallela all'asse z; se non è soddisfatta questa condizione, la detta differenza di potenziale aumenta sotto l'azione del campo; tale aumento della differenza di potenziale fra due punti di una stessa linea di flusso può interpretarsi come un aumento della resistenza del conduttore.

Consideriamo un conduttore nel quale, per $H = 0$, le linee di flusso siano rette parallele all'asse z; per es. una lamina rettangolare fornita lungo due lati opposti di elettrodi di resistenza trascurabile e disposta parallelamente all'asse z, in modo che gli elettrodi risultino perpendicolari allo stesso asse. La teoria prevede, come facilmente si verifica, che sotto l'azione del campo rimangano inalterate le linee di flusso e rimanga inalterato in ciascun punto di esse il valore della densità di corrente, se si mantiene costante l'intensità della corrente totale che attraversa il conduttore. Dunque, per quanto precedentemente si è detto, la teoria non prevede che il campo magnetico determini un aumento della differenza di potenziale tra i due elettrodi della lamina, cioè un apparente aumento della resistenza di questa ultima, come non prevede che il campo determini un apparente aumento della resistenza di un filo rettilineo, disposto parallelamente alle linee di forza magnetiche.

Consideriamo ora una lamina disposta perpendicolarmente alle linee di forza del campo; se il suo spessore è molto piccolo, si può ritenere che il movimento della elettricità avvenga in un piano. Allora, come ha dimostrato il prof. Volterra [1], se gli elettrodi sono puntiformi e al contorno, l'azione del campo magnetico non altera le linee di flusso, nè il valore della densità di corrente in ciascun punto di esse quando si mantenga costante l'intensità della corrente totale che attraversa la lamina. Di più in questo caso l'apparente conducibilità specifica c, corrispondente ad un determinato valore di H, è costante in ogni punto di una qualsiasi linea di flusso (perchè si ha in un ogni punto $\cos lz = 0$) e non dipende dal senso del campo. In questo caso il rapporto dei valori che la differenza di potenziale tra due punti di una stessa linea di flusso (non coincidenti con gli elettrodi) assume, prima e dopo la creazione del campo magnetico, è uguale al rapporto della resistenza specifica $\frac{1}{c_0}$ che la lamina ha fuori del campo e dell'apparente resistenza specifica $\frac{1}{c}$ determinata da quest'ultimo. Per una lamina disposta trasversalmente nel campo magnetico e fornita di elettrodi puntiformi al contorno, la teoria prevede dunque un apparente aumento $\Delta\varrho$ di resistenza;

[1] Rend. Accad. Lincei, 1° sem. 1915, pag. 294.

il rapporto tra $\Delta\varrho$ e la resistenza ϱ_0 fuori del campo magnetico, dipende solo dall'intensità di quest'ultimo e dalle proprietà specifiche della sostanza conduttrice; tale rapporto non muta cambiando H in —H. Lo stesso può dirsi per un filo metallico rettilineo, inclinato rispetto alle linee di forza del campo magnetico. (Anche in questo caso, cos lz è costante in ogni punto del conduttore).

In una lamina disposta trasversalmente nel campo, ma non fornita di elettrodi puntiformi situati al contorno (per es. in una lamina rettangolare lungo due lati opposti della quale siano saldati due elettrodi di resistenza trascurabile), per azione del campo muta non solo la distribuzione dei potenziali, ma anche quella delle correnti. In questo caso il rapporto tra i valori che assume, per $|H| = 0$ e per $|H| > 0$, la differenza di potenziale tra due punti di una stessa linea di flusso o tra due elettrodi di resistenza trascurabile, dipenderà non solo dall'apparente aumento di resistenza specifica di cui già ho parlato, ma anche dall'alterata distribuzione delle correnti; in questo caso il rapporto $\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0}$ dipenderà, in genere, non solo dalle proprietà specifiche della sostanza conduttrice e dall'intensità del campo, ma anche dalla forma e dalle dimensioni della lamina e dalla posizione degli elettrodi [1].

Le precedenti osservazioni possono in parte spiegare le divergenze dei risultati ottenuti da diversi sperimentatori i quali hanno misurato, in condizioni diverse, la variazione di resistenza di un conduttore nel campo.

5. Prenderò in esame ancora un fatto che è stato attribuito ad una alterazione di proprietà specifiche determinata dal campo nelle sostanze conduttrici sottoposte alla sua azione.

Consideriamo una lamina metallica avente la forma di una corona circolare, fornita, lungo i due cerchi concentrici che la limitano, di due elettrodi di resistenza trascurabile. Se la lamina è disposta perpendicolarmente alle linee di forza di un campo magnetico uniforme, sotto l'azione di questo ultimo, come è noto [2], le linee equipotenziali restano cerchi aventi il centro nel centro della lamina; le linee di flusso invece, radiali senza il campo magnetico, diventano per azione di quest'ultimo spirali logaritmiche. Si può considerare perciò la lamina come percorsa da correnti circolari e da correnti radiali; a causa delle prime, la lamina può esercitare su una bobina concentrica, che la circondi e sia disposta anch'essa perpendicolarmente alle

[1] Secondo recenti esperienze, la resistenza di una lamina rettangolare di bismuto, disposta trasversalmente in un campo magnetico uniforme, aumenta di più quando la lamina è munita lungo due suoi lati opposti di elettrodi di resistenza trascurabile, che non quando la lamina è munita di due elettrodi puntiformi al contorno (Corbino e Trabacchi, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 806).

[2] Corbino, Nuovo Cimento, VI serie, I, 1911, pag. 397.

linee di forza del campo, un'azione induttiva (effetto Corbino). Sia I l'intensità della corrente totale che attraversa la lamina, s lo spessore di questa ultima. Si può porre $I = I_1 + I_2$, indicando con I_1 la corrente determinata dagli ioni positivi, con I_2 quella determinata dagli ioni negativi. Si trova allora [1] che, in un punto alla distanza r dal centro della lamina, le densità delle correnti circolari determinate dagli ioni positivi e dagli ioni negativi, sono rispettivamente $\frac{m_1 I_1}{2\pi sr}$, $\frac{-m_2 I_2}{2\pi sr}$ (m_1, m_2 hanno lo stesso significato che nel § 2); che quindi l'azione della lamina è proporzionale, con un coefficiente che dipende solo dalle dimensioni di quest'ultima, a

$$e\,H(v_1 I_1 - v_2 I_2)\,;$$

o anche, se s'indica con σ la conducibilità specifica del metallo di cui la lamina è formata, con σ_1 la conducibilità specifica relativa agli ioni positivi, con σ_2 quella relativa agli ioni negativi e si pone $I_1 = I\frac{\sigma_1}{\sigma}$, $I_2 = I\frac{\sigma_2}{\sigma}$, che l'azione induttiva della lamina è proporzionale ad $e\,H\,I\frac{v_1\sigma_1 - v_2\sigma_2}{\sigma}$.
Il prof. Corbino ha trovato sperimentalmente, servendosi di una lamina di bismuto, che in realtà l'azione induttiva cresce più lentamente del campo, anche fatte le dovute correzioni relative alla presenza del ferro nell'elettromagnete. Adams e Chapman [2], studiando l'effetto Corbino in molti altri metalli, hanno trovato in genere lo stesso risultato. Esso può attribuirsi, secondo Adams [3], ad una vera e propria alterazione delle proprietà specifiche del metallo determinata dal campo.

Mi propongo di mostrare come, dalle formule stesse stabilite dal professore Corbino nel suo lavoro a cui precedentemente mi sono riferita, si può dedurre che la teoria prevede, almeno qualitativamente, il risultato sperimentale sopra considerato.

Le equazioni differenziali del movimento di uno ione positivo sono, in coordinate polari,

$$(8)\qquad \begin{cases} r_1\frac{d\theta_1}{dt} = e v_1 H\frac{dr_1}{dt} \quad ; \quad \frac{dr_1}{dt} = e v_1\left(F - H r_1\frac{d\theta_1}{dt}\right) \end{cases}$$

(F, forza elettrica).

Da esse si deduce

$$(9)\qquad \frac{dr_1}{dt} = \frac{e v_1}{1 + m_1^2}F.$$

[1] Corbino, loc. cit.
[2] Phil. Mag., 1914, XXVIII, pag. 692.
[3] Phil. Mag., 1914, XXVII, pag. 249.

Analogamente per uno ione negativo si ha

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{-e v_2}{1 + m_2^2} F; \tag{10}$$

I_1, I_2 si esprimono per mezzo delle velocità radiali degli ioni nel modo seguente:

$$\begin{cases} I_1 = 2\pi r s e N_1 \dfrac{dr_1}{dt} \quad ; \quad I_2 = -2\pi r s e N_2 \dfrac{dr_2}{dt} ; \end{cases} \tag{11}$$

si avrà quindi, per le (9) e (10),

$$\begin{cases} I_1 = 2\pi r s \dfrac{e^2 v_1 N_1}{1 + m_1^2} F = 2\pi r s K_1 F \\ I_2 = 2\pi r s \dfrac{e^2 v_2 N_2}{1 + m_2^2} F = 2\pi r s K_2 F \end{cases} \tag{12}$$

$$I = I_1 + I_2 = 2\pi r s K F . \tag{13}$$

Dunque si ha:

$$I_1 = I \frac{K_1}{K} \quad . \quad I_2 = I \frac{K_2}{K} .$$

L'azione induttiva della lamina è perciò rappresentata, a meno di un fattore dipendente solo dalle sue dimensioni, da $e H I \dfrac{v_1 K_1 - v_2 K_2}{K}$; la sua dipendenza dal campo non è perciò la semplice proporzionalità.

Il prof. Corbino ha osservato, per il bismuto, che l'azione prevalente è esercitata dagli ioni negativi. Adams e Chapman, per tutti i metalli presi in esame, hanno trovato che l'effetto Corbino ha lo stesso segno che per il bismuto. Si può dunque ritenere, per tutti i metalli che sono stati studiati, $\dfrac{v_2 K_2 - v_1 K_1}{K} > 0$. Per dimostrare che la teoria prevede che l'effetto Corbino debba crescere più lentamente del campo, basta dunque dimostrare che, se

$$H_1 > H_2 ,$$

posto

$$m_{11} = e v_1 H_1 \ , \ m_{12} = e v_2 H_1 \ , \ m_{21} = e v_1 H_2 \ , \ m_{22} = e v_2 H_2 ,$$

$$K_{11} = \frac{e^2 v_1 N_1}{1 + m_{11}^2} \ , \ K_{12} = \frac{e^2 v_2 N_2}{1 + m_{12}^2} \ , \ K_{21} = \frac{e^2 v_1 N_1}{1 + m_{21}^2} \ , \ K_{22} = \frac{e^2 v_2 N_2}{1 + m_{22}^2} ,$$

$$K' = K_{11} + K_{12} \quad , \quad K'' = K_{21} + K_{22} ,$$

si ha

$$\frac{v_2 K_{22} - v_1 K_{21}}{K''} > \frac{v_2 K_{12} - v_1 K_{11}}{K'} . \tag{14}$$

Dalla diseguaglianza $H_1 > H_2$, poichè la mobilità v_2 degli ioni negativi deve ritenersi maggiore di quella v_1 degli ioni positivi, si ricava

$$e^2 H_1^2 (v_2^2 - v_1^2) > e^2 H_2^2 (v_2^2 - v_1^2) .$$

Da questa diseguaglianza, come facilmente si verifica, si deducono successivamente le altre

$$m_{12}^2 + m_{21}^2 > m_{22}^2 + m_{11}^2$$

$$m_{12}^2 + m_{21}^2 + 1 + m_{12}^2 m_{21}^2 > m_{22}^2 + m_{11}^2 + 1 + m_{22}^2 m_{11}^2$$

$$\frac{1}{(1 + m_{22}^2)(1 + m_{11}^2)} > \frac{1}{(1 + m_{21}^2)(1 + m_{12}^2)}$$

$$(v_1 + v_2) K_{22} K_{11} > (v_1 + v_2) K_{21} K_{12}$$

$$v_2 K_{22}(K_{11} + K_{12}) + v_1 K_{11}(K_{21} + K_{22}) > v_2 K_{12}(K_{21} + K_{22}) + v_1 K_{21}(K_{11} + K_{12})$$

$$v_2 K_{22} K' - v_1 K_{21} K' > v_2 K_{12} K'' - v_1 K_{11} K''$$

$$\frac{v_2 K_{22} - v_1 K_{21}}{K''} > \frac{v_2 K_{12} - v_1 K_{11}}{K'} .$$

Osserviamo che tutti i risultati contenuti in questo e nei precedenti paragrafi valgono nell'ipotesi che la mobilità v_1 degli ioni positivi non sia nulla.

6. Se si prescinde dalle sostanze ferro-magnetiche (per le quali l'alterazione di proprietà specifiche determinata dal campo è evidente, anche pel fatto che è stata osservata una variazione rimanente di resistenza) [1] e ci si limita a considerare le sostanze che si comportano come il bismuto, si può asserire che, per quanto riguarda il movimento della elettricità perpendicolarmente alle linee di forza magnetiche, i risultati teorici contenuti nei precedenti paragrafi si accordano, almeno qualitativamente, coi fenomeni, interpretabili come una variazione di resistenza prodotta dal campo, che le esperienze hanno constatato. Con ciò non è escluso che quei risultati sperimentali possano essere determinati, in parte, da una vera e propria alterazione di proprietà specifiche prodotta dal campo magnetico nei conduttori sottoposti alla sua azione.

Per poter stabilire in modo certo se questa ipotesi è o no necessaria, occorrerebbe sapere se l'accordo tra la teoria e le esperienze c'è anche dal punto di vista quantitativo. È per ora impossibile stabilire ciò, perchè non si hanno determinazioni attendibili dei valori di $v_1 v_2 N_1 N_2$. L'ipotesi che il campo determini nelle sostanze conduttrici sottoposte alla sua azione un vero e proprio mutamento delle loro proprietà specifiche, nelle direzioni

[1] Goldhammer, Annalen der Physik, XXXI, pag. 360, an. 1887; XXXVI, pag. 804, an. 1889.

perpendicolari a quella delle linee di forza magnetiche, non è resa assolutamente necessaria neppure dal fatto, osservato recentemente dal dott. Trabacchi (1), che per laminette di bismuto aventi la stessa forma ma struttura diversa (alcune preparate facendo solidificare in appositi stampi del bismuto fuso, altre ottenute comprimendo delle polveri dello stesso metallo) l'effetto Hall può ritenersi uguale, mentre la variazione di resistenza passa da un valore non trascurabile ad un altro praticamente nullo. Infatti, secondo la teoria, l'effetto Hall e la variazione di resistenza, quando si misurino come ha fatto il dott. Trabacchi, dipendono rispettivamente da $\frac{\varepsilon}{K^2+\varepsilon^2}$ (2) e da $\left[\frac{K}{K^2+\varepsilon^2}-r_0\right]$ (r_0, resistenza specifica fuori del campo) (3). Queste due grandezze varieranno al variare della struttura del metallo, perchè varieranno, in genere, $v_1\, v_2\, N_1\, N_2$; ora non si può escludere *a priori* che in qualche caso non possa avvenire che la prima grandezza resti praticamente inalterata e varii invece sensibilmente la seconda; non si può dunque asserire senz'altro che i risultati sperimentali ricordati siano inconciliabili con la teoria. D'altra parte non sembra che, accettando la detta ipotesi, si renda più immediata e soddisfacente la spiegazione di tali risultati, perchè anche in questo caso la teoria prevede che l'effetto Hall e la variazione di resistenza dipendano dalle due grandezze $\frac{\varepsilon}{K^2+\varepsilon^2}$, $\left[\frac{K}{K^2+\varepsilon^2}-r_0\right]$; solo si debbono ritenere $v_1\, v_2\, N_1\, N_2$ funzioni del valore assoluto di H (funzioni diverse in corrispondenza alle diverse strutture del metallo).

Se si considera invece il caso in cui il movimento della elettricità avviene parallelamente alle linee di forza del campo, si deve riconoscere che la teoria non prevede l'aumento di resistenza che le esperienze hanno constatato. Non è facile decidere se ciò sia dovuto ad una vera e propria alterazione delle proprietà dei conduttori determinata dal campo, o al fatto che le condizioni supposte dalla teoria sono realizzate solo approssimativamente in pratica, o alla sovrapposizione di qualche altro fenomeno a quelli che la teoria considera.

Terminerò osservando che, se anche si ammette che in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico ci sia in tutte le direzioni, incluse quelle perpendicolari alla direzione del campo, una vera e propria alterazione di resistenza (dovuta ad un'alterazione temporanea della natura del metallo), si deve pur sempre tener conto della sovrapposizione, a questo fenomeno, dell'apparente mutamento di resistenza che la teoria prevede. Così

(1) Rend. Accad. Lincei, 1° sem. 1915, pag. 1053.

(2) Corbino, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 213; Tasca, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 336.

(3) Cfr. i paragrafi 3 e 4.

nel caso di una lamina disposta trasversalmente nel campo e fornita di due elettrodi puntiformi situati al contorno, o nel caso di un filo metallico disposto in un piano perpendicolare alle linee di forza magnetiche, se le costanti $v_1 v_2 N_1 N_2$ per azione del campo diventano delle funzioni $\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2$ del valore assoluto di quest'ultimo (per evidenti ragioni di simmetria $\mu_1 \mu_2$ $\nu_1 \nu_2$ avranno gli stessi valori in tutti i punti della lamina o del filo) la variazione di resistenza che si constata esaminando la differenza di potenziale tra due punti di una stessa linea di flusso (mentre si mantiene costante la corrente totale che attraversa il conduttore) deve considerarsi come la somma di due parti: l'una dovuta alla vera e propria alterazione di resistenza specifica $r_1 - r_0$; l'altra dovuta all'apparente variazione di resistenza specifica $r - r_1$, che la teoria prevede. Posto

$$p_1 = e\mu_1 H \;,\; p_2 = e\mu_2 H \;,\; S_1 = \frac{e^2 \mu_1 \nu_1}{1 + p_1^2} \;,\; S_2 = \frac{e^2 \mu_2 \nu_2}{1 + p_2^2} \;,$$

$$S = S_1 + S_2 \;,\; T = p_1 S_1 - p_2 S_2 \;,$$

si ha

$$r_1 - r_0 = \frac{1}{e^2(\nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2)} - \frac{1}{e^2(N_1 v_1 + N_2 v_2)} \;,$$

$$r - r_1 = \frac{S}{S^2 + T^2} - \frac{1}{e^2(\nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2)} \;.$$

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 4°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 11.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia durante le ferie del 1916.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 5.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXV.° — Fascicolo 5°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Meccanica. — *Sul moto traslatorio di un solido sferico in un liquido viscoso.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Corrispondente E. ALMANSI [1].

In questa Nota, sfruttando l'osservazione fatta nella precedente [2], mi propongo di dare un nuovo metodo per la risoluzione del problema (già trattato, in casi particolari, dallo Stokes e dal Basset, e condotto a termine, esaurientemente, dal Picciati) [3] che riguarda la determinazione del moto lento e regolare del liquido, nel caso particolare che il solido immerso sia sferico, prefissate la completa aderenza fra solido e liquido, la quiete del liquido all'infinito e la condizione iniziale.

Supporremo che il movimento in discorso avvenga secondo piani passanti per un diametro di quella sfera e nello stesso modo in ciascuno di cotesti piani; talchè, richiamando la funzione F, da me introdotta nella precedente Nota, avremo da integrare l'equazione

$$\frac{\partial \Delta^2 F}{\partial t} = \nu \Delta^4 F, \tag{1}$$

prefissate le condizioni che verranno scritte qui appresso. Intanto si osservi che, assunto un sistema ausiliario di coordinate polari ϱ, θ, φ (dove θ sia

(1) Presentata all'Accademia il 25 agosto 1916.

(2) Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2° semestre 1916, pag. 102.

(3) Ibid., 1° sem. 1907, pag. 943.

la colatitudine), il quale sistema abbia, come asse polare, l'asse del suddetto fascio di piani, e ritenendo, nel presente caso, la F funzione delle sole variabili ϱ e t, si hanno facilmente le seguenti espressioni delle componenti P e Θ della velocità [1]:

$$P = \frac{2\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \varrho} \quad , \quad \Theta = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\varrho}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} + \varrho\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2}\right).$$

Inoltre, trattandosi di moto lento, può supporsi, senza cambiare nessuna scrittura, che il suddetto sistema di coordinate polari sia invariabilmente collegato col solido [2]. Ciò premesso, l'origine del sistema stesso verrà supposta coincidente col centro della sfera. Quindi, dovendo essere

$$(P)_{\rho=a} = V(t)\cos\theta \quad , \quad (\Theta)_{\rho=a} = -V(t)\operatorname{sen}\theta\,,$$

denotando a la grandezza del raggio della sfera e $V(t)$ la misura della velocità della sfera stessa cioè del solido, avremo le condizioni ai limiti

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\rho=a} = V(t) \quad , \quad \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\rho=a} + \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2}\right)_{\rho=a} = V(t)\,, \\ \left(\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\rho=\infty} = 0 \quad , \quad \left(\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial F}{\partial \varrho} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2}\right)_{\rho=\infty} = 0\,, \end{cases}$$

(1) Infatti, denotando ψ la funzione di corrente, di cui è parola nella precedente Nota, avremo

$$R = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad , \quad Z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\,,$$

essendo R e Z le componenti della velocità rispettivamente secondo r e secondo z. Ma, tenendo presente che

$$\begin{cases} P = R\operatorname{sen}\theta + Z\cos\theta \\ \Theta = R\cos\theta - Z\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

e che, per essere $r = \varrho\operatorname{sen}\theta$, $z = \varrho\cos\theta$, si ha

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\cos\theta}{\varrho\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\cos\theta}{\varrho^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\,,$$

resulta

$$P = \frac{1}{\varrho^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad , \quad \Theta = -\frac{1}{\varrho\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\,.$$

Talchè, essendo $\psi = r\dfrac{\partial F}{\partial r}$ ed essendo, inoltre, nel presente caso, F funzione soltanto delle ϱ, t, avremo

$$\psi = \varrho\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial F}{\partial \varrho}\,,$$

e quindi

$$P = \frac{2\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \varrho} \quad , \quad \Theta = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\varrho}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} + \varrho\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2}\right).$$

(2) Cfr. Picciati, loc. cit., pag. 945.

che equivalgono, nel nostro caso, alle seguenti:

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = \dfrac{a}{2} V(t) \quad , \quad (\Delta^2 F)_{\varrho=a} = \dfrac{3}{2} V(t) , \\ \left(\dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\infty} = 0 \quad , \quad (\Delta^2 F)_{\varrho=\infty} = 0 . \end{cases}$$

Inoltre, denotando con $F_0(\varrho)$ una funzione assegnata con le restrizioni

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F_0}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = \dfrac{a}{2} V(0) \quad , \quad (\Delta^2 F_0)_{\varrho=a} = \dfrac{3}{2} V(0) , \\ \left(\dfrac{1}{\varrho} \dfrac{dF_0}{d\varrho}\right)_{\varrho=\infty} = 0 \quad , \quad (\Delta^2 F_0)_{\varrho=\infty} = 0 , \end{cases}$$

avremo la condizione iniziale

$$(3)\qquad (F)_{t=0} = F_0 + \text{costante arbitraria} .$$

Ora, si ponga

$$(4)\qquad \varrho \Delta^2 F = g(\varrho , t) ,$$

cioè

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^2 \frac{\partial F}{\partial \varrho}\right) = g(\varrho , t) ,$$

da cui

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{K_1(t)}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \int_a^\varrho \lambda g(\lambda , t)\, d\lambda .$$

E, tenendo presente la condizione

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = \frac{a}{2} V(t) ,$$

si assuma

$$K_1(t) = \frac{a^3}{2} V(t) .$$

Avremo

$$F = - \frac{a^3 V(t)}{2\varrho} + \int_a^\varrho \frac{d\beta}{\beta^2} \int_a^\beta \lambda g(\lambda , t)\, d\lambda + K(t)$$

dove $K(t)$ rappresenta una funzione arbitraria, per noi inessenziale, del tempo.

Si osservi che, sostituendo nella (1), al posto di $\Delta^2 F$, l'espressione che resulta dalla (4), si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 g}{\partial \varrho^2} .$$

Ciò premesso, dimostreremo che, se dell'equazione

$$(5)\qquad \frac{\partial H}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 H}{\partial \varrho^2}$$

(avente il tipo dell'equazione relativa alla propagazione del calore in un filo omogeneo) denotiamo con $g(\varrho, t)$ la soluzione regolare soddisfacente alle seguenti condizioni [1]:

$$(6)\qquad (g)_{\varrho=a} = \frac{3a}{2} V(t) \quad , \quad (g)_{\varrho=\infty} = 0 \quad , \quad (g)_{t=0} = \varrho \Delta^2 F_0$$

e formiamo la funzione

$$(7)\qquad F = -\frac{a^3 V(t)}{2\varrho} + \int_a^\varrho \frac{d\beta}{\beta^2} \int_a^\beta \lambda g(\lambda, t)\, d\lambda + K(t),$$

la funzione (7) medesima sarà, della (1), nello spazio occupato dal liquido, soluzione regolare soddisfacente alle condizioni (2) e (3). Le condizioni (6) resulteranno, cioè, certamente sufficienti per la costruzione della (F), mantenendo, naturalmente, alla $g(\varrho, t)$ il significato di soluzione regolare della (5). Infatti, essendo chiaro che la (7) resulterà, nello spazio occupato dal liquido, soluzione regolare della (1) ed avendosi

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = \frac{a}{2} V(t),$$

basterà mostrare che delle (2) resultano soddisfatte anche le rimanenti e che, inoltre, resulta soddisfatta la (3).

(1) L'integrale regolare dell'equazione della propagazione del calore in un filo omogeneo, tenendo conto delle condizioni ai limiti che valgono ad individuarlo, fu dato, sotto forma semplice e compendiosa, dal Picciati, applicando i metodi generali del Volterra (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1907, pag. 750). Si ha

$$g(\varrho, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_a^\infty g_0(\beta) \left\{ e^{-\frac{(\beta-\rho)^2}{4\nu t}} - e^{-\frac{(\beta-2a+\rho)^2}{4\nu t}} \right\} d\beta +$$

$$+ \frac{3a}{4\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t V(\tau)\, e^{-\frac{(\rho-a)^2}{4\nu(t-\tau)}} (\varrho - a)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau,$$

dove $g_0(\beta, t) = \{ g(\beta, t) \}_{t=0}$ e gli altri simboli hanno noti significati.

Intanto, tenendo presente la prima delle (6) ed osservando che dalla (7) discende

$$\varrho \Delta^2 F = g(\varrho, t).$$

avremo

$$(\Delta^2 F)_{\varrho=a} = \frac{3}{2} V(t).$$

A causa, poi, della seconda delle (6), si vede facilmente che

$$\left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\infty} = 0 \quad \text{e} \quad (\Delta^2 F)_{\varrho=\infty} = 0.$$

Infine, osservando che la terza delle (6) può scriversi

$$(g)_{t=0} = \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(F_0 + \varrho \frac{dF_0}{d\varrho}\right)$$

e che, dalla (7), si ha

$$(F)_{t=0} = -\frac{a^3 V(0)}{2\varrho} + \int_a^\varrho \frac{d\beta}{\beta^2} \int_a^\beta \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(F_0 + \lambda \frac{dF_0}{d\lambda}\right) d\lambda + K(0),$$

resulta facilmente

$$(F)_{t=0} = F_0 + \text{costante arbitraria},$$

mediante opportune integrazioni per parti e tenendo, poi, presente che

$$\left(\frac{dF_0}{d\varrho}\right)_{\varrho=a} = \frac{a}{2} V(0).$$

Le condizioni (6) sono, dunque, certamente sufficienti, affinchè, mantenendo alla $g(\varrho, t)$ il significato di soluzione regolare della (5), la funzione (7) resulti della (1), nello spazio occupato dal liquido, soluzione regolare soddisfacente alle condizioni (2) e (3).

Matematica. — *Sull'iterazione delle funzioni di una variabile complessa.* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

Oggetto di questa breve Nota è l'estensione al campo complesso di un teorema sull'iterazione delle funzioni di una variabile reale, da me precedentemente dato [2], e che recentemente è stato generalizzato, sempre restando nel campo reale, dal sig. G. Andreoli [3].

È noto che se $F(z)$ è una funzione monodroma in una certa area S, e tale che $F(z)$, comunque sia scelto il punto z in quest'area, sia un punto dell'area stessa; dato che la successione formata dalle successive *iterate* di F in un punto z_0 di S, cioè la successione

$$z_0 \,,\, z_1 = F(z_0) \,,\, z_2 = F(z_1) \,, \ldots$$

sia convergente [4], ed abbia per limite Z, Z soddisfa all'equazione (di Schroeder)

$$z - F(z) = 0 \,. \tag{1}$$

Si vede da ciò l'importanza delle radici della (1) nelle questioni di iterazione.

Noi ci proponiamo anzitutto di dimostrare una semplice proprietà che permette di ridursi sempre al caso di $Z = 0$ [5].

Consideriamo la funzione

$$\Phi(z) = Z - F(Z - z) \,,$$

che soddisfa alla condizione $\Phi(0) = 0$; dico che secondochè la successione

$$z_0 \,,\, z_1 = \Phi(z_0) \,,\, z_2 = \Phi(z_1) \,, \ldots \tag{Φ}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1916.

[2] Francesco Tricomi, *Un teorema sulla convergenza delle successioni formate dalle successive iterate di una funzione di una variabile reale* [Giorn. di Mat. di Battaglini, ser. 3ª, vol. LIV (1916)].

[3] Giulio Andreoli, *Sull'iterazione delle funzioni di variabili reali* [Rend. R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXV, 2° sem. (1916)].

[4] Quì e nel seguito si dà al verbo *convergere* il senso più ampio, cioè si intendono per successioni *convergenti* quelle successioni che da taluni (p. es. dal Koenigs) vengono dette *regolarmente convergenti.*

[5] Questa proprietà è un caso particolare di una più generale, per la quale si può vedere il lavoro citato di Andreoli.

converge o no a 0, la successione

$$(F) \qquad z'_0 = Z - z_0 \ , \ z'_1 = F(z'_0) \ , \ z'_2 = F(z'_1) \ , \ldots$$

converge o no a Z.

Infatti si ha

$$z'_1 = Z - z_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$z'_n = Z - z_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ora le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le successioni (Φ) ed (F) convergano rispettivamente a 0 e Z sono che, fissato ad arbitrio il numero positivo ε, si possa trovare un intero ν tale che per ogni $n > \nu$ sia rispettivamente

$$|z_n| < \varepsilon$$

e

$$|Z - z'_n| < \varepsilon \, ,$$

dunque, essendo $z_n = Z - z'_n$, l'assunto è dimostrato.

Dopo ciò passiamo alla considerazione del sistema Σ di curve del piano complesso, rappresentato in coordinate polari ϱ e θ dall'equazione

$$(2) \qquad \varrho = \varphi(\theta, \lambda) \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad \lambda \geq 0 \, ,$$

dove φ è una funzione reale delle due variabili reali θ e λ, che soddisfi alle condizioni

$$(3) \qquad \varphi(\theta, 0) = 0 \quad ; \quad \varphi(\theta, \lambda) > 0 \quad , \quad \lambda > 0 \, ,$$

e sia *sempre crescente* per λ crescente, e quindi *invertibile* rispetto a questa variabile, cioè tale che la (2) definisca λ come funzione monodroma di θ e ϱ:

$$(4) \qquad \lambda = \varphi_1(\theta, \varrho) \quad ; \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad \varrho \geq 0 \, .$$

Notiamo che la funzione φ_1 è *sempre crescente* per ϱ crescente e soddisfa a condizioni analoghe alle (3), e precisamente alle condizioni

$$(5) \qquad \varphi_1(\theta, 0) = 0 \quad ; \quad \varphi_1(\theta, \varrho) > 0 \quad , \quad \varrho > 0 \, .$$

Stabiliremo ora alcune proposizioni relative a questo sistema Σ, nelle quali, come pure nel seguito, useremo il simbolo $[a]$ per indicare l'*argomento* di un numero complesso a (analogo al simbolo $|a|$ che si usa per il *modulo*), e il simbolo $P(a)$ per indicare che il punto P è l'*indice* del numero complesso a:

I) Per un punto qualunque $P(a)$ del piano passa *una* curva σ_P del sistema Σ, e precisamente quella che corrisponde a

$$\lambda = \varphi_1([a], |a|) ;$$

pertanto si può dare il nome di *fascio* al sistema Σ.

II) Ogni semiretta uscente dal punto O riscontra una qualunque curva del fascio Σ in *un* punto.

III) Si dirà che un punto P è *interno* ad una curva σ del fascio Σ se esso, sulla semiretta OP, cade fra O ed il punto in cui OP sega σ. Il punto O è da considerarsi interno a tutte le curve del fascio.

IV) Si dirà *ampiezza* di una curva σ di Σ, cui competa il valore λ_0 di λ, l'estremo superiore di $\varphi(\theta, \lambda_0)$ fra 0 e 2π. L'ampiezza di σ è l'estremo inferiore dei raggi dei cerchi di centro O che contengono nel loro interno tutti i punti interni a σ.

V) Se il punto $P(a)$ è interno ad una curva σ del fascio Σ, la curva σ_P si dirà *interna* a σ; tutti i punti interni a σ_P, o situati su questa curva, sono interni a σ.

Infatti, detti rispettivamente λ' e λ'' i valori di λ corrispondenti a σ_P ed a σ, e indicato con P' il punto in cui σ è segata da OP, si ha

$$\begin{cases} OP = \varphi([a], \lambda') \\ OP' = \varphi([a], \lambda'') \end{cases}$$

da cui, essendo P interno a σ e quindi $OP < OP'$, ed essendo φ sempre crescente rispetto alla seconda variabile; si ha $\lambda'' < \lambda'$.

Sia ora $Q(b)$ un qualsiasi punto interno o situato su σ_P, e sia Q' il punto di sezione di OQ con σ, sarà

$$\begin{cases} OQ \leq \varphi([b], \lambda') \\ OQ' = \varphi([b], \lambda'') , \end{cases}$$

il chè, per l'ineguaglianza $\lambda'' < \lambda'$ e per la proprietà di φ più sopra invocata, mostra che $OQ < OQ'$, e quindi che Q è interno a σ.

Si ha pure evidentemente che l'ampiezza di σ_P è minore di quella di σ.

VI) La condizione che un punto $Q(b)$ sia interno ad una curva $\sigma_{P(a)}$ del fascio Σ, può esprimersi con l'ineguaglianza

$$|b| < \varphi\{[b], \varphi_1([a], |a|)\}$$

cioè, più simmetricamente,

$$\varphi_1([b], |b|) < \varphi_1([a], |a|) , \tag{6}$$

avendo osservato che se, in generale, f simboleggia una funzione sempre crescente [quale è $\varphi_1([b], x)$], da $u < v$ può dedursi $f(u) < f(v)$.

Anche più semplicemente, introducendo l'operazione Γ definita da

$$\Gamma(z) = \varphi_1([z], |z|), \tag{7}$$

la (6) può scriversi

$$\Gamma(b) < \Gamma(a). \tag{8}$$

Premesse le precedenti considerazioni preliminari possiamo enunciare e dimostrare il teorema che forma l'oggetto della presente Nota:

Se la funzione $F(z)$ *si annulla per* $z = 0$, *ed è possibile determinare la funzione* φ, *che serve a definire il fascio* Σ, *in modo che in tutti i punti interni ad una curva* σ *di questo fascio* $F(z)$ *sia continua* (¹) *e soddisfi alla condizione*

$$\Gamma F(z) < \Gamma(z); \tag{9}$$

per ogni z_0 *interno a* σ, *la successione*

$$z_0 \,.\, z_1 = F(z_0) \,,\, z_2 = F(z_1) \,,\, \ldots$$

è convergente ed ha per limite lo zero.

Infatti, per le (8) e (9), se $P(a)$ è un punto interno a σ, $Q(F(a))$ sarà interno a σ_P epperò pure a σ, a cui σ_P è interna. Quindi, essendo $P(z_0)$ interno a σ, anche i punti $P(z_1)$, $P(z_2)$, ... saranno tutti interni a questa curva; epperò $P(z_{i+1})$ è sempre interno a σ_i, avendo indicato brevemente con questo simbolo la curva di Σ che passa pel punto $P(z_i)$.

Ne segue che ciascuna delle successive curve

$$\sigma_0 \,,\, \sigma_1 \,,\, \ldots \sigma_i \,,\, \sigma_{i+1} \,,\, \ldots$$

è interna alla precedente, epperò deve verificarsi uno dei seguenti due casi:

1°) Le ampiezze delle successive curve $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ tendono a zero.

2°) Esiste una curva *limite* σ', interna a tutte le curve σ_i e tale che, fissato ad arbitrio il numero positivo ε, è sempre possibile trovare un intero ν, tale che l'estremo superiore della differenza dei moduli di due qualunque numeri complessi i cui indici siano interni a σ_ν ma non a σ', sia minore di ε.

Dico che il 2° caso non può mai verificarsi.

(¹) Alla condizione di continuità, che imponiamo per brevità, se ne può sostituire una meno restrittiva (ved. in proposito l'analoga osservazione nella mia Nota citata in principio).

Infatti, supposto che esso si verifichi, consideriamo due punti $P(z_n)$ e $P(z_{n+1})$, $(n > \nu)$ e chiamiamo $S(a_n)$ e $S(a_{n+1})$ i punti in cui σ' è incontrata rispettivamente dalle semirette $OP(z_n)$ e $OP(z_{n+1})$. Essendo evidentemente i punti $P(z_n)$, $P(z_{n+1})$, $S(a_n)$ e $S(a_{n+1})$ interni a σ e non interni a σ', potrà scriversi

$$(10) \qquad |z_n| - |a_n| = |z_n - a_n| < \varepsilon,$$

$$(11) \qquad |z_{n+1}| - |a_{n+1}| = |z_{n+1} - a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Per la continuità di $F(z)$, dalla (10) si ha

$$(12) \qquad |f(z_n) - f(a_n)| < \eta,$$

avendo indicato con η un opportuno numero positivo, che può rendersi piccolo a piacere impiccolendo sufficientemente ε. La (12) può scriversi

$$|z_{n+1} - f(a_n)| < \eta$$

da cui, sommando con la (11) ed applicando il teorema sul modulo di una somma,

$$(13) \qquad |f(a_n) - a_{n+1}| < \varepsilon + \eta.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ ed indicando con $S(a)$ ed $S(a')$ due punti limiti, in generale diversi, del gruppo di punti di σ': $S(a_n)$, $S(a_{n+1})$, ..., la (13) fornisce

$$(14) \qquad F(a) = a';$$

d'altra parte, esprimendo che $S(a)$ e $S(a')$ sono su di una medesima curva (σ') del fascio Σ, si ha

$$(15) \qquad \Gamma(a') = \Gamma(a);$$

dunque è

$$(16) \qquad \Gamma F(a) = \Gamma(a).$$

Ma, essendo $S(a)$ un punto interno a σ, si deve avere per la (9)

$$\Gamma F(a) < \Gamma(a),$$

dunque il supporre che si verifichi il secondo caso conduce ad una contraddizione.

Dovendo allora verificarsi necessariamente il 1° caso, dato ad arbitrio il numero positivo ε, potrà determinarsi un intero ν tale che per $n > \nu$ l'ampiezza di σ_{n-1} sia minore di ε, e quindi, essendo $P(z_n)$ un punto interno a σ_{n-1}, sia

$$|z_n| < \varepsilon,$$

il chè mostra che il limite della successione

$$z_0 \,,\, z_1 = \mathrm{F}(z_0) \,,\, z_2 = \mathrm{F}(z_1) \,, \ldots$$

esiste ed è lo zero, c. b. d.

Supponendo in particolare z reale si ha

$$\begin{cases} \Gamma(z) = \varphi_1(\pi \,,\, |z|) & , \quad z < 0 \\ \Gamma(z) = \varphi_1(0 \,,\, |z|) & , \quad z > 0 \,. \end{cases}$$

Com'è facile vedere, ne segue che, limitandosi a considerare i valori reali di z e supponendo che $\mathrm{F}(z)$ sia reale per z reale, la (9) equivale alle condizioni

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} z < \mathrm{F}(z) < \varphi\{0 \,,\, \varphi_1(\pi \,,\, |z|)\} & , \quad z < 0 \,, \\ -\varphi\,\{\pi \,,\, \varphi_1(0 \,,\, |z|)\} < \mathrm{F}(z) < z & , \quad z > 0 \,, \end{cases}$$

cioè

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} z < \mathrm{F}(z) < \Psi(|z|) & , \quad z < 0 \,, \\ -\Psi^{-1}(|z|) < \mathrm{F}(z) < z & . \quad z > 0 \,, \end{cases}$$

avendo posto

$$\text{(19)} \qquad \Psi(x) = \varphi\{0 \,.\, \varphi_1(\pi \,,\, x)\} \quad , \quad x \geq 0 \,,$$

e

$$\text{(20)} \qquad \Psi^{-1}(x) = \varphi\{\pi \,,\, \varphi_1(0 \,.\, x)\} \quad , \quad x \geq 0 \,,$$

dopo aver osservato che si ha identicamente

$$\varphi\,\{\pi \,,\, \varphi_1(0 \,,\, \Psi(x))\} = x \,.$$

Osserviamo:

1°) che riguardando, nelle (19) e (20), $\Psi(x)$ come una funzione data, nulla per $x = 0$ e sempre crescente per x crescente, possono trovarsi infinite funzioni $\varphi(x \,,\, y)$ soddisfacenti a quelle equazioni;

2°) che se si pone

$$a = \varphi\,(\pi \,.\, x) \,,$$

per la (20) si ha

$$\Psi(a) = \varphi(0 \,,\, x) \,.$$

In conseguenza dal teorema generale si deduce in particolare che:

Se la funzione reale $\mathrm{F}(z)$ *della variabile reale* z, *si annulla per* $z = 0$, *ed è possibile determinare una funzione* $\Psi(x)$, *nulla per* $x = 0$ *e sempre crescente per* x *crescente, in modo che in tutti i punti di un intervallo*

$$\mathrm{I} \equiv [-a \,,\, \Psi(a)] \quad , \quad a > 0$$

la $F(z)$ *sia continua e siano verificate le condizioni*

$$\begin{cases} z < F(z) < \Psi(|z|) & , \quad z < 0 , \\ -\Psi^{-1}(|z|) < F(z) < z & , \quad z > 0 ; \end{cases}$$

per ogni z_0 *interno ad* I, *la successione*

$$z_0 \, , \, z_1 = F(z_0) \, , \, z_2 = F(z_1) \, , \ldots$$

è convergente ed ha per limite lo zero.

Questo è il teorema sull'iterazione di una funzione di una variabile reale contenuto nella Nota di Andreoli citata in principio. Supponendo più particolarmente che sia

$$\Psi(x) = mx \quad , \quad m > 0 ,$$

si ottiene l'analogo teorema contenuto nella mia Nota più volte citata, o meglio quello che diventa quel teorema quando si suppone nullo un numero X che in esso compare (ipotesi non restrittiva).

Fisica. — *Su la polarizzazione detta reticolare. II. Su alcuni fenomeni ottici presentati dalle valve striate delle Diatomee.* II Nota preliminare di A. POCHETTINO, presentata dal Socio P. BLASERNA [1].

In una importante Memoria su la polarizzazione parziale che subisce la luce passando attraverso fenditure sottili, Fizeau [2] dice di aver trovato *sempre* (almeno finchè la larghezza de le fenditure è maggiore di $1\,\mu$) una polarizzazione *perpendicolare* ai bordi tanto per quelle a bordi metallici quanto per quelle a bordi di vetro. Du Bois [3], in una ricerca molto più recente, trova invece che i reticoli *scalfiti su vetro* polarizzano la luce *parallelamente* ai bordi, mentre Franz Braun [4], più recentemente ancora, non trova alcun effetto nei reticoli di fili di quarzo. In un mio studio [5] su questo argomento io ho, al contrario, potuto confermare le antiche osservazioni di Fizeau.

Riguardo ai risultati contradittorî delle osservazioni del Braun e del Du Bois, è da notare che tanto i fili di quarzo quanto i bordi delle scalfitture su vetro presentano ordinariamente una certa birifrangenza irregolar-

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1916.
[2] Ann. de Chim. et Phys. (3), 63, pag. 385 (1861).
[3] Wied. Ann., *46*, pag. 559 (1892).
[4] Dissertazione, Berlino (1896).
[5] Rend. Acc. Lincei, 1916.

mente orientata; dato quindi il dispositivo sperimentale usato dal Du Bois e dal Braun, con il quale si studia la trasparenza non già di una fenditura singola, ma di tutto un reticolo rispettivamente di scalfitture su vetro e di fili di quarzo, questa birifrangenza può importare una non lieve causa di errore. Esaminando numerose scalfitture su vetro di vario spessore, più o meno profonde, ottenute con una punta molto fine di diamante (uno dei soliti marcatori usati dai microscopisti) ho potuto constatare che la zona immediatamente adiacente alla scalfittura presenta sempre una netta birifrangenza, evidentemente accidentale, variamente orientata su la direzione della scalfittura.

Occorre quindi esaminare (¹) sistemi assolutamente liberi da questa birifrangenza accidentale: a me sembra di averne trovati nelle valve silicee di alcune Diatomee. Come è noto, queste valve presentano spesso delle sottilissime striature il cui intervallo varia, a seconda della specie osservata, da $2\,\mu$ a $0{,}2\,\mu$, e la cui formazione, almeno secondo quanto si ammette generalmente, avviene in tal modo da rendere improbabile il prodursi di pressioni o tensioni elastiche, alle quali possano attribuirsi le proprietà ottiche che in esse si notano; d'altronde il loro comportamento ottico mostra, come vedremo, che non si tratta in questo caso di fenomeni di birifrangenza.

Osservate fra nicol incrociati (²) ed in luce parallela, onde evitare complicati fenomeni di diffrazione, le valve striate delle Diatomee illuminano il campo; si ottiene di nuovo l'oscurità girando convenientemente il preparato nel suo piano: le direzioni di estinzione, che così vengono a determinarsi, sono in stretta relazione con la direzione delle striature.

Potrebbe dubitarsi che il guscio di queste Diatomee fosse costituito da silice cristallizzata o diventata comunque accidentalmente anisotropa, ma inducono a ritenere altra la ragione dei fenomeni osservati: in primo luogo la densità della sostanza costituente queste valve che, per le numerose determinazioni fatte da varî autori, risulta essere 2,2, uguale cioè a quella de la silice amorfa; quindi il fatto che quelle valve, le quali, per una ragione qualunque, non presentano le striature, non presentano neppure la reazione ottica che studiamo; finalmente il fatto che, se si immergono queste valve in liquidi di diverso indice di rifrazione, il fenomeno non si verifica se l'indice del liquido è eguale a quello della silice amorfa ($n = 1{,}5$). Infatti operando su diversi esemplari di *Pleurosigma*, *Surirella*, *Pinnularia*, ecc., ho

(¹) La ricerca presenta interesse in quanto che le ricerche teoriche, in argomento, di Schaefer e Reiche, Ann. d. Phys., *35*, pag. 817 (1911) e di Ignatowski, Ann. de Phys., *44*, pag. 369 (1914) lascerebbero intravedere la possibilità di notevoli differenze di comportamento fra sistemi di fenditure praticate in dielettrici ed in conduttori.

(²) Tutte queste osservazioni vennero compiute con un microscopio a polarizzazione Leitz M.I.

potuto constatare che si ha un effetto massimo per preparati a secco, appena sensibile per quelli immersi in acqua ($n = 1,33$) o in una soluzione di joduro di Bario e Mercurio ($n = 1,79$), e nullo infine per quelli immersi in olio di cedro ($n = 1,5$).

La necessità di osservare sempre con ingrandimenti piuttosto forti, la difficoltà grande di osservare striature così minute (queste valve sono appunto scelte come oggetti di prova per gli obbiettivi microscopici) resa più grave, agli scopi della presente ricerca, dal presentarsi spesso di più sistemi di striature di intervallo diverso intersecantisi ad angolo, mi ha obbligato a limitarmi ad osservare il senso della polarizzazione che subisce la luce attraversando queste valve e il segno della differenza di fase, fra le componenti normale e parallela alle striature, che talvolta si presenta. Il valore di questa è, in generale, di pochi centesimi di lunghezza d'onda, e l'ammontare della luce polarizzata, più grande per la luce rossa, raramente supera il 25 %.

Nella tabella seguente sono riassunti i risultati di alcune delle osservazioni fatte [1]:

[1] Debbo alla squisita cortesia del dott. Achille Forti di Verona tutto il materiale studiato e tengo a rivolgergli qui i miei più vivi ringraziamenti.

Diatomea	Striature osservate	Intervallo fra le strie	Polarizzazione della luce emergente	Differenza di fase
Pleurosigma attenuatum	longitudinali	1 μ	⊥ alle strie, debole	componente ‖ alle strie ritardata
» »	trasversali	0,6	» » netta	?
Pleurosigma angulatum	trasversali inclinate	0,5	» » »	componente ‖ alle strie accelerata
Trachyneis aspera	trasversali	1 - 1,1	» » »	» » » ritardata
Grammatophora marina	»	0,4	» » ?	» » » »
Pinnularia nobilis	»	1,7 - 2	» » debole	» » » »
Stauroneis acuta	»	0,8 - 1	» » »	?
Amphipleura pellucida	»	0,3	‖ » debolissima	?
Surirella gemma	grosse trasversali	3	⊥ » netta	componente ‖ alle strie ritardata
» »	longitudinali	0,2 - 0,3	‖ » debolissima	?
» »	trasversali	0,4	⊥ » »	?
Achnanthes longipes	»	1,7	» » netta	componente ‖ alle strie ritardata
Navicula lyra	»	1,1 - 1,4	» » debole	» » » »
Rhizosolenia styliformis	»	0,4 - 0,5	» » debolissima	» » » » ?
Navicula tumescens	»	0,5 - 0,6	» » debole	» » » »

I punti interrogativi stanno ad indicare le osservazioni che la loro difficoltà, per la piccolezza dell'effetto, rende poco sicure.

Dall'esame dei risultati ottenuti appare quindi che allorchè la distanza fra le strie è maggiore di $0,4\,\mu$ si ha una polarizzazione normale alle strie stesse e quando la distanza è minore o, tutto al più, eguale a $0,3\,\mu$ si ha una polarizzazione parallela alle strie; risultato in armonia con quanto ho riscontrato nel precedente lavoro citato in principio. La differenza di fase si manifesta qui quasi sempre nel senso che la componente parallela alle striature è ritardata rispetto alla componente normale.

In alcune Diatomee fossili, del gruppo « *Centricae* », con le valve a contorno circolare, provenienti da una fonte artesiana di Atlantic City ed appartenenti ai generi: *Auliscus*, *Actinoptychus*, *Actinocyclus* e *Coscinodiscus* ho osservato alcuni fenomeni che, mi sembra, presentano una interessante analogia con i fenomeni osservati dal Kundt [1] e dal Dessau [2] nei depositi metallici ottenuti per spolverizzamento catodico da un catodo filiforme disposto normalmente al piano di deposizione. Questi fenomeni di Kundt furono successivamente studiati (sempre per depositi metallici) da Kämpf [3], da Rumpelt [4], da Bergholm [5] e da Ungerer [6] con risultati non sempre concordanti e ricevettero spiegazioni affatto diverse.

Il guscio (frustolo) di queste Diatomee presenta delle sottilissime striature curve limitanti delle areole, a contorni ben netti, distribuite radialmente a quinconcie intorno al centro della valva. Queste areole, di contorno tondeggiante, hanno un diametro medio di $0,9\,\mu$ (lo spessore della stria oscura che le delimita è di circa $0,4\,\mu$) e sono un po' più grandi verso il centro. All'orlo poi la valva presenta una serie di striature finissime i cui spazî chiari hanno una larghezza media di $0,6\,\mu$. Osservate in luce ordinaria parallela, queste valve presentano (vedi fig. I) i noti anelli colorati che sono certamente dovuti a fenomeni di interferenza; le colorazioni, non pure, sono tanto più vivaci quanto più piccola è l'apertura numerica dell'obbiettivo con cui si osserva: con un'apertura di 0,47 sono già appena visibili; in luce convergente scompaiono se il condensatore è molto vicino al preparato e ricompaiono non appena lo si abbassi convenientemente o se ne restringa il diaframma.

Osservando queste Diatomee con un obbiettivo di apertura numerica :0,08, fra nicol incrociati, in luce parallela molto intensa, si rileva che esse

(1) Wied. Ann., *27*, pag. 59 (1886).
(2) Wied. Ann., *29*, pag. 353 (1886).
(3) Ann. d. Phys.; *16*, pag. 308 (1905).
(4) Ann. d. Phys., *28*, pag. 633 (1909).
(5) Ann. d. Phys., *43*, pag. 1 (1914).
(6) Ann. d. Phys., *46*, pag. 131 (1915).

rischiarano il campo presentando una netta croce nera [1] (vedi fig. II) avente (comunque si giri il preparato nel suo piano) le braccia sempre pa-

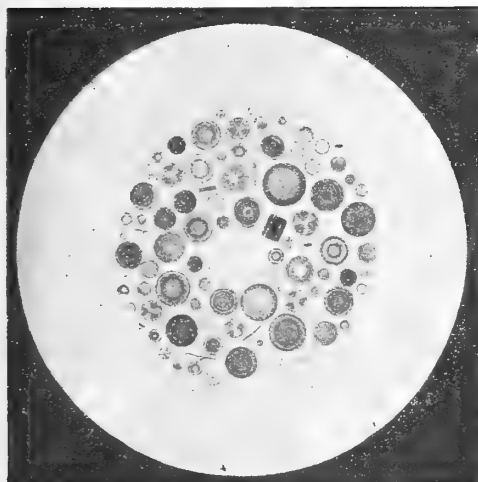



Fig. I. — Luce ordinaria.

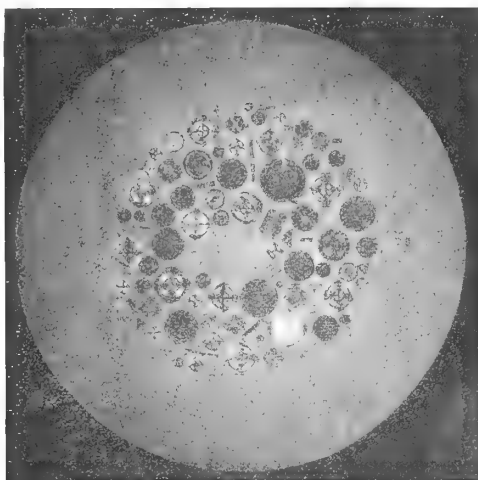



Fig. II. — Fra nicol a 90°.

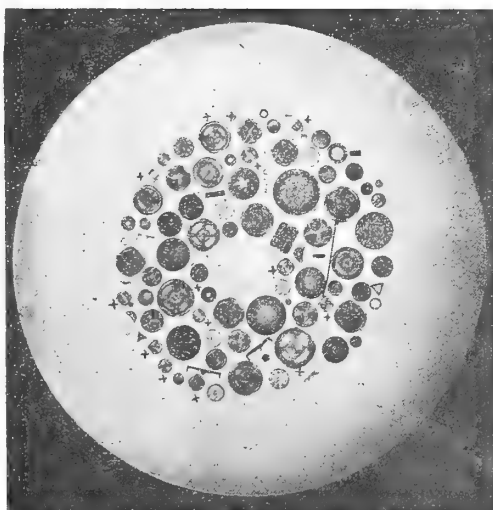



Fig. III. — Fra nicol a 89°.

Fotografie prese con un obbiettivo Leitz di apertura numerica 0,08.

rallele rispettivamente alle sezioni principali dei due nicol; questa croce è

[1] Gli anelli neri, concentrici al contorno della valva, che si osservano nelle figure II e III dipendono da particolarità della struttura o dalla forma del profilo trasversale della valva stessa: il loro diametro non varia infatti se si illumina il campo con luci di diversa lunghezza d'onda.

visibile ancora, ma presenta una colorazione bleuastra scura, quando l'apertura numerica dell'obbiettivo è di 0,30; se ne ha solo più un accenno all'orlo con un'apertura di 0,47; non se ne vede più traccia con un'apertura maggiore (1).

Quando si giri l'analizzatore di 1°-1°,5 *al massimo* (vedi in fig. III) (2) gli esemplari segnati con +) la croce nera si trasforma in una curva a due rami di andamento che ricorda quello iperbolico; come si vede, si ha qui l'analogo del fenomeno osservato dal Dessau (loc. cit.) nei cosidetti specchi di Kundt. Sembra quindi fondata l'ipotesi di coloro che ritengono questi depositi metallici come sistemi simmetrici di particelle metalliche ultramicroscopiche, di contorno circolare o ellittico, disposte radialmente intorno al punto che trovavasi di fronte all'estremità del catodo durante la loro formazione.

Chimica. — *Coefficienti di temperatura nell'azione di luci monocromatiche su lastre e carte fotografiche* (3). Nota di M. Padoa e L. Mervini (4), presentata dal Socio G. Ciamician.

L'influenza dei forti abbassamenti di temperatura, che si possono ottenere con l'aria liquida, sulla impressionabilità delle lastre fotografiche, è stata notata dai fratelli Lumière (5), secondo i quali una lastra fotografica immersa nell'aria liquida (— 191°) è da 350 a 400 volte meno sensibile che a temperatura ordinaria. In varî libri di fotochimica (6) si trova un coefficiente di temperatura, riferito alle stesse esperienze, di 1,03. A noi veramente non risulta che i predetti autori abbiano calcolato questo coefficiente, il quale, se tratto da quelle esperienze, sarebbe calcolato erroneamente: infatti, per un dislivello di temperatura di circa 200°, il coefficiente medio sarebbe, in base ai dati surriferiti, compreso fra le radici ventesime di 350 e di 400, e cioè starebbe fra 1,34 e 1,35.

Secondo i dati di Abney e Dewar (7), a — 200° le lastre fotografiche

(1) L'ingrandimento del microscopio permette allora di distinguere nettamente le singole areole.

(2) Per dare un'idea dell'ingrandimento risultante nelle figure riportate, riferisco che le valve più grandi, contenute nel preparato fotografato hanno un diametro di 270-300 μ, le più piccole di 50-70 μ.

(3) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

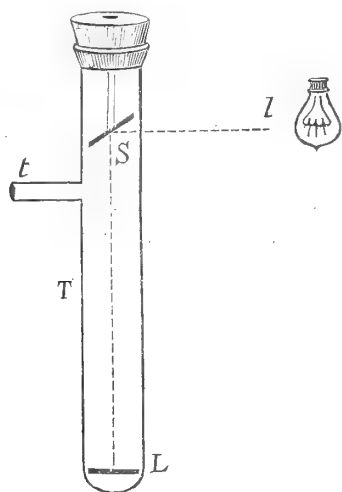
(4) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1916.

(5) Comptes Rendus, 128. 359.

(6) Plotnikow, Photochemie (1910), pag. 115; Benrath, Photochemie.

(7) Eder, Photochemie (1906), pag. 405.

sarebbero circa cinque volte meno sensibili che a temperatura ordinaria, ciò che corrisponde ad un coefficiente di 1,08.

Finalmente, secondo altre esperienze di Schellen [1], l'impressione latente della luce sulla lastra fotografica sarebbe caratterizzata da un coefficiente di temperatura di 1,00. Ora, per quanto numericamente poco differiscano fra loro i valori dedotti dalle varie esperienze citate, ognuno comprende che sussiste una differenza sostanziale fra i risultati dei primi e quelli dell'ultimo autore, e precisamente quella che passa fra il negare e l'affermare l'influenza della temperatura sulla velocità d'azione della luce.

Comunque sia, il quesito che noi ci eravamo proposto non era quello di determinare con maggior precisione quel coefficiente, ma di vedere se, in accordo con quanto accade per altri processi fotochimici, si verificasse anche qui un regolare aumento del coefficiente stesso col crescere della lunghezza d'onda.

Per evitare di immergere le lastre nelle miscele frigorifere, ciò che può dar luogo manifestamente ad errori, abbiamo adottato il dispositivo rappresentato schematicamente dalla figura qui a lato. Da una medesima lastra fotografica tagliammo tante piccole lastre quadrate; una di queste veniva introdotta nel tubo T fin quasi al fondo in L; il tubo poteva chiudersi con un tappo a perfetta tenuta che portava internamente un'asta cui era fissato uno specchietto S inclinato a 45° rispetto all'asse del tubo: quest'ultimo portava ancora una tubulatura t che serviva a praticarvi il vuoto onde evitare, specialmente nelle esperienze a freddo, il deporsi di umidità sulla lastra fotografica. Il tubo era fasciato di carta nera e si poteva fare arri-

[1] Precht, Arch. für wissenschaftliche Photographie, I. 58.

vare sulla lastra la luce di una lampada posta in 1, a mezzo dello specchietto. Il raffreddamento aveva luogo immergendo il tubo in una miscela di anidride carbonica e di etere, posta in un tubo di Dewar. Sopra la lastrina fotografica ponemmo sempre una piccola negativa con chiaroscuri, allo scopo di poter meglio confrontare fra loro le varie prove. Come sorgente di luce ci servì una lampadina ad incandescenza da 2 volts, alimentata da un accumulatore; per le luci colorate adoperammo dei filtri che fornivano bande comprese fra i limiti seguenti:

	λ ($\mu\mu$)
Rosso [1] soluzione concentrata di eritrosina	650-620
Giallo " satura a caldo di cromato potassico .	620-585
Verde " " di solfato di nichel	550-530
Violetto " di cristalvioletto	437-394
Ultravioletto [2] soluzione di nitrosodimetilanilina . . .	400-350

Le lastre vennero sensibilizzate al giallo ed al verde con ammoniaca, nitrato d'argento ed eritrosina; al rosso con pinacromo in soluzione acquoso-alcoolica. Lo sviluppo delle lastre veniva fatto sempre dopo che queste, estratte dal tubo, avevano assunto la temperatura dell'ambiente; lo sviluppatore era il medesimo e così pure la durata dello sviluppo.

Noi abbiamo determinato, per tentativi, i tempi necessarî, a caldo e a freddo, per ottenere impressioni della stessa intensità, ed i risultati ottenuti sono riuniti nel seguente specchietto:

	Temperature	Tempi	Coefficienti
Luce bianca	15°	55″ 45″ 30″	
	— 85°	90″ 75″ 50″	1,05
" violetta	15°	90″	
	— 85°	150″	1,05
" verde	15°	156″	
	— 85°	255″	1,05
" gialla	15°	146″	
	— 85°	240″	1,05
" rossa	15°	145″	
	— 85°	240″	1,05

[1] Che questa luce non contenesse altri raggi capaci di agire sulle lastre fotografiche, ci accertammo col vedere che, nel nostro apparecchio, essa non impressionava una lastra *non sensibilizzata* in quattro minuti primi.

[2] Questo schermo lascia passare ancora un po' di luce verde, gialla e rossa, ma questo non ci disturbava nelle successive esperienze sulle carte ad annerimento diretto, che non sono sensibili a quei raggi colorati.

Come si vede, i coefficienti di temperatura, per la luce bianca e per le varie luci colorate, hanno tutti lo stesso valore di 1,05, che è assai vicino a quello che si calcola dalle citate esperienze di Abney e Dewar. Ciò non esclude tuttavia che il previsto aumento dei coefficienti stessi col crescere delle lunghezze d'onda, possa forse verificarsi ugualmente, sia pure in misura assai lieve, sperimentando in un campo più esteso di lunghezze d'onda e con maggiori intervalli di temperature, per quanto sia poco probabile che le imperfezioni inerenti ai metodi di misura permettano di garantire le terze cifre decimali dei detti coefficienti, nelle quali dovrebbero ridursi le differenze.

Hanno invece dato risultato conforme alle previsioni le prove da noi fatte con le carte ad annerimento diretto, al citrato d'argento.

Ci servimmo dello stesso apparecchio usato per le lastre; la sorgente di luce, naturalmente molto più intensa, era costituita da una lampada ad arco. Le esposizioni necessarie ad impressionare la carta al citrato, risultarono molto più lunghe di quelle occorse per le lastre. I risultati ottenuti sono i seguenti:

	Temperature	Tempi	Coefficienti
Luce bianca	15°	15′ 20′	
	— 85°	63′ 90′	1,16
» bleu [1]	15°	10′	
	— 85°	60	1,19
» ultravioletta . . .	15°	30′	
	— 85°	60′	1,07

Come era già stato veduto in processi fotochimici che si potevano seguire analiticamente [2], si osserva qui che i coefficienti più bassi corrispondono alle minori lunghezze d'onda; per la luce bianca, risultante dalle varie luci colorate, si ha un coefficiente medio. L'annerimento delle carte fotografiche cosidette al citrato, che contengono essenzialmente cloruro d'argento, essendo indubitabilmente dovuto ad una trasformazione chimica del sale di argento, si può ritenere che la reazione

$$AgCl \longrightarrow Ag + Cl$$

segua appunto la legge sopraddetta.

Il diverso comportamento delle lastre fotografiche potrebbe anche far pensare che l'immagine latente non fosse dovuta ad un processo fotochimico consistente nella scomposizione del cloruro d'argento nei suoi elementi; cosa che non chiarisce affatto la tanto dibattuta questione sulla natura dell'immagine latente, essendovi, come è noto, argomenti in favore della teoria secondo la quale la scomposizione del sale d'argento avrebbe luogo.

(1) Questa luce era costituita da una banda compresa fra le lunghezze d'onda di 470-490.

(2) M. Padoa e Teresa Minganti, questi Rendiconti, 1915, II, 97

Patologia vegetale. — *Ricerche sulla malattia del Castagno detta dell'inchiostro.* Nota di L. PETRI, presentata del Socio G. CUBONI [1].

Come già ho riferito in precedenti pubblicazioni, le conclusioni, alle quali ero giunto provvisoriamente nelle ricerche sull'etiologia del *mal dell'inchiostro*, tendevano ad affermare l'esistenza di un marciume del durame e dell'alburno, che dal colletto in direzione centrifuga si diffondeva contemporaneamente verso il basso dell'apparato radicale e verso l'alto del fusto. Tutte le ricerche microscopiche dirette e quelle colturali mi avevano sempre dimostrato che tanto alla base delle grosse radici, come al colletto e al disopra di questo, la necrosi dei tessuti corticali avveniva in via secondaria in seguito alla morte del cambio. Vi è sempre quindi un più o meno breve periodo di tempo in cui i tessuti necrosati della corteccia non presentano traccia di microrganismi. Questi ultimi sono invece rivelati, sia dall'esame microscopico, sia dalle colture, nel cambio e più facilmente nell'alburno e nel durame.

Da tali ricerche è però resultato che se in molti casi i micelî osservati al microscopio erano coltivabili, in altri le colture sementate con frammenti di durame, alburno o cambio infetti, rimanevano assolutamente sterili. Cosicchè anche dopo il resultato negativo di infezioni artificiali su piante sane, fui condotto a ritenere i microrganismi più o meno facilmente coltivabili come dei semplici saprofiti, invadenti i tessuti già uccisi da qualche altro microrganismo prettamente parassita e difficilmente coltivabile. I caratteri del marciume della base del tronco, i caratteri morfologici del micelio invadente il durame inducevano a riguardare la malattia come un caso particolare di infezione del colletto da parte di un fungo superiore, con tutta probabilità un poliporeo.

In questa conclusione confermava il costante sviluppo di micelio, riferibile a questo gruppo di funghi, sul durame e alburno del tronco e delle grosse radici dei castagni morenti in seguito alla malattia. Un simile micelio, oltre a dimostrarsi incoltivabile, è rimasto sempre sterile e quindi difficilmente determinabile sistematicamente. Solo in un caso ho potuto constatarne l'identità con una specie di *Poria* e col *Fomes Ribis*. Si tratterebbe in ogni modo di micelî appartenenti a poliporei diversi che variano da località a località.

[1] Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1916.

Questo fatto, e lo studio ancora più approfondito dell'iniziarsi e propagarsi della necrosi del colletto, mi hanno dimostrato in questi ultimi mesi, che il processo è molto più rapido di quello dovuto all'azione dei poliporei o funghi affini e che d'altra parte esso è indipendente dall'infezione del durame e dell'alburno. Questa, nei casi nei quali la pianta attaccata sia assolutamente immune da marciume preesistente del legno [1], si presenta solo in via secondaria, quando cioè il cambio è già attaccato. Essa però si inizia e si propaga molto rapidamente e sul principio avviene per opera di forme particolari d'ifomiceti lignicoli ai quali tien dietro il micelio di poliporei.

Sussiste quindi nella gran maggioranza dei casi quell'alterazione del corpo legnoso della regione del colletto a decorso centrifugo, su cui ho sempre insistito, ma essa deve esser riguardata come la conseguenza immediata dell'infezione del cambio da parte di un micelio parassita, che rapidamente si diffonde in senso longitudinale e più lentamente in senso trasversale. È questo micelio che determina la necrosi contemporanea della corteccia e dell'alburno, causando quelle striscie brune, coniche, con la base verso il colletto e spingentisi più o meno in alto sul fusto [2]. Simili striscie brune si trovano anche sulle grosse radici, ma in tal caso esse si allargano verso la base delle radici stesse, ed è in corrispondenza a queste striscie che all'esterno compaiono le macchie d'*inchiostro*. Basta scortecciare un tronco di pianta ammalata, quasi al livello del terreno, per svelare la presenza di queste zone longitudinali di tessuti imbruniti. La loro localizzazione sul tronco è spesso indicata dai giovani germogli del pedale disseccati. Ho già detto in precedenti Note che queste striscie brune non sono in continuità con quelle prodotte dal *Coryneum perniciosum* Briosi et Farneti. La confluenza di queste zone può solo avvenire quando la pianta è quasi del tutto disseccata.

La necrosi della base del tronco ha il suo punto di origine dalla regione del colletto. Questo fatto è ben dimostrato dal notevole allargarsi delle striscie brune verso il basso e dalla loro direzione di diffusione verso l'alto e verso l'estremità del fittone. Quando si seziona il fusto di una pianta ancora in vita, ma attaccata da qualche tempo, queste striscie brune compariscono come settori imbruniti sul piano di sezione della corteccia e dell'alburno, settori che vanno aumentando di estensione man mano che le sezioni sono condotte più vicino al colletto. La ormai dimostrata insussistente alterazione delle radici nella loro estremità, insieme ai fatti ora riassunti, circoscrivevano sempre più il campo delle indagini sull'origine della malattia.

(1) Questo caso, di mal dell'inchiostro *puro*, è assai raro a trovarsi, ed è d'altra parte necessaria condizione per poter ricercare la causa della malattia.

(2) Si veda a questo proposito la fotografia pubblicata nel riassunto che sulla questione ho fatto ne « L'Alpe » 1914-15.

Si trattava di determinare a quale microrganismo era dovuta l'alterazione progrediente del cambio. La figura qui unita, che rappresenta schematic amente una parte di sezione del fusto in cui l' infezione tende ad invaderre il piccolo settore ancora vivente, mostra con tutta evidenza il luogo dove le ricerche dovevano esser condotte.

Solo le sottili sezioni tangenziali del cambio, esaminate in acqua, motrano delle grosse ife che, generalmente a decorso longitudinale, s' insinuano fra le pareti delle cellule, inviando qua e là rari e brevi rami laterali.

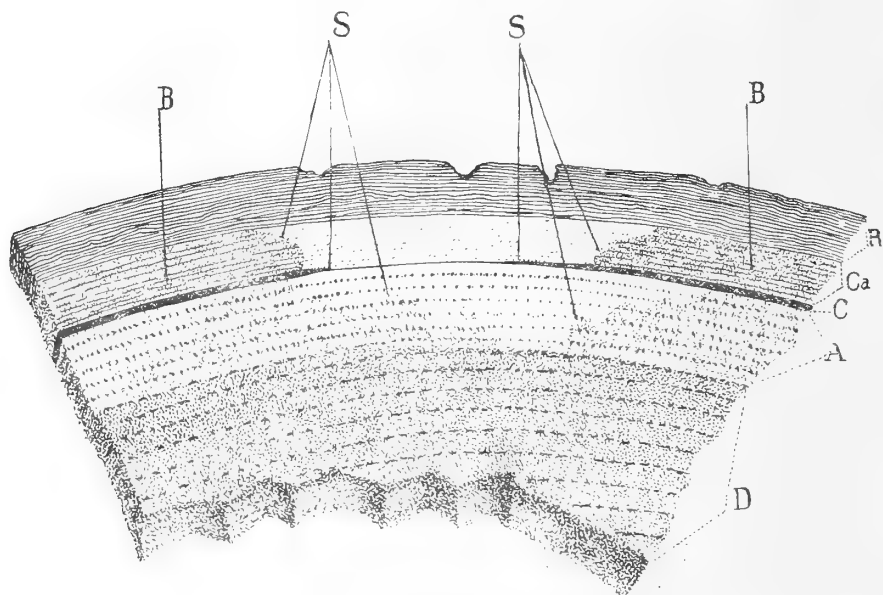



Fig. 1. — Parte di una sezione della base del fusto di un castagno ammalato. *B, B*, settori corrispondenti alle striscie brune longitudinali. *S, S*, limite fra tessuti sani e tessuti infetti (punteggiati) dove deve esser ricercato il parassita. *R*, ritidoma. *Ca*, corteccia vivente e in parte infetta (punteggiata). *C*, cambio (è segnato con grossa linea nera la porzione infetta). *A*, alburno con infezione (parte punteggiata) progredente in senso centrifugo. *D*, durame.

Anche i preparati, ottenuti con lo spappolamento di piccoli frammenti del cambio imbrunito, mostrano porzioni più o meno lunghe di tali ife. Quando si adoperi un mezzo chiarificante, come la glicerina, il cloralio idrato, ecc., il micelio diventa invisibile.

Come coloranti dei preparati durevoli ho adoperato con soddisfacente resultato il blu di naftilene e safranina, l'ematossilina ferrica (Heidenhaim) e safranina.

La microfotografia qui unita mostra un' ifa a percorso intercellulare fra gli elementi del cambio. Non sono stati osservati dei setti in queste ife.

I metodi di isolamento e di coltura tentati, dopo il resultato negativo di quelli usuali, sono stati i seguenti:

1°) prelevamento, in modo asettico, di tasselli di corteccia con cambio sano, sterilizzazione per 1 ora in tubi sterili a 55° C. per tre giorni consecutivi, innesto con frammenti di cambio infetto prelevato con ago a lancetta sterilizzato;

2° prelevamento di un tassello di corteccia e alburno con porzione di cambio infetto. Sterilizzazione rapida della superficie esterna del tassello

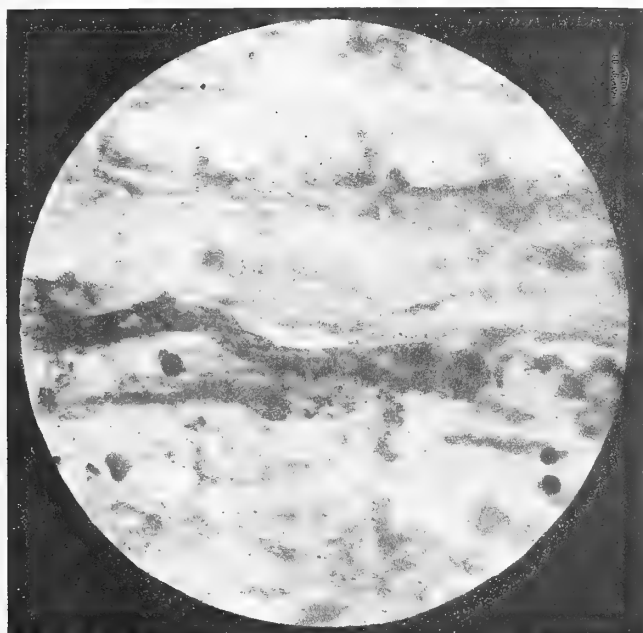



Fig. 2. — Microfotografia di una sezione tangenziale attraverso il cambio infetto (Fiss. picroformolo, col.: blu di naftilene + safranina O), (Ingr. $^{800}/_{1}$).

con soluzione di sublimato corrosivo al 1 $^{\circ}/_{\circ\circ}$. Lavaggio in acqua sterilizzata nell'autoclave a 120° C. Conservazione dei tasselli in tubi di Roux.

In queste due prove non è stato ottenuto alcun sviluppo di micelio, mentre l'esame microscopico ne aveva nettamente dimostrato la presenza nel cambio imbrunito.

Altri tentativi che ora sono in corso potranno forse riuscire ad ottenere l'isolamento e la coltura di questo microrganismo; ad ogni modo sarà possibile osservarne le varie fasi di sviluppo nei tessuti stessi.

Vi sono alcuni fatti che fanno escludere l'identità di questo micelio con quello del *Coryneum*:

1°) i suoi caratteri morfologici non coincidono con quelli di quest'ultimo fungo;

2°) esso resta localizzato per molto tempo nel cambio, non invadendo subito la corteccia nè l'alburno, ciò che invece fa rapidamente il *Coryneum*;

3° esso non è coltivabile coi metodi ordinarî, mentre il *C.* si sviluppa facilmente sui più comuni mezzi nutritivi;

4°) dopo la morte delle cellule del cambio attaccate dal micelio in questione, muoiono anche le ife di quest'ultimo [1].

Dalle ricerche sin qui eseguite sembra che l'infezione s'inizî sotto il livello del terreno, da ferite presso la base delle grosse radici.

In una prossima Nota sarà riferito sul risultato di ulteriori ricerche ora in corso [2].

[1] Non è ancora stata osservata la formazione di spore o di altri organi di conservazione del micelio.

[2] Durante la stampa di questa Nota, il risultato di nuove indagini rende presumibile che il micelio, trascorso il periodo di vita parassitaria a spese del cambio, provveda alla formazione dei suoi organi di riproduzione col passaggio di alcune ife nella corteccia, a condizione che questa non sia stata ancora invasa da saprofiti. Questo fatto spiegherebbe a un tempo la relativamente lenta diffusione della malattia, verificandosi non troppo facilmente le condizioni adatte per la formazione di organi sporigeni, e la difficoltà di determinare il vero agente patogeno a cui devesi il *mal dell'inchiostro.*

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XI. Fasc. 11.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia durante le ferie del 1916.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 6.

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXV.° — Fascicolo 6°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Matematica. — *Sopra un'interpretazione geometrica dei sistemi commutativi di numeri a più unità.* Nota del Socio Luigi Bianchi [1].

1. In alcune ricerche di geometria infinitesimale ordinaria, e in generale ad un numero qualunque n di dimensioni, si presenta il problema di determinare tutte le forme differenziali quadratiche in n variabili $x_1, x_2, \dots x_n$

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1\cdots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{1}$$

che soddisfano alle condizioni seguenti:

a) *la forma* (1) *sia a curvatura Riemanniana nulla, cioè sia riducibile al tipo normale del* ds^2 *euclideo*

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2\,; \tag{2}$$

b) *i valori dei simboli a tre indici* $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ s \end{matrix} \right\}$ [2] *di seconda specie, calcolati per la forma* (1), *siano tutti costanti.*

Il problema, affrontato direttamente, conduce ad un sistema di equazioni a derivate parziali del secondo ordine per le n funzioni incognite y_i delle variabili indipendenti x_i, ed appare di difficile soluzione. Dimostrerò nella

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 settembre 1916.

[2] Ved. il Cap. II delle *Lezioni di geometria differenziale* (vol. I).

presente Nota che esso si collega, in modo singolare, con la teoria dei sistemi *commutativi* di numeri ad n unità irriducibili $(e_1, e_2, \dots e_n)$, e da questa riceve la sua soluzione completa, eccettuati alcuni casi particolari di cui si dirà più oltre.

Ad ogni tale sistema commutativo di numeri $(e_1, e_2, \dots e_n)$ corrispondono in effetto infinite forme differenziali soddisfacenti alle condizioni enunciate a) e b), precisamente ne corrispondono $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$, e le relative espressioni dei coefficienti a_{ik} in funzione delle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ si trovano *senza alcuna integrazione*. Medesimamente per ciascuna di queste forme la riduzione al tipo normale (2) richiede soltanto operazioni algebriche. L'algoritmo dei sistemi (commutativi) di numeri complessi superiori riceve così un nuovo significato che sembra degno di attenzione. Essendo ben noti per esempio tutti i sistemi di numeri a *2* ed a *3* unità, si possono subito scrivere (ved. n. 7) le possibili forme corrispondenti del ds^2 del piano e dello spazio con valori costanti pei simboli $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ di Christoffel.

2. Cominciamo da una ricerca più generale e domandiamo come, date in funzione delle x le espressioni

$$\gamma_{iks} = \left\{ {ik \atop s} \right\}$$

dei simboli di Christoffel per una qualsiasi forma differenziale (1), si possano calcolare i coefficienti a_{ik}. Bene inteso che, per le proprietà dei detti simboli, le espressioni date γ_{iks} non debbono cangiare permutando i due primi indici, cioè si deve supporre

$$\gamma_{iks} = \gamma_{kis} \,. \tag{3}$$

Le formole al § 31 (19*) del mio libro citato dimostrano che le funzioni a_{ik} delle x dovranno soddisfare al seguente sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \sum_{\lambda}^{1\dots n} \gamma_{il\lambda}\, a_{k\lambda} + \sum_{\lambda}^{1\dots n} \gamma_{kl\lambda}\, a_{i\lambda} \tag{I}$$
$$(i, k, l = 1, 2, 3, \dots n) \,.$$

Ma anche viceversa, se le a_{ik} soddisfano le (I), ed è diverso da zero il determinante $A = |a_{ik}|$, il valore del simbolo $\left\{ {ik \atop s} \right\}$ per la forma differenziale (1) sarà dato da γ_{iks}. E infatti, se formiamo dapprima dalle (I) il valore del simbolo di *prima specie* $\left[{ik \atop l} \right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \right)$, troviamo

$$\left[{ik \atop l} \right] = \sum_{\lambda}^{1\dots n} \gamma_{ik\lambda}\, a_{l\lambda} \,,$$

e per ciò [1]

$$\left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\} = \sum_{\lambda}^{1\dots n} A_{ls} \left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right] = \sum_{\lambda}^{1\dots n} \gamma_{ik\lambda} \sum_{l}^{1\dots n} A_{ls}\, a_{l\lambda} = \sum_{\lambda}^{1\dots n} \varepsilon_{s\lambda}\, \gamma_{ik\lambda} = \gamma_{iks}\,, \qquad \text{c. d. d.}$$

Ma, in generale, se le γ_{iks} sono date comunque in funzione delle x, il sistema differenziale (I) non avrà soluzioni. Per esaminare la cosa più da vicino, occorre formare le condizioni d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}\right) = 0\,,$$

che si calcolano subito nelle seguenti:

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\lambda}^{1\dots n} \left\{ \frac{\partial \gamma_{il\lambda}}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_{ij\lambda}}{\partial x_l} + \sum_{s}^{1\dots n} (\gamma_{ils}\,\gamma_{sj\lambda} - \gamma_{ijs}\,\gamma_{sl\lambda}) \right\} a_{k\lambda} + \\ &+ \sum_{\lambda}^{1\dots n} \left\{ \frac{\partial \gamma_{kl\lambda}}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_{kj\lambda}}{\partial x_l} + \sum_{s}^{1\dots n} (\gamma_{kls}\,\gamma_{sj\lambda} - \gamma_{kjs}\,\gamma_{sl\lambda}) \right\} a_{ik} = 0\,. \end{aligned} \right.$$

Queste, *ove non siano identità*, dànno luogo ad un certo numero di equazioni lineari omogenee nelle a_{ik}, mediante le quali altrettante delle a_{ik} potranno eliminarsi dalle (I). E così continuando, come insegna la teoria generale, si perverrà a riconoscere se le (I) sono compatibili, e quale grado di arbitrarietà (quante costanti arbitrarie) possiede la soluzione completa.

3. Il caso che a noi più interessa è quello appunto in cui le condizioni d'integrabilità (4) si trovano *identicamente* soddisfatte, sussistendo per tutti i valori degli indici le relazioni

$$(A)\qquad \frac{\partial \gamma_{il\lambda}}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_{ij\lambda}}{\partial x_l} + \sum_{s}^{1\dots n} (\gamma_{ils}\,\gamma_{sj\lambda} - \gamma_{ijs}\,\gamma_{sl\lambda}) = 0\,.$$
$$(i\,,\lambda\,,l\,,j\,, = 1\,,2\,,3\,,\dots n)\,.$$

In questo caso il sistema (I) è *completamente* integrabile, e la sua soluzione generale contiene, linearmente ed omogeneamente, $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie. Ora, per ogni soluzione (a_{ik}) delle (I), i valori corrispondenti dei simboli $\left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\}$ eguagliano, come si è visto, le espressioni date γ_{iks}, ed il primo membro delle (A) coincide col valore del simbolo a quattro indici e di seconda specie (*Lezioni*, § 34)

$$\{i\lambda\,,lj\}\,.$$

[1] Ricordiamo che A_{ls} ha il significato $A_{ls} = \frac{\partial \log A}{\partial a_{ls}}$ $(A = |a_{ik}|)$ ed $\varepsilon_{s\lambda}$ rappresenta *0* per $s \mathrel{=\!\!|} \lambda$, e *1* per $s = \lambda$.

Il verificarsi delle (A) esprime adunque che sono nulli i valori di tutti questi simboli, e per ciò anche dei simboli di Riemann (ik, lj). La forma differenziale (I) risulta adunque a curvatura Riemanniana nulla; e viceversa, se questo accade, le (A) sono altrettante identità, onde concludiamo:

Il sistema differenziale (I) *è completamente integrabile nel solo caso delle forme differenziali a curvatura nulla.*

Possiamo presentare questo risultato sotto altra forma, dicendo che ogni forma differenziale a curvatura nulla

$$(5) \qquad ds^2 = \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

ne determina $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ altre

$$(5') \qquad ds'^2 = \sum_{ik}^{1\ldots n} a'_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

che hanno a comune con la prima i valori dei simboli $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ di Christoffel. Fissate due di queste forme (5), (5'), si possono riguardare come esprimenti i quadrati ds^2, ds'^2 degli elementi lineari di due spazii euclidei S_n, S'_n, e ne risulta una rappresentazione dell'uno spazio sull'altro (o dello spazio euclideo sopra sè stesso), ove si riguardano come corrispondenti i punti dati dagli stessi valori delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$. È facile vedere che: *queste rappresentazioni conservano la proporzionalità dei volumi* (meglio degli ipervolumi per $n > 3$, delle aree per $n = 2$). E infatti se A, A' sono i due discriminanti delle forme (5), (5'), si ha per note formole (*Lezioni*, vol. I, pag. 65)

$$\frac{\partial \log A}{\partial x_l} = \frac{\partial \log A'}{\partial x_l} = 2 \sum_{i}^{1\ldots n} \left\{ \begin{matrix} il \\ i \end{matrix} \right\},$$

onde segue che A' differisce da A per un fattore costante di proporzionalità.

4. Lasciamo queste generalità e veniamo ora all'oggetto nostro speciale, cioè: *alla ricerca delle forme differenziali* (1) *a curvatura nulla, con valori costanti* γ_{iks} *pei simboli* $\left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\}$.

In tal caso le (A) diventano $\sum_{s}^{1\ldots n} \gamma_{ils}\gamma_{sj\lambda} = \sum_{s}^{1\ldots n} \gamma_{ijs}\gamma_{sl\lambda}$, ovvero, permutando gli indici di sommazione i, l, col tener presente la (3):

$$(B) \qquad \sum_{s}^{1\ldots n} \gamma_{ils}\gamma_{sj\lambda} = \sum_{s}^{1\ldots n} \gamma_{ljs}\gamma_{si\lambda} \quad (i, \lambda, j, l = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Per quanto precede, queste (B) esprimono le condizioni *necessarie e sufficienti* affinchè le costanti γ_{iks} appartengano, come valori dei simboli

$\left\{ {ik \atop s} \right\}$, ad una e quindi (n. 3) ad $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme differenziali (1) a curvatura nulla.

Ma le stesse condizioni (B), insieme ad una condizione complementare di cui ora diremo, stanno appunto alla base della teoria dei sistemi commutativi di numeri ad n unità irriducibili $(e_1, e_2, \dots e_n)$, come qui brevemente rammentiamo (¹). Ogni numero x del sistema ha la forma

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = \sum_i^{1\dots n} x_i e_i , \tag{6}$$

ove $x_1, x_2, \dots, x_n$ rappresentano numeri ordinarii. Definita l'addizione secondo le leggi formali ordinarie, si definisce la moltiplicazione assegnando le formole elementari di moltiplicazione

$$e_i e_k = e_k e_i = \sum_i^{1\dots n} \gamma_{iks} e_s , \tag{7}$$

dove le γ_{iks} sono costanti assegnate. Il prodotto del numero $x = \sum_i^{1\dots n} x_i e_i$ per un altro $y = \sum_l^{1\dots n} x_l e_l$ è allora

$$xy = yx = \sum_s^{1\dots n} e_s \sum_s^{1\dots n} \gamma_{ils} x_i y_l .$$

Le costanti γ_{iks} si assoggettano in primo luogo alle condizioni necessarie affinchè, nel sistema di numeri, valga per la moltiplicazione anche la legge *associativa* $(xy)z = x(yz)$, e questo porta appunto alle (B), perchè supposto $z = \sum^{1\dots n} z_j e_j$, ne viene

$$(xy)z = \sum_\lambda^{1\dots n} e_\lambda \sum_{iljs}^{1\dots n} \gamma_{ils} \gamma_{sj\lambda} x_i y_l z_j$$

$$x(yz) = \sum_\lambda^{1\dots n} e_\lambda \sum_{iljs}^{1\dots n} \gamma_{ljs} \gamma_{si\lambda} x_i y_l z_j .$$

Ma qui, in secondo luogo, volendo che l'operazione inversa della moltiplicazione, *la divisione*, sia in generale effettuabile, bisogna aggiungere alle (B) l'altra condizione complementare (cui sopra si è alluso) che il determinante $\Delta = |\beta_{ks}|$ formato cogli elementi

$$\beta_{ks} = \sum_i^{1\dots n} \gamma_{iks} x_i$$

(¹) Ved. p. es. Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*, Kap. 21 (Leipzig, Teubner, 1893).

non sia *identicamente* nullo nelle x_i, riguardate come variabili indipendenti. Che quest'ultima condizione non sia una conseguenza delle (B) è manifesto, poichè p. es. se si prendono nulle tutte le γ_{iks} si soddisfano le (B), ma insieme si annulla anche Δ.

5. Ritornando al nostro problema delle forme differenziali (1) a curvatura nulla, e con valori costanti γ_{iks} pei simboli $\left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\}$, diremo per brevità *singolare* una tale forma quando per quei valori γ_{iks} sia identicamente nullo il determinante Δ. Lasciando da parte queste eventuali forme singolari, possiamo concludere intanto: *Ad ogni forma differenziale quadratica in n variabili a curvatura nulla, e con valori costanti* γ_{iks} *pei simboli* $\left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\}$, *che non sia singolare, corrisponde un sistema commutativo di numeri ad n unità; viceversa ad ogni tale sistema commutativo corrispondono* $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *forme differenziali* (1) *dotate delle proprietà volute.*

Supposto ora assegnato il sistema commutativo di numeri $(e_1, e_2, \ldots e_n)$, domandiamo: *come si trovano le* $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *forme differenziali corrispondenti?* Il problema consiste nell'integrazione del sistema (I), completamente integrabile, di equazioni ai differenziali totali; ma, poichè questo sistema è lineare omogeneo *a coefficienti costanti*, si riduce subito ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari ed a coefficienti costanti, e bastano operazioni algebriche (la risoluzione della relativa equazione caratteristica) per compiere l'integrazione. Abbiamo dunque il risultato:

Le $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *forme differenziali quadratiche, soddisfacenti alle condizioni* a) b) *del n. 1, che corrispondono ad un dato sistema commutativo di numeri* $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ *si trovano senza alcuna integrazione.*

È manifesto che quest'ultimo risultato vale anche per le eventuali forme singolari, assegnati che siano i valori delle costanti γ_{iks}, compatibilmente con le (B).

6. Ora dobbiamo ricordare che un sistema di numeri $(e_1 . e_2, \ldots e_n)$ può ricevere infinite forme equivalenti (che si computano dello stesso *tipo*), e ciò cangiando le unità fondamentali $e_1, e_2, \ldots e_n$ in altre $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots \overline{e}_n$ del sistema, secondo una sostituzione lineare ed omogenea

$$\overline{e}_i = \sum_r^{1\ldots n} c_{ir}\, e_r\,, \tag{8}$$

dove le c_{ir} sono costanti qualunque, così però che il modulo o determinante $|c_{ir}|$ della sostituzione sia diverso da zero. Con questo mutamento delle unità fondamentali, restano anche cambiate le costanti γ_{iks} in altre nuove $\overline{\gamma}_{iks}$, che si calcolano subito dalle conseguenti relazioni lineari

$$\sum_\lambda^{1\ldots n} \overline{\gamma}_{ik\lambda}\, c_{\lambda\mu} = \sum_{r,s}^{1\ldots n} \gamma_{rs\mu}\, c_{ir}\, c_{ks} \qquad (i, k, \ldots \mu = 1, 2, \ldots n). \tag{9}$$

Queste, tenendo fissi i, k, dànno per $\overline{\gamma}_{ik1}, \overline{\gamma}_{ik2}, \ldots \overline{\gamma}_{ikn}$ n equazioni lineari con determinante $|c_{\lambda\mu}| \neq 0$ e si risolvono immediatamente.

Dopo ciò, è ben naturale domandare: *quale significato ha per le corrispondenti forme differenziali quadratiche questo cambiamento di unità?* Per vederlo eseguiamo, sulle variabili x di una delle nostre forme differenziali, sia $ds^2 = \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, la sostituzione lineare intera

$$x_i = \sum_r^{1\ldots n} c_{ri}\, \overline{x}_r + c_i\,, \tag{10}$$

dove le c_{ri} sono le costanti stesse che già figurano nella sostituzione (trasposta) (8), e le $c_1, c_2, \ldots c_n$ indicano nuove costanti arbitrarie. Supponiamo che, per questa sostituzione (10), la forma data si cangi nell'altra $\sum_{ik}^{1\ldots n} \overline{a}_{ik}\, d\overline{x}_i\, d\overline{x}_k$, e indichiamo con un soprassegno $\overline{\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ s \end{matrix} \right\}}$ i nuovi valori dei simboli di Christoffel. Applichiamo allora le formole fondamentali di Christoffel per l'equivalenza di due forme quadratiche [ved. *Lezioni*, § 30, formole (II)]:

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial \overline{x}_r\, \partial \overline{x}_s} = \sum_\mu^{1\ldots n} \overline{\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ \mu \end{matrix} \right\}} \frac{\partial x_\nu}{\partial \overline{x}_\mu} - \sum_{ik}^{1\ldots n} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r} \frac{\partial x_k}{\partial \overline{x}_s}\,,$$

e siccome qui, a causa delle (10),

$$\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r} = c_{ri}\quad,\quad \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial \overline{x}_r\, \partial \overline{x}_s} = 0\,,$$

ne verrà

$$\sum_\mu^{1\ldots n} \overline{\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ \mu \end{matrix} \right\}} c_{\mu\nu} = \sum_{i,k}^{1\ldots n} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \nu \end{matrix} \right\} c_{ri}\, c_{sk}\,,$$

che, mutando le notazioni degli indici, scriviamo

$$\sum_\lambda^{1\ldots n} \overline{\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\}} c_{\lambda\mu} = \sum_{r,s}^{1\ldots n} \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ \mu \end{matrix} \right\} c_{ir}\, c_{ks}\,.$$

Se si confrontano queste formole con le (9), ricordando che $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ \mu \end{matrix} \right\} = \gamma_{rs\mu}$, se ne deduce subito $\overline{\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\}} = \overline{\gamma}_{ik\lambda}$, e si vede quindi che: *il cangiamento delle unità corrisponde al passaggio dalla prima forma differenziale* $\sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ *alla equivalente* $\sum_{ik}^{1\ldots n} \overline{a}_{ik}\, d\overline{x}_i\, d\overline{x}_k$, *mediante la sostituzione lineare intera* (10) *eseguita sulle variabili.*

Si conclude che basta, per ogni sistema commutativo di numeri, fissare una determinata forma come normale e calcolare, secondo il n. 5 le forme differenziali corrispondenti; dopo di che, operando sulle variabili di una tale forma la più generale sostituzione lineare intera (10), si avranno tutte le altre forme differenziali appartenenti al medesimo tipo.

7. Se applichiamo questi risultati generali ai casi $n=2$ e $n=3$, troveremo le forme (non singolari) del ds^2 del piano e dello spazio ordinario con valori costanti pei simboli $\left\{ {ik \atop s} \right\}$ di Christoffel. Per questo ricorriamo alle tabelle date al § 4, Kap. 21 del citato libro di Lie-Scheffers.

Caso $n=2$. Esistono due soli tipi di sistemi di numeri a due unità (e_1, e_2), *ambedue commutativi*, e definiti dalle rispettive formole di moltiplicazione elementare

$$\text{Tipo I)} \quad e_1^2 = 0 \ , \ e_2^2 = e_2 \ , \ e_1 e_2 = e_1$$
$$\text{Tipo II)} \quad e_1^2 = e_1 \ , \ e_2^2 = -e_1 \ , \ e_1 e_2 = e_2 \, ,$$

ove il rappresentante del secondo tipo è stato scelto in guisa da corrispondere agli ordinarii numeri complessi. I corrispondenti valori dei simboli di Christoffel sono quindi:

$$\text{Tipo I)} \quad \left\{ {11 \atop 1} \right\} = 0 \, , \left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0 \; ; \left\{ {22 \atop 1} \right\} = 0 \quad . \left\{ {22 \atop 2} \right\} = 1 \; : \left\{ {12 \atop 1} \right\} = 1 \, , \left\{ {12 \atop 2} \right\} = 0$$
$$\text{Tipo II)} \quad \left\{ {11 \atop 1} \right\} = 1 \, , \left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0 \; ; \left\{ {22 \atop 1} \right\} = -1 \, , \left\{ {22 \atop 2} \right\} = 0 \; ; \left\{ {12 \atop 1} \right\} = 0 \, , \left\{ {12 \atop 2} \right\} = 1 \, ,$$

e, integrando (n. 5) le relative equazioni (I), troviamo pei coefficienti della forma differenziale

$$ds^2 = a_{11}\,dx_1^2 + 2a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2$$

le espressioni seguenti:

$$\text{Tipo I)} \quad a_{11} = ae^{2x_2} \ , \ a_{12} = (ax_1 + b)\,e^{2x_2} \ . \ a_{22} = (ax_1^2 + 2bx_1 + c)\,e^{2x_2}$$
$$\text{Tipo II)} \quad a_{11} = (a + b \operatorname{sen} 2x_2 + c \cos 2x_2)\,e^{2x_1} \, ,$$
$$a_{12} = (b \cos 2x_2 - c \operatorname{sen} 2x_2)\,e^{2x_1} \ , \ a_{22} = (a = b \operatorname{sen} 2x_2 - c \cos 2x_2)\,e^{2x_1} \, .$$

Ambedue le volte a, b, c indicano tre costanti arbitrarie, solo che nel primo caso deve essere $ac - b^2 \neq 0$, nel secondo $a^2 - b^2 - c^2 \neq 0$, affinchè non si annulli il discriminante della forma.

Caso $n=3$. Esistono cinque tipi diversi di sistemi di numeri a tre unità, dei quali però uno, perchè non commutativo, non entra in considerazione nel caso nostro. Gli altri quattro (commutativi) sono contrassegnati dalle rispettive formole elementari di moltiplicazione:

Tipo I) $e_1^2=0\ ,\ e_2^2=0\ ,\ e_3^2=e_3\ ,\ e_1e_2=0\ ,\ e_1e_3=e_1\ ,\ e_2e_3=e_2$

Tipo II) $e_1^2=0\ ,\ e_2^2=e_1\ ,\ e_3^2=e_3\ ,\ e_1e_2=0\ ,\ e_1e_3=e_1\ ,\ e_2e_3=e_2$

Tipo III) $e_1^2=e_1\ ,\ e_2^2=0\ ,\ e_3^2=e_3\ ,\ e_1e_2=0\ ,\ e_1e_3=0\ ,\ e_2e_3=e_2$

Tipo IV) $e_1^2=e_1\ ,\ e_2^2=e_2\ ,\ e_3^2=e_3\ ,\ e_1e_2=0\ ,\ e_1e_3=0\ ,\ e_2e_3=0\ .$

Tenendo conto dei corrispondenti valori dei simboli $\left\{ {ik \atop s} \right\}$, il calcolo dei 6 coefficienti a_{ik} nella forma differenziale ternaria:

$$ds^2=a_{11}dx_1^2+a_{22}dx_2^2+a_{33}dx_3^2+2a_{12}dx_1dx_2+2a_{13}dx_1dx_3+2a_{23}dx_2dx_3$$

si fa come si è visto al n. 5, e si trovano le espressioni seguenti:

Tipo I) $$\begin{cases} a_{11}=ae^{2x_3}\ ,\ a_{22}=ce^{2x_3}\ ,\ a_{33}=(ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2+2\alpha x_1+2\beta x_2+\gamma)e^{2x_3} \\ a_{12}=be^{2x_3}\ ,\ a_{13}=(ax_1+bx_2+\alpha)e^{2x_3}\ ,\ a_{23}=(bx_1+cx_2+\beta)e^{2x_3} \end{cases}$$

Tipo II) $$\begin{cases} a_{11}=ae^{2x_3}\ ,\ a_{22}=(ax_2^2+2bx_2+c)\,e^{2x_3}\ , \\ a_{33}=\left\{ax_1^2+ax_1x_2^2+2bx_1x_2+2\alpha x_1+a\dfrac{x_2^4}{4}+bx_2^3+(\alpha+c)x_2^2+2\beta x_2+\gamma\right\}e^{2x_3} \\ a_{12}=(ax_2+b)\,e^{2x_3}\ ,\ a_{13}=\left(ax_1+\dfrac{ax_2^2}{2}+bx_2+\alpha\right)e^{2x_3}\ , \\ a_{23}=\left\{ax_1x_2+\dfrac{ax_1^3}{2}+\dfrac{3bx_2^2}{2}+(\alpha+c)\,x_2+\beta\right\}e^{2x_3} \end{cases}$$

Tipo III) $$\begin{cases} a_{11}=ae^{2x_3}\ ,\ a_{22}=ce^{2x_3}\ ,\ a_{33}=(cx_2^2+2\beta x_2+\gamma)\,e^{2x_3} \\ a_{12}=be^{x_1+x_3}\ ,\ a_{13}=(bx_2+\alpha)\,e^{2x_3}\ ,\ a_{23}=(cx_2+\beta)\,e^{2x_3} \end{cases}$$

Tipo IV) $$\begin{cases} a_{11}=ae^{2x_1}\ ,\ a_{22}=ce^{2x_2}\ ,\ a_{33}=\gamma e^{2x_3} \\ a_{12}=be^{x_1+x_2}\ ,\ a_{13}=\alpha e^{x_1+x_3}\ ,\ a_{23}=\beta e^{x_2+x_3}\ . \end{cases}$$

In tutte queste formole $a\,,b\,,c\,,\alpha\,,\beta\,,\gamma$ indicano 6 costanti arbitrarie, soggette alla sola condizione che sia diverso da zero il determinante $\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$, dal quale il discriminante della forma non differisce che per un fattore esponenziale.

Tutte le forme differenziali (non singolari) pel ds^2 del piano e dello spazio, con valori costanti pei simboli $\left\{ {ik \atop s} \right\}$, si ottengono da quelle scritte nel presente numero effettuando sulle variabili la più generale sostituzione lineare intera (n. 6).

8. Ritorniamo al caso generale di n qualunque, e supponiamo di conoscere una delle nostre forme differenziali $ds^2=\sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ (singolari o no),

a curvatura nulla e con valori costanti γ_{iks} pei simboli $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ s \end{matrix} \right\}$. Sappiamo che la forma è riducibile al tipo normale: $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$, e resta che vediamo quali sono le operazioni necessarie per effettuare questa riduzione.

Cominciamo dal dimostrare che *senza alcuna integrazione* si possono calcolare le $\frac{n(n+1)}{2}$ trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo continuo $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$ delle trasformazioni della forma in sè, ovvero, in linguaggio geometrico, del gruppo dei movimenti dello spazio S_n euclideo. Se si indica con $Xf = \sum_i^{1\dots n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ una di queste trasformazioni infinitesime, le condizioni pei coefficienti ξ_i consistono nelle *equazioni di Killing*

$$\sum_r^{1\dots n} \left\{ \xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right\} = 0,$$

alle quali val meglio qui dare un'altra forma equivalente, cangiando le funzioni incognite ξ_i nelle altre η_i date da

$$\eta_i = \sum_r^{1\dots n} a_{ir}\, \xi_r, \tag{11}$$

per le quali η esprimiamo inversamente le ξ con le formole

$$\xi_i = \sum_r^{1\dots n} A_{ir}\, \eta_r; \tag{11*}$$

allora le equazioni di Killing si scrivono sotto l'altra forma

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} = 2 \sum_\lambda^{1\dots n} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\} \eta_\lambda. \tag{12}$$

Siccome nel caso nostro i valori $\gamma_{ik\lambda} = \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\}$ sono costanti, associando alle (12) quelle che se ne ottengono per derivazione, si ottiene il sistema seguente:

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} = 2 \sum_\lambda^{1\dots n} \gamma_{ik\lambda}\, \eta_\lambda \\ & \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x_k\, \partial x_l} = \sum_\lambda^{1\dots n} \left(\gamma_{ik\lambda} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial x_l} + \gamma_{il\lambda} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial x_k} - \gamma_{kl\lambda} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial \omega_i} \right), \end{aligned} \right.$$

che equivale alle *equazioni di definizione* del gruppo, secondo Lie. Rispetto alle $n(n+1)$ funzioni incognite η_i, $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}$ il sistema (C) è un sistema *com-*

pleto misto ai differenziali totali, nel quale le prime (C) sono $\frac{n(n+1)}{2}$ relazioni (lineari) finite fra le dette funzioni. Ora il sistema (C) è lineare omogeneo *con coefficienti costanti*, e per la stessa ragione addotta al n. 5, se ne avranno con sole operazioni algebriche gli integrali generali η_i contenenti, linearmente ed omogeneamente, $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie. Così calcoleremo in effetto, senza alcuna integrazione, le $r=\frac{n(n+1)}{2}$ trasformazioni infinitesime

$$X_1 f\,,\ X_2 f\,,\ \ldots\ X_r f \qquad \left(r=\frac{n(n+1)}{2}\right) \tag{13}$$

generatrici del gruppo G_r di movimenti.

9. Ottenuto questo primo risultato, arriviamo rapidamente al nostro scopo, isolando innanzi tutto fra i movimenti Xf le *traslazioni infinitesime*, che sappiamo essere in numero di n indipendenti, diciamo

$$Z_k f=\sum_i^{1\ldots n} \zeta_i^{(k)} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\,,2\,,\ldots n)\,. \tag{14}$$

Per questo basta fare, rispetto ad un punto qualunque $(x_i^{(0)})$ fisso sullo spazio, la *distribuzione canonica* delle r trasformazioni infinitesime (13), a seconda dei loro ordini, ciò che si ottiene con semplice risoluzione di sistemi lineari; ed allora avremo n trasformazioni d'ordine zero, che saranno precisamente le traslazioni cercate (14), e le residue $\frac{n(n-1)}{2}$ daranno le rotazioni infinitesime attorno al punto.

Calcolate così le $Z_k f$, osserviamo che queste non sono legate fra loro da alcuna relazione lineare a coefficienti costanti o variabili (il determinante delle $\zeta_i^{(k)}$ è diverso da zero); inoltre esse soddisfano alle relazioni di composizione $(Z_k\,,Z_l)f=0$ e generano il gruppo Abeliano G_n delle traslazioni. Applichiamo ora i teoremi generali di Lie sull'integrazione dei *sistemi completi*, che ammettono note trasformazioni infinitesime.

Osserviamo p. es. che le $n-1$ equazioni simultanee a derivate parziali

$$Z_2 f=0\,,\ Z_3 f=0\,,\ \ldots\ Z_n f=0 \tag{15}$$

formano un sistema completo (Jacobiano), che ammette la trasformazione infinitesima $Z_1 f$. Esiste per ciò *una* soluzione del sistema (15) [*invariante* del gruppo $G_{n-1}\equiv(Z_2 f, Z_3 f, \ldots Z_n f)$], e detta u una tale soluzione, risulta $Z_1 u$ una funzione della u *non nulla*. Possiamo quindi *normalizzare* la u in una soluzione u_1 tale che sia $Z_1 u_1=1$, e dalle n condizioni compatibili

$$Z_1 u_1=1\,,\ Z_2 u_1=0\,,\ \ldots\ Z_n u_1=0\,,$$

essendo $|\zeta_i^{(k)}| \neq 0$, si traggono tutte le derivate $\frac{\partial u_1}{\partial x_k}$, per ciò si avrà u_1 con una quadratura. In generale *con n quadrature* determineremo n funzioni $u_1, u_2, \dots u_n$ delle x tali che si abbia

$$Z_k u_i = \varepsilon_{ki}, \tag{16}$$

e queste n funzioni fra loro necessariamente indipendenti, perchè dalle (16) risulta $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)} \neq 0$, potranno essere assunte come nuove variabili. In queste variabili u la $Z_k f$ diventa, a causa delle (16),

$$Z_k f = \sum_i^{1\dots n} \frac{\partial f}{\partial u_i} Z_k u_i = \frac{\partial f}{\partial u_k},$$

e corrispondentemente la nostra forma differenziale si trasformerà nella nuova $\sum_{ik}^{1\dots n} b_{ik}\, du_i\, du_k$, *coi coefficienti b_{ik} costanti*, come risulta p. es. dalle equazioni di Killing, la forma ammettendo qui le trasformazioni infinitesime $\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial u_n}\right)$. Così abbiamo il ds^2 dello spazio ridotto, come si voleva, in coordinate cartesiane, che risulteranno in generale oblique, e potranno subito trasformarsi in ortogonali. Volendo ottenere il ds^2 già sotto forma ortogonale, basterebbe del resto cangiare le $Z_k f$ in n loro combinazioni indipendenti che rappresentino n traslazioni secondo le direzioni di una n^{pla} ortogonale, per modo che le nuove $Z_k f$ soddisferanno alle condizioni $\sum_{ik} a_{ik} \zeta_i^{(r)} \zeta_k^{(s)} = 0$ per $r \neq s$.

Con questo primo metodo la riduzione della nostra forma differenziale $ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, a curvatura nulla, e con valori costanti pei simboli $\left\{ {ik \atop l} \right\}$, al tipo normale $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$ si effettua *con n quadrature*.

10. Un secondo metodo, che ora passiamo ad esporre, ci permette di arrivare più brevemente allo scopo e di risparmiare le quadrature. Per questo ricordiamo che, ogni qualvolta la forma differenziale

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è a curvatura nulla, formano un sistema completamente integrabile le $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni del secondo ordine (ved. *Lezioni*, vol. I, § 185)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial x_k} = \sum_\lambda^{1\dots n} \left\{ {ik \atop \lambda} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n), \tag{17}$$

e la soluzione generale U contiene, linearmente ed omogeneamente, $n+1$ costanti arbitrarie, i valori iniziali della U e delle sue n derivate prime. Nel caso nostro le (17) sono a coefficienti $\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}$ *costanti*, e però l'integrazione si effettua *con sole operazioni algebriche.* D'altra parte se U, V sono due qualunque soluzioni delle (17), si ha (*Lezioni*, loc. cit.)

$$\nabla(U, V) = \text{cost}, \quad \text{in particolare} \quad \Delta_1 U = \text{cost}.$$

Prendiamo allora n soluzioni particolari $y_1, y_2, \ldots y_n$ delle (17), disponendo dei valori iniziali per modo che si abbia

$$\Delta_1 y_i = 1 \quad , \quad \nabla(y_i, y_k) = \varepsilon_{ik}. \tag{18}$$

Queste n funzioni $y_1, y_2, \ldots y_n$ sono fra loro indipendenti [1], ed assumendole a nuove variabili la forma differenziale si riduce al tipo normale: $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$, a causa appunto delle (18).

Concludiamo dunque: *Data una forma differenziale in n variabili a curvatura nulla, e con valori costanti pei simboli di Christoffel, la sua riduzione al tipo normale*

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$$

si effettua con sole operazioni algebriche.

Per mostrare in un esempio l'applicazione di questi risultati generali, prendiamo il caso della forma differenziale ternaria, corrispondente, nella tabella del n. 7, al sistema commutativo di numeri a tre unità del tipo I). Qui il sistema differenziale (17) diventa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = \frac{\partial U}{\partial x_3} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \ , \ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial U}{\partial x_2} \ ,$$

la cui soluzione generale si calcola subito in

$$U = e^{x_3}(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3) + c_4 \tag{19}$$

con le quattro costanti arbitrarie c_1, c_2, c_3, c_4, delle quali le prime tre sono

[1] Geometricamente è chiaro che le $y_1, y_2, \ldots y_n$ sono indipendenti, perchè le $y_i = \text{cost}$ sono le equazioni di n sistemi di iperpiani paralleli, due a due ortogonali. Algebricamente risulta da ciò che, per le (18), il valore del determinante formato cogli elementi $\beta_{ik} = \sum\limits_{r,s}^{1\ldots n} A_{rs} \frac{\partial y_i}{\partial x_r} \frac{\partial y_k}{\partial x_s}$ è eguale all'unità; esso si risolve d'altronde nel prodotto del determinante $|A_{rs}|$ pel quadrato dal Jacobiano $\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)}$, che è dunque diverso da zero.

i valori *iniziali* delle derivate $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}$ per $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Le formole pel passaggio dalle coordinate x_1, x_2, x_3 alle *cartesiane ortogonali* y_1, y_2, y_3 potranno assumersi date da

$$(20) \qquad \begin{cases} y_1 = e^{x_3}(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}) \\ y_2 = e^{x_3}(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}) \\ y_3 = e^{x_3}(c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}), \end{cases}$$

dove le nove costanti c_{rs} dovranno soltanto essere legate dalle 6 relazioni che seguono dalle (18) *pei valori iniziali* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; e queste calcoliamo nel modo seguente. Il valore iniziale del discriminante della forma è $A = \begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$, e se indichiamo con ω_{ik} i minori di secondo ordine di quest'ultimo determinante, i valori *iniziali* delle A_{ik} sono $\frac{\omega_{ik}}{A}$, quindi inizialmente $\nabla(y_i, y_k) = \sum_{r,s}^{1...3} A_{rs} \frac{\partial y_i}{\partial x_r} \frac{\partial y_k}{\partial x_s}$ ha il valore

$$\sum_{r,s}^{1...3} \frac{\omega_{rs}}{A} c_{ir} c_{ks};$$

dunque le relazioni a cui dobbiamo assoggettare le nove costanti c_{ik} nelle (20) sono

$$\sum_{r,s}^{1...3} \omega_{rs} c_{ir} c_{ks} = \varepsilon_{ik} A.$$

In modo affatto simile, per gli altri tre tipi di forme, corrispondenti ai tipi II), III), IV) di sistemi a tre unità (n. 7), si troverebbe per l'integrale generale delle corrispondenti equazioni (17)

Tipo II) $\quad U = e^{x_3}\left(c_1 x_1 + c_1 \frac{x_2^2}{2} + c_2 x_2 + c_3\right) + c_4$

Tipo III) $\quad U = c_1 e^{x_1} + (c_2 x_2 + c_3) e^{x_3} + c_4$

Tipo IV) $\quad U = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{x_2} + c_3 e^{x_3} + c_4$,

dopo di che la riduzione della forma a coordinate cartesiane ortogonali y_1, y_2, y_3, si effettua come sopra.

Meccanica. — *La teoria delle distorsioni e le deformazioni finite dei solidi elastici.* Nota del Corrisp. E. ALMANSI [1].

Il fascicolo di marzo-aprile del Nuovo Cimento contiene alcune osservazioni suggerite al chiarissimo prof. Somigliana da una Memoria della dott. G. Armanni, *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi.*

Mi sia permesso — non consentendo io coll'opinione espressa dal prof. Somigliana — dedicare qualche parola a questo argomento.

Dai postulati della ordinaria Teoria dell'Elasticità, segue, come è noto, che un corpo semplicemente connesso, sul quale non agiscono nè forze di massa nè tensioni superficiali, non può trovarsi in uno stato di deformazione *regolare* [2].

« E in base a questa non esistenza di deformazioni — riporto dalla Nota del prof. Somigliana — in assenza di forze esterne, nei corpi semplicemente connessi, l'A. ricerca se deformazioni di questa natura possano trovarsi abbandonando la teoria ordinaria dell'elasticità, e studiando le deformazioni che non sono più piccolissime, o infinitesime, come suol dirsi.

« Una ricerca di questa specie infatti è suggerita dalla più comune osservazione, la quale ci dice che, qualunque sia la connessione di un corpo e senza soccorso di forze esterne, noi possiamo produrre in esso uno stato di tensione elastica; ad esempio, incuneando in esso una lamina sottile a bordi taglienti. D'onde la necessità di mettere d'accordo la teoria coi fatti.

« Se non che la spiegazione di questa discordanza, che appare appunto come lo scopo precipuo della Memoria in discorso, è già stata data da tempo e senza punto abbandonare la teoria classica dell'elasticità, la quale si è mostrata perfettamente adatta, anche per lo studio completo di questa nuova classe di fenomeni . . . . . ».

Ora, quelle speciali deformazioni che hanno dato argomento alla Memoria di cui si tratta, non rientrano affatto nella classe di fenomeni a cui allude il prof. Somigliana (distorsioni di corpi a connessione multipla, o semplice). Esse sono deformazioni *a spostamenti continui*, mentre nelle distorsioni si hanno sempre, per gli spostamenti, delle superficie di discontinuità.

L'ordinaria teoria non contempla il caso di un corpo elastico, il quale, pur non essendo soggetto a forze esterne, si trova in uno stato di deforma-

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1916.

(2) V. Volterra, *Un teorema sulla teoria dell'elasticità.* Rendic. Acc. dei Lincei, vol. XIV, febbraio 1905.

zione regolare a spostamenti continui. E che siffatte deformazioni possano esistere, la stessa osservazione c' induce ad ammetterlo.

Consideriamo, per esempio, una piastra elastica, la cui superficie mediana sia una calotta sferica. Immaginiamo di deformare la piastra tenendo fermo il bordo, ed esercitando una pressione sulla superficie convessa, in modo da obbligare la convessità a passare dalla parte opposta. Avvenuta la deformazione, supponiamo di eliminare tutte le forze esterne. La piastra assume uno stato di equilibrio diverso dal primitivo; gli spostamenti relativi a questo stato di deformazione sono evidentemente continui; nè vi è alcun motivo per ritenere che le sei caratteristiche della deformazione non siano regolari.

Noi siamo dunque in presenza di uno dei casi a cui si accenna sopra.

Nella Memoria in questione è esaminato (§ 8) il rovesciamento di un *intero* involucro sferico: operazione che, praticamente, non potrebbe farsi se non eseguendo un taglio nell' involucro, facendo passare (per dir così) tutto l' involucro attraverso il taglio, e saldando infine le due faccie di questo, in maniera da riportare a coincidere i punti che coincidevano inizialmente. Ma gli spostamenti sono ancora rappresentati da funzioni continue.

Un altro esempio ci è fornito dal rovesciamento di un anello cilindrico: vale a dire dalla operazione consistente nell'obbligare la superficie cilindrica interna a passare all'esterno, l'esterna all' interno. E infiniti altri esempî potrebbero addursi.

Non si tratta dunque di presentare sotto un nuovo aspetto la teoria delle distorsioni, ma di studiare una nuova classe di fenomeni, i quali colle distorsioni non hanno nessuna relazione.

Che poi nello studio di questi fenomeni sia necessario abbandonare il concetto di *deformazione infinitesima*, appare senz'altro dagli esempî citati, essendo evidente che deformazioni di tal natura non si possono in alcun modo equiparare a deformazioni *infinitesime*.

Cristallografia. — *Contributo ai sistemi cristallini.* Nota del Socio Carlo Viola [1].

Sunto storico.

Da quando in cristallografia sono divenute di moda le 32 simmetrie, i sistemi cristallini hanno perduto d'importanza, o meglio hanno perduto il loro carattere originario, figurando quali aggruppamenti delle 32 simmetrie secondo analogie, che talvolta sono state arbitrarie. Non levo io solo la voce contro questa scuola, ove la massima influenza ebbe il Groth [2]; diversi autori vi si sono opposti, tentando di ristabilire le vere basi dei sistemi, e da essi ricavare le simmetrie possibili, che hanno relazione con i sistemi. Quanto vi sia di arbitrario, talvolta di erroneo o di ambiguo in questo metodo, alcuni esempî possono illuminarci. Schoenflies [3] creò due nuovi sistemi, il monogonale e il digonale; quello comprendente le classi del triclino e del monoclino senza assi di simmetria, questo le tre classi del trimetrico e due del monoclino con assi di simmetria binarî, indipendentemente da qualsivoglia sviluppo zonale. Ma la magra accoglienza che gli fecero i cristallografi e i mineralogisti, dimostra l'assurdità del metodo di Schoenflies.

Due classi con asse di simmetria 3-rio, cosiddette *trigonale bipiramidale* e *ditrigonale bipiramidale* furono collocate ora nel sistema trigonale per analogia tratte dall'asse 3-rio, ora nel sistema esagonale per analogia tratta da alcune proprietà fisiche. Cristallografi e mineralisti di valore si sono schierati per l'una o per l'altra ipotesi; in Italia Artini [4] e Panebianco [5], all'estero Groth [6], Lewis [7], Schoenflies [8] ecc. per l'una delle due ipotesi; Tschermak [9], Becke [10], W. Voigt [11], Hilton [12] ecc. per l'altra.

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1916.

[2] P. Groth, *Physikalische Krystallographie*, 1905.

[3] Schoenflies, *Krystallstructur.*

[4] E. Artini, *I minerali.* Manuale Hoepli. Milano 1914, pp. 75 e 76.

[5] R. Panebianco, *Trattato di cristallografia e morfologia.* Padova 1904, pag. 253, e pag. 259.

[6] Op. cit.

[7] W. I. Lewis, *A treatise on crystallography.* Cambridge 1899.

[8] Op. cit.

[9] G. Tschermak, *Lehrbuch der Mineralogie,* 5ª edizione. Vienna 1905, pp. 80-81.

[10] F. Becke, 7ª edizione del trattato di G. Tschermak. Vienna 1915.

[11] W. Voigt, *Lehrbuch der Krystallphysik.* Lipsia 1910, pag. 98.

[12] H. Hilton, *Mathematical crystallography.* Oxford 1903, pag. 96.

Secondo una terza ipotesi i sistemi trigonale ed esagonale divengono un unico sistema suddiviso o no in sottogruppi; tre in Liebisch [1] di guisa che le suddette due classi formano un gruppo a sè, due in Antonio D'Achiardi [2] (ternario e senario), ed uno solo in Giovanni D'Achiardi [3] tacendo, ma non risolvendo il problema.

Se nella definizione e limitazione dei sistemi cristallini, queste due classi passarono inosservate, non si creda che esse destino minor interesse di quanto possono averne le ulteriori 30. In questa questione primeggia una ragione pratica, poichè fino a pochi anni fa non si conoscevano sostanze cristallizzate che appartenessero alle dette due classi; ed oggi si sa che nella simmetria *ditrigonale bipiramidale* cristallizzano due sole sostanze conosciute, la benitoide e l'ortofosfato biargentico (Duffet), e nessuna nella *trigonale bipiramidale*.

Quando si tratta di fissare il limite di un sistema, sorge il quesito se convenga ricorrere alle simmetrie dei cristalli, ovvero se debbano porsi come base altri criterî, sempre nell'intento di riassumere nei limiti di un sistema la somma delle proprietà fisiche che caratterizzano maggiormente i cristalli appartenenti al dato sistema. Si sono rilevati testè gli inconvenienti, che possono dar luogo le simmetrie, quando vengano indicate assolutamente per la definizione dei sistemi cristallini; e anche coloro che seguono questo indirizzo, introducono, almeno in via subordinata, altri caratteri, che poi primeggiano, benchè indipendenti dalle simmetrie.

In addietro si assunsero gli spigoli fondamentali (o assi), e i rapporti dei parametri fondamentali (o rapporto degli assi), che la faccia unitaria intercetta sui detti assi a partire da un'origine; così derivarono sei sistemi possibili con le opportune variazioni negli angoli e nei parametri fondamentali. Questo metodo classico, seguito ancora da eccellenti autori, essendo empirico, non dimostra la necessità e la sufficienza dei sei sistemi cristallini; nè giustifica la scissione del trigonale dall'esagonale propriamente detto come fu fatto dippoi.

Bravais [4] e con lui Mallard [5] seguì una via di mezzo; nel costruire la struttura cristallina dimostrò la convenienza di ricorrere agli edificî cristallini come fondamento della struttura omogenea ed anisotropa e come

[1] Th Liebisch, *Grundriss der physikalischen Krystallographie*. Lipsia 1896, pp. 100-136; e *Physikalische Krystall.* Lipsia 1891, pp. 40-41.

[2] A. D'Achiardi, *Guida al corso di mineralogia*. Pisa 1900, pp. 35 e 40.

[3] G. D'Achiardi, *Guida al corso di mineralogia*, 2ª ediz. di cui sopra. Pisa 1915, pag. 46 e seg.

[4] A. Bravais, *Études cristallographiques* etc., Journ. de l'école polyt., tomo 20, fasc. 34. Paris 1849, 1851 e 1866.

[5] Mallard, *Traité de cristallographie*, 1879.

scheletro dell'abito dei cristalli. In questo modo risultarono sette sistemi cristallini, perchè in sette modi si possono aggruppare gli edificî cristallini, i quali corrispondono ai gruppi di traslazione negli sviluppi di Fedorow [1], Schoenflies [2], Barlow [3], Hilton [4] ecc.

Se il metodo di Bravais è rigoroso, non pertanto credo sia adatto nell'insegnamento della cristallografia, poichè vi introduce elementi astratti, che nelle scienze sperimentali si dovrebbero tenere possibilmente lontani.

Quanta affinità ci possa essere fra sistemi e simmetrie, illustrano diversi esempî. Qualcosa ci insegna a questo riguardo il metodo stesso sperimentale che d'ordinario si segue nello studio di una sostanza cristallizzata; secondo questo metodo si ricercano dapprima i dati per fissare il sistema a cui la sostanza appartiene, servendoci spesso dei fenomeni ottici; indi segue la determinazione della simmetria, quasi questa fosse indipendente dal sistema. Ma una assoluta indipendenza fra sistema e simmetria non ha luogo, come dimostrano numerosissimi fatti; nemmeno si può asserire che una simmetria individui un sistema, o questo individui quella. Citiamo qualche esempio.

L'aragonite e la stronzianite sono sicuramente trimetriche, ed anche asimmetriche secondo le esperienze di Beckenkamp, ossia questi due carbonati, a cui si possono aggiungere gli isomorfi witterite e cerussite, cristallizzano nel sistema trimetrico, ma per la loro asimmetria appartengono al triclino. Analoga conclusione si trae dallo sviluppo zonale, dalle costanti e dalle figure di corrosione del gesso, che per una parte tiene dei cristalli monoclini, e per la simmetria del triclino.

Se le recenti esperienze di Laue [5] e Bragg [6] fossero applicabili alla determinazione completa della struttura, ne risulterebbe indubbiamente l'edificio cristallino, a cui il cristallo appartiene, e come conseguenza ne discenderebbe il sistema. Ma codeste esperienze sono ancora all'inizio e limitate ai composti più semplici, e possono essere eseguite con frutto, solo quando il sistema cristallino è già determinato.

Fermiamoci per un istante sul metodo di Bravais. Gli edificî cristallini derivano precisamente dalle costanti cristallografiche e dallo sviluppo zonale. Quest'ultimo appunto caratterizza un sistema; ossia il sistema basato sulle

(1) C. F. Fedorow, *Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren*, 1890.

(2) A. Schoenflies, op. cit.

(3) W. Barlow, *A theory of the connection between the crystal form of the atom composition* ecc., 1881.

(4) H. Hilton, *Mathematical crystallography*, 1903. Vedi anche G. Wulff, L. Sohncke Chr. Wiener ecc.

(5) M. Laue, Ann. d. Phys., vol. 42, 1913, pag. 1561.

(6) W. H. e W. L. Bragg, Proc. Royal. Soc., 1913, pp. 88 e 428.

proprietà zonali riassume le qualità esterne e le proprietà strutturali, che con le proprietà fisiche nel loro complesso sono in relazione.

Tschermak (¹) introdusse qualcosa di simile nella sua sistematica, ma limitatamente ai sistemi triclino, monoclino e trimetrico. Negli altri quattro sistemi, trigonale, dimetrico, esagonale e monometrico egli fa risaltare le proprietà di simmetria come predominanti, specialmente la simmetria della zona primaria.

Io mi sono proposto di sviluppare i sette sistemi cristallini, basandomi unicamente sulle proprietà zonali, senza alcuna allusione alle simmetrie. Ma prima d'ogni cosa bisogna vedere quali relazioni esistano fra struttura e accrescimento.

Relazioni fra struttura e sviluppo esterno.

Dalle esperienze di Wulff (²) sull'accrescimento dei cristalli e dalle considerazioni teoriche di Hilton (³) sullo stesso argomento risulta che l'accrescimento in senso perpendicolare alle facce è inversamente proporzionale alle loro densità. Facce egualmente dense hanno dunque eguale frequenza e sviluppo, e possono essere individuate con gli stessi indici, salvo il segno e l'ordine, supposto assi e parametri fondamentali convenientemente scelti. Quando si indicano facce e zone aventi indici razionali, si intende che esse sono possibili, e tanto più probabili e diffuse, quanto più dense sono le facce e più semplici sono i loro indici. Eccezioni a questa regola dipendono da perturbazioni durante la cristallizzazione o da elementi estranei nelle soluzioni da cui i cristalli si formano. Sostituendo alle densità delle facce le loro costanti capillari, che possono essere determinate sperimentalmente, la regola Wulff-Hilton si può esprimere dicendo che lo sviluppo di una faccia del cristallo è proporzionale inversamente alla sua costante capillare. Più la costante è grande, e meno sviluppata è la faccia; e quindi facce della stessa costante capillare sono egualmente sviluppate. Facce della stessa costante capillare devono poter assumere simboli con gli stessi indici, salvo l'ordine e il segno. L'inverso naturalmente non è vero.

(¹) Op. cit.

(²) G. Wulff, *Zur theorie des Krystallhabitus*. Zeitschr. f. Krystall., 45, pag. 433; idem, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen*. Zeit. f. Krystall. 1901, 34, 449.

(³) H. Hilton, *Ueber die Capillaritätsconstante der Krystallflächen*. Centrallbl. f. Min. ecc., 1901, pag. 753; idem, Mathematical crystallography, 1903, pag. 106; vedi ancora: P. Curie, *Sur la formation des cristaux et sur les constantes capillaires de leurs diverses faces*. Bull. de la Société Minér. de Fr., 1885, *8*, pag. 145.

Definizioni.

Possiamo definire: l'asse di zona è n-rio o di grado n, quando facendo ruotare il cristallo intorno ad esso del minimo angolo $\Omega = \frac{360^\circ}{n}$ e multiplo, il cristallo viene in posizione di ricoprimento, facce con facce e zone con zone di eguale densità o di eguale costante capillare. Un asse di zona è 1-rio quando per ottenere il ricoprimento l'angolo minimo di rotazione è 360°.

Per rendere più semplice la dicitura, per quello che dobbiamo esporre; possiamo applicare questa definizione alla zona stessa; ossia una zona è n-ria quando, facendo ruotare il cristallo intorno al suo asse e semplicemente in essa stessa del minimo angolo $\Omega = \frac{360^\circ}{n}$ e multiplo, il cristallo viene in posizione di ricoprimento come sopra.

Teoremi.

1° Teorema. — *Una zona n-ria è sempre perpendicolare a faccia, quando* $n > 1$.

Per n pari, abbiamo da osservare semplicemente che data una qualsiasi faccia π_1 inclinata verso la zona, vi è anche contemporaneamente la faccia di eguale densità π_2, in posizione di ricoprimento con la faccia π_1, con rotazione nella zona data di $\frac{n}{2}$ volte l'angolo di $\frac{360}{n}$, cioè di 180 $\left(\frac{n}{2} \times \frac{360}{n}\right)$. E due di siffatte facce π_1, π_2 sono tali che la loro comune zona è perpendicolare alla zona n-ria data.

Per n dispari, questa dimostrazione non è applicabile. In tal caso si può procedere nel metodo seguente. Serviamoci della proiezione stereografica, dove rappresentiamo le zone con cerchi massimi, e le facce con poli.

Sia $z_3 z_3$, fig. 1, una zona n-ria essendo n dispari, p. es. $n = 3$. Consideriamo una faccia inclinata verso la zona data, p. es. π_1. Con due successive rotazioni nella detta zona di 120°, ritroveremo che la faccia π_1 va a ricoprire prima la faccia π_2 indi la faccia π_3, le cui costanti capillari c_2 e c_3 sono eguali alla costante capillare c_1 della faccia π_1. Ma con l'essere eguali le costanti capillari delle tre facce π_1, π_2, π_3, queste devono avere gli stessi indici salvo l'ordine e il segno, scelti convenientemente le zone e i parametri fondamentali. Di qui discende che le zone fondamentali devono fare angolo eguale con $z_3 z_3$ e con la faccia unitaria; ossia quest'ultima deve essere perpendicolare alla zona n-ria.

Non essendoci altra scelta possibile, il teorema è dimostrato; ma non è invertibile. Vedi il 2° corollario al 5° teorema.

2° Teorema. — *Una zona non può essere che 1-ria, 2-ria, 3-ria, 4-ria e 6-ria.* La zona 1-ria è necessariamente possibile, poichè non è soggetta ad alcuna restrizione.

La zona n-ria data è z_n, fig. 2. Sia c la faccia ad essa perpendicolare. Inoltre siano $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ facce, l'una nell'altra sovrapponibili con rotazione nella data zona dell'angolo $\Omega = \frac{360}{n}$ e multipli. Anche $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$

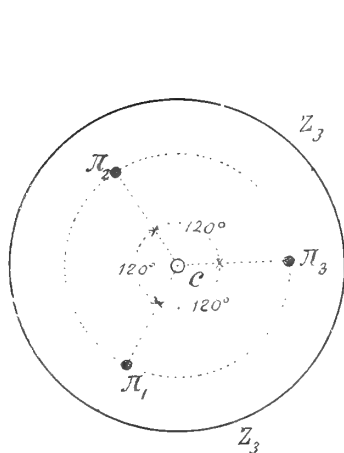
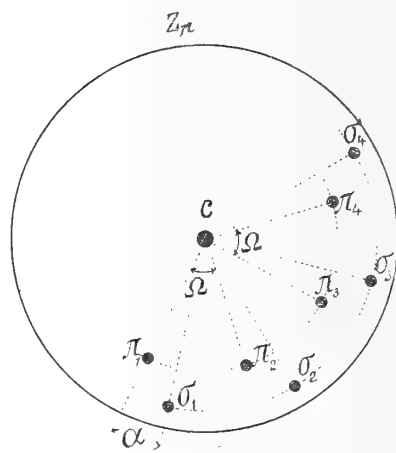



Fig. 1. Fig. 2.

siano facce come $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ Si chiami con α l'angolo che la zona $c\sigma_1$ fa con la zona $c\pi_1$.

Si assumono come zone di riferimento le tre zone $c\pi_1, c\pi_2, z_n$, e come faccia unitaria σ_1.

Il rapporto dei primi due parametri della faccia σ_1 è

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\Omega - \alpha)}{\operatorname{sen}\alpha};$$

quello dei primi due parametri della faccia σ_2 è

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\Omega + \alpha)}.$$

Il rapporto dei due primi indici di σ_2 è dunque

$$\frac{h}{k}=\frac{a}{b}:\frac{a_1}{b_1}=-\frac{\operatorname{sen}(\Omega-\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\Omega+\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Per $\Omega=180^\circ$ questo rapporto è razionale, essendo

$$\frac{h}{k}=-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=-1$$

qualunque sia α.

Per $\Omega<180$ e quindi $n>2$, possiamo convenientemente assumere come zone di riferimento le tre seguenti $c\pi_1$, $c\pi_3$, z_n, e come faccia unitaria π_2.

I primi due parametri della faccia unitaria sono nel rapporto

$$\frac{a}{b}=\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\Omega}=1.$$

Il rapporto dei primi due parametri della faccia σ_1 è

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(2\Omega-\alpha)},$$

e della faccia σ_2:

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{\operatorname{sen}(\Omega+\alpha)}{\operatorname{sen}(\Omega-\alpha)}.$$

Considerando il caso speciale $\alpha=\frac{\Omega}{2}$ si ha

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\Omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3}{2}\Omega} \text{ per la faccia } \sigma_1 \quad ; \quad \frac{a_2}{b_2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{3}{2}\Omega}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Omega} \text{ per la faccia } \sigma_2 .$$

Facendo le debite riduzioni si ottengono i rapporti degli indici:

$$\frac{h_1}{k_1}=2\cos\Omega+1 \text{ per la faccia } \sigma_1 \quad ; \quad \frac{h_2}{k_2}=\frac{1}{2\cos\Omega+1} \text{ per la faccia } \sigma_2 .$$

Ora non vi saranno mai rapporti razionali dei primi due indici delle facce

σ_1 e σ_2 se non sarà razionale il $\cos \Omega$. E questo ha luogo, oltre che per i casi considerati, $n = 1$ e $n = 2$, ancora per i seguenti

$$\Omega = 120^\circ \quad , \quad n = 3 \, ,$$
$$\Omega = \;\; 90 \quad , \quad n = 4 \, ,$$
$$\Omega = \;\; 60 \quad , \quad n = 6 \, ,$$

e solamente per essi.

Questa dimostrazione del teorema, basata sulla legge di Hauy, si può ridurre a poche parole. Osserviamo infatti che tutte le facce di eguale co-

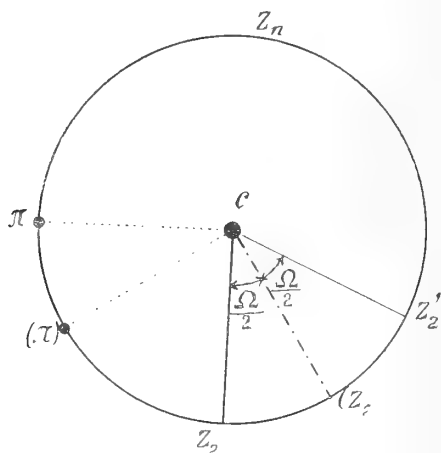



Fig. 3.

stante capillare devono potersi esprimere con simboli dagli stessi indici salvo l'ordine e il segno. Per ottenere siffatto risultato ci vogliono due condizioni: 1°) opportuna scelta delle facce fondamentali e unitaria; 2°) le zone non siano altro che 2-rie, 3-rie, 4-rie o 6-rie.

3° Teorema. — *Due zone 2-rie traggono seco una terza zona ad esse perpendicolare 2ria, 3ria, 4ria, 6ria.*

Le due zone 2-rie date sono z_2 e (z_2), fig. 3, fra le quali vi è l'angolo $\dfrac{\Omega}{2}$. Le facce ad esse rispettivamente perpendicolari siano π e (π), e c la faccia comune a z_2 e (z_2), e perciò perpendicolare a z_n. Ruotando il cristallo di 180° nella zona 2-ria (z_2), la zona z_2 va a ricoprire z_2^1, che perciò è zona 2-ria.

Lo stesso effetto si ottiene ruotando di $\Omega = \dfrac{360^\circ}{n}$ intorno alla zona z_n, la quale perciò è zona n-ria, ossia 2-ria, 3-ria, 4-ria o 6-ria secondochè l'angolo $\dfrac{\Omega}{2}$ è 90°, 60°, 45°, 30°.

Date le due zone 2-rie z_2 e (z_2) con l'angolo incluso $\frac{\Omega}{2}$, ovvero date z_2 e la zona n-ria z_n fra loro perpendicolari, vi sono complessivamente zone 2-rie come z_2 in numero di $\frac{n}{2}$, e come (z_2) in numero di $\frac{n}{2}$, naturalmente ove n è pari, le une si dicono di 1° ordine, le altre di 2°. Ove n è dispari, p. es. $n = 3$, vi sono zone 2-rie in numero di n dello stesso ordine, come è facile verificare.

4° **Teorema**. — *Data una zona n-ria, essendo $n > 2$, ogni faccia in essa giacente è perpendicolare a zona.*

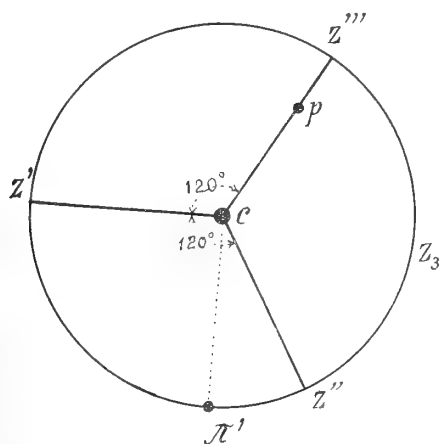



Fig. 4.

Per $n = 4$ questo teorema è senz'altro evidente.

Per $n = 3$, sia z_3 la zona 3-ria data, fig. 4. La faccia ad essa perpendicolare è c. Siano inoltre z', z'', z''' zone 2-rie giacenti in c e facenti fra di loro 120°.

Si assumono come zone di riferimento le tre zone seguenti:

$$z' \ , \ z'' \ , \ z''' \ ;$$

e come faccia unitaria la faccia P giacente in z'''. I primi due parametri fondamentali sono nel rapporto

$$\frac{a}{b} = 1 \, .$$

Sia π' la faccia perpendicolare alla zona z': i suoi parametri sono nel rapporto

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\text{sen } 30}{\text{sen } 90} = \frac{1}{2} \, ,$$

e quindi i suoi primi indici:

$$\frac{h}{k} = \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = 1 : \frac{1}{2} = 2$$

qualunque sia z'. La stessa dimostrazione vale per $n = 6$.

5° Teorema. — *Data una zona n-ria, essendo $n > 2$, vi sono sempre n zone 2-rie ad essa perpendicolari e soltanto n.*

La zona data è z_n, fig. 5. La faccia ad essa perpendicolare è c.

Facciamo l'ipotesi che z_2 perpendicolare a z_n sia una zona 2-ria.

Inoltre sia (z_2) una zona perpendicolare a z_2 e a z_n e perciò giacente in c (4° teorema).

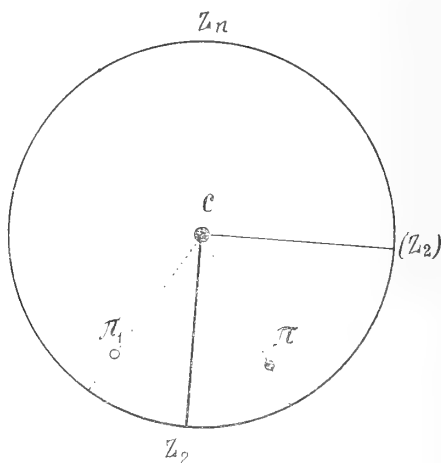



Fig. 5.

Siano ora π e π_1 due facce determinate dall'angolo α, l'una nell'altra sovrapponibili con rotazione di 180° intorno alla zona z_2.

Assumiamo come zone di riferimento le tre zone seguenti:

$$z_2 \ , \ (z_2) \ , \ z_n \ ,$$

e come faccia unitaria π. I primi due parametri fondamentali di π sono nel rapporto

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha ,$$

essendo α l'angolo fra le due zone πc e z_2.

Analogamente i primi due parametri della faccia π_1 sono nel rapporto:

$$\frac{a_1}{b_1} = - \operatorname{cotg} \alpha ,$$

e i primi due indici della faccia π_1 nel rapporto

$$\frac{h}{k} = \frac{a}{b} : \frac{a_1}{b_1} = -1 .$$

Dimostrata così l'esistenza di una zona 2-ria, ve ne saranno n e soltanto n, in virtù del 3° teorema.

Dal 5° teorema discende il

1° Corollario. — *Due zone 2-rie non possono includere fra loro un angolo diverso di 90°, 60°, 45° e 30°.*

Dal 4° e dal 5° teorema discende il

2° Corollario. — *Esistono zone perpendicolari a facce senza essere nè 2-rie, 3-rie, 4-rie nè 6-rie.*

Infatti tutte le facce contenute in una zona n-ria, $n > 2$, sono perpendicolari a zone, e queste non sono tutte 2-rie, n essendo il loro numero.

Dai precedenti teoremi discende ancora il

3° Corollario. — *Esistendo una sola zona perpendicolare a faccia, essa è sempre 2-ria.*

Infatti si assumono come zone di riferimento la zona perpendicolare a faccia, e due zone fra loro inclinate in questa giacenti. Si considerano le due facce parallele e opposte dai simboli $(h k l)$ e $(\bar{h} \bar{k} \bar{l})$, le quali intercettano sui tre spigoli fondamentali gli stessi parametri, ma di segno opposto. Analogamente le due facce $(\bar{h} \bar{k} l)$ e $(h k \bar{l})$; queste ultime sono in posizione tale che con rotazione di 180° nella zona data, le due facce $(h k l)$ e $(\bar{h} \bar{k} l)$ come a loro volta le facce $(h k \bar{l})$ e $(\bar{h} \bar{k} \bar{l})$ si ricoprono a vicenda. La zona data è dunque 2-ria.

6° Teorema. — *Date due zone 4-rie ortogonali; vi esiste una terza zona 4-ria ad esse perpendicolare.*

Le due zone 4-rie date sono z_4 e z_4', fig. 6. Con rotazione di 90° nella zona z_4', la zona z_4 va a ricoprire una zona z_4'', che perciò è 4-ria, e fa 90° con z_4 e z_4'.

Da questo teorema si ricava ancora quanto segue.

Si ottiene il ricoprimento di z_4 con z_4', eseguendo una rotazione di 180° nella zona z_2''' ovvero nella zona (z_2'''), che perciò sono zone 2-rie, facenti con le zone z_4 e z_4' l'angolo di 45°.

Tali zone 2-rie si ritrovano nelle facce a e b, a loro volta perpendicolari rispettivamente a z_4 e z_4'.

Unitamente alle tre zone 4-rie z_4, z_4', z_4'' vi sono dunque sei zone 2-rie, z_2', (z_2'), z_2'', (z_2''), z_2''', (z_2'''). Con ciò sono determinate le sei facce π', π_1', π'', π_1'', π''', π_1''', perpendicolari rispettivamente alle ultime zone. Di più le quattro zone contenenti tre a tre di queste facce, sono zone 3-rie, poichè gli angoli fra due a due delle tre facce, facenti una zona, sono di

120°. Siffatte zone 3-rie, z_3, z'_3, z''_3, z'''_3 fanno angoli eguali con le zone 4-rie, cioè 54°, 44′, 8″.

Le zone di riferimento possono essere le tre zone 4-rie, z_4, z'_4 e z''_4; e come zona unitaria si può assumere una delle quattro zone 3-rie, sicchè i rapporti degli assi sono 1:1:1. Risulta anzi che questa scelta degli assi e del rapporto degli assi è la sola possibile, se vuolsi che facce aventi la stessa costante capillare, o la stessa densità, siano individuabili con simboli dagli stessi indici salvo il segno e l'ordine.

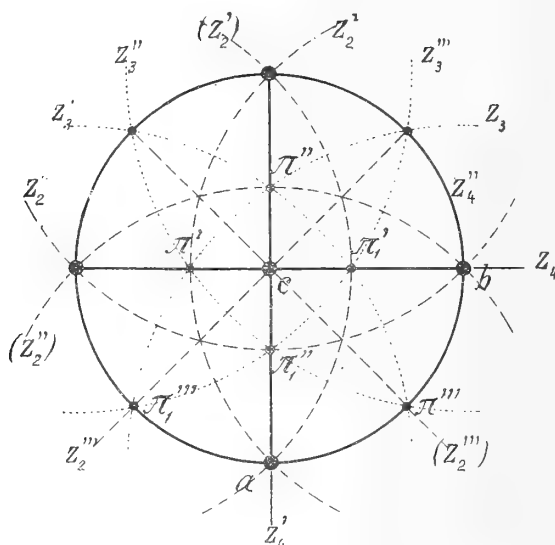



Fig. 6.

In siffatto ordinamento delle zone 2-rie, 3-rie e 4-rie, ogni zona è perpendicolare a faccia ed ha gli stessi indici di questa; $[h k l]$ per la zona, $(h k l)$ per la faccia ad essa perpendicolare.

7° Teorema. — I sei teoremi precedenti si riassumono in uno: *Sette sistemi cristallini sono possibili, sette essendo i caratteri delle zone. Essi sono*:

1. *Sistema triclino.* Tutte le zone sono 1-rie, ossia nessuna zona è perpendicolare a faccia.
2. *Sistema monoclino.* Una zona è 2-ria; tutte le altre sono 1-rie.
3. *Sistema trimetrico.* Tre zone sono -2rie ed ortogonali; tutte le altre sono 1-rie.
4. *Sistema trigonale.* Una zona è 3-ria.
5. *Sistema dimetrico.* Una zona è 4-ria.
6. *Sistema esagonale.* Una zona è 6-ria.
7. *Sistema monometrico.* Tre zone sono 4-rie e ortogonali.

Osservazioni.

Ricavati i sette sistemi cristallini e dimostrato che non vi possono essere più di sette, e che in meno di sette non sarebbero aggruppati convenientemente i caratteri delle zone, toccherebbe di vedere quali simmetrie sono compatibili con ciascun sistema. Un'altra volta tratterò di questo problema; qui vogliamo riprendere le due simmetrie *trigonale* e *ditrigonale bipiramidale* accennate al principio di questa Nota. Queste due simmetrie hanno una zona 6-ria, che è la zona principale, il cui asse è asse di simmetria 3-rio. Non è difficile rendersi conto che la zona principale è 6-ria; infatti con rotazione di 60° nella detta zona, le facce da una parte del piano di simmetria prendono una posizione di ricoprimento con le parallele alle rispettive facce simmetriche dall'altra parte del piano di simmetria e viceversa. Le dette due classi trovano dunque il loro vero posto nel sistema esagonale.

A favore di questa conclusione si aggiungono le proprietà fisiche, specialmente meccaniche. Le proprietà elastiche dei cristalli appartenenti all'esagonale sono conformi a quelle delle due classi suddette. Di più se in codeste due classi i cristalli avessero sfaldature inclinate verso la zona principale, esse non potrebbero essere meno di sei.

La scelta delle zone fondamentali e della faccia unitaria è stata sempre fatta, e deve essere fatta in guisa che tutte le facce aventi la stessa costante capillare o la stessa densità, siano rappresentate da simboli aventi gli stessi indici salvo l'ordine e il segno. Questo fine si ottiene sempre in tutti i sistemi, salvo l'esagonale, con l'adozione di tre indici. È stato dimostrato che per il sistema esagonale quest'intento non si può ottenere con meno di quattro indici. La simboleggiatura a quattro indici è dunque propria del sistema esagonale, come quella a tre indici è propria degli altri sei sistemi.

Esaminiamo, a modo d'esempio, se la simboleggiatura a quattro indici è propria delle due classi trigonale e ditrigonale bipiramidale, ovvero se vi sia adottabile la simboleggiatura a tre indici. Il simbolo a quattro indici di una qualsiasi faccia sia $(mnpq)$; allora per la faccia simmetrica per rispetto al piano di simmetria il simbolo è $(m\,n\,p\,\overline{q})$. Tutte le facce simmetriche hanno allora gli stessi simboli salvo l'ordine di $m\,n\,p$. Non così nella simboleggiatura a tre indici. Il simbolo di una qualsiasi faccia sia $(h\,k\,l)$. La faccia simmetrica deve avere per simbolo $(h'\,k'\,l')$ essendo

$$h':k':l' = h-2(k+l):k-2(l+h):l-2(h+k).$$

Così p. es. essendo i simboli delle facce fondamentali (100), (010) e (001)

costituenti una piramide trigonale; le loro simmetriche hanno per simboli rispettivamente

$$(1\bar{2}\bar{2})\ .\ (\bar{2}1\bar{2})\ ,\ (\bar{2}\bar{2}1).$$

Con la simboleggiatura a tre indici non sono dunque rappresentabili tutte le faccie aventi la stessa costante capillare, in guisa che i simboli risultino con gli stessi indici.

Nulladimeno Groth [1] adotta per tutte le classi del suo sistema trigonale la simboleggiatura a tre indici, che per le due classi trigonale e ditrigonale bipiramidale è assolutamente inapplicabile.

Matematica. — *Ancora sulla definizione di coppie terne ecc.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO [2].

Nella mia Nota dello stesso titolo (questi Rend., vol. XXV, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 6°, pp. 405-413) sono incorso in un errore formale che è necessario correggere. Conservo le notazioni della Nota ora citata.

Per definire la coppia $(a\,,b)$ come operatore per la classe generale Elem, si deve porre, per $a \neq b$,

$$(1) \qquad \begin{cases} (a\,,b)\,a = a\ ,\ (a\,,b)\,b = \iota b \\ (a\,,b)\,x = \iota a \cup \iota b \quad \text{per } x \text{ diverso da } a \text{ e da } b\,; \end{cases}$$

mentre per $a = b$ valgono soltanto la *prima* e *terza* delle (1).

In tal modo $(a\,,b)$ risulta operatore tra gli *elementi diversi da* a e *classi*, e per gli *elementi eguali ad* a è l'*identità*.

Modificazione analoga per le terne ecc. Ad es., per $a\,,b\,,c$ diversi tra loro si porrà

$$(a\,,b\,,c)\,a = a\ ,\ (a\,,b\,,c)\,b = \iota b\ ,\ (a\,,b\,,c)\,c = \iota\iota c\ ,\ (a\,,b\,,c)\,x = \iota a \cup \iota b \cup \iota c\,;$$

quando due soltanto degli $a\,,b\,,c$ saranno eguali tra loro varranno la prima e quarta ed una sola delle due intermedie, e per $a = b = c$ varranno soltanto la prima e quarta.

La *posizione* di un elemento nella *coppia*, *terna*, ... (primo, secondo, terzo, ... elemento) è così determinata dall'operatore logico ι e dalle sue potenze. La definizione *generale* di *n-upla* richiede la conoscenza dei *numeri interi*, non però la definizione *particolare* di coppia, terna, ... L'operatore

[1] Op. cit.

[2] Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1916.

logico ι, non considerato da Russell, è stato introdotto genialmente da Peano ed è di capitale importanza logica.

La dimostrazione della condizione $(a, b) = (a', b')$ rimane invariata (n. 6, pp. 411, 412), come pure rimangono invariate le altre considerazioni.

L'unica trasformazione che faccio alla prima Nota è dunque questa: pongo ora [la prima delle (1)]

$$(a, b)\, a = a$$

in luogo della

$$(a, b)\, a = \iota a \tag{2}$$

che avevo posta prima.

La ragione del cambiamento è facile a vedersi. Le (1) ove al posto della prima si ponga la (2), sono *simmetriche* rispetto ad a e b e quindi risulterebbe $(a, b) = (b, a)$ anche per $a \neq b$. Con le (1) invece si ha

$$(b, a)\, a = \iota a \;,\; (b, a)\, b = b \;,\; (b, a)\, x = \iota a \cup \iota b$$

e quindi $(a, b) \neq (b, a)$ quando sia $a \neq b$. Si noti che ponendo le (1) senza la condizione $a \neq b$, allora per la coppia (a, a) si avrebbe $(a, a)\, a = a$, ovvero $(a, a)\, a = \iota a$ secondochè l'elemento a cui si applica è il *primo* o il *secondo* della coppia; nè a togliere tale assurdo varrebbe affermare che, per definizione, si è ammesso che (a, b) è l'operatore *identità* soltanto *quando è applicato al primo elemento di* (a, b).

Si può notare che nella dimostrazione, già citata, della condizione $(a, b) = (a', b')$, si è *implicitamente* fatto uso della (1), poichè abbiamo distinto il *primo* dal *secondo* elemento della coppia, non soltanto come elementi, ma proprio come occupanti, rispettivamente, il primo e secondo posto; era però necessario togliere ogni equivoco logico formale il che si ottiene facilmente mediante l'operatore logico ι e le sue potenze.

Matematica. — *Hamiltoniani e gradienti di formazioni estensive nell'Analisi generale di Grassmann.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1].

In due Note successive dal titolo comune: *Gli hamiltoniani ed i gradienti nell'analisi generale ad n dimensioni di Grassmann* [2], presentate nelle sedute dei giorni 1 ed 8 del mese di luglio u. s. della R. Accademia di Napoli, e che compariranno nel fasc. luglio-agosto dei Rendiconti di essa, io ho definito certi *operatori* per uno spazio ad n dimensioni di Grassmann, e per funzioni scalari, che ho chiamati *hamiltoniani* e *gradienti* (anche, risp. *derivate esterne* e *derivate interne*): e la cui opportunità e portata ho messo

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

[2] Tali Note verranno, nel seguito, indicate rispettivamente con N I, N II.

in sufficiente rilievo nei brevi cenni che servono di introduzione a tali No e. Di operatori del tipo dei gradienti, come ivi accennai, avevo già fatto uso in altri lavori [1]; ma, in questi, mancò la considerazione degli hamiltoniani, ed i gradienti vi fecero comparsa da un punto di vista troppo particolare [2]. Ora, e per completare nelle sue costruzioni fondamentali la teoria appena iniziata dei due operatori, e per aumentarne la portata, estendo, con lo scritto presente, le nozioni di hamiltoniano e di gradiente al caso di funzioni estensive di qualsiasi ordine.

1. Conservando le medesime notazioni adoperate nelle N I, N II, sia U una funzione estensiva dell'ordine σ, e supponiamola scritta nella forma

$$U = U_1 . F_1 + U_2 . F_2 + \cdots + U_q . F_q \tag{1}$$

ove $U_1, U_2, \ldots, U_q$ siano funzioni scalari delle variabili $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ con le quali è composta la formazione

$$\Omega = \omega_1 . E_1 + \omega_2 . E_2 + \cdots + \omega_m . E_m \qquad m = \binom{n+1}{\varrho}, \tag{2}$$

d'ordine ϱ, rispetto a cui si *deriva*; e le $F_i = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_\sigma}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_\sigma)$ con $i = 1, 2, \ldots, q$ siano i $q = \binom{n+1}{\sigma}$ prodotti σ a σ delle $n+1$ unità fondamentali $e_1 e_2 \ldots e_{n+1}$, numerati ed ordinati coi medesimi criterî che servirono di base alla numerazione degli $E_i = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_\varrho}$. Ritenendo altresì la denominazione di *piramide di riferimento* allo insieme delle unità $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ considerate quali *punti indipendenti* di uno spazio ad n dimensioni di Grassmann, e di *ϱ-spigolo* E_i al prodotto $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_\varrho}$, diremo *hamiltoniano elementare della* U, *rispetto al ϱ-spigolo* E_i della piramide

[1] *Le equazioni generali per la Statica e la Dinamica dei sistemi materiali ad n dimensioni ed a curvatura costante* ecc. (questi Rendiconti, giugno 1912); *Le equazioni generali per la Statica e la Dinamica* ecc. *nel caso di vincoli in termini differenziali non integrabili* (Rend. Acc. Napoli, luglio 1912); *Sulle equazioni generali per la Dinamica* ecc. (Ann. di Mat. pura ed applicata, serie III, tomo XXII).

[2] Il caso particolare deriva dal fatto che l'*operatore* utilizzato è una *derivata interna* rispetto ad un *punto* o ad un *vettore*; mentre nelle N I, N II e nella Nota presente vengono considerate derivate *interne* ed *esterne*, rispetto a formazioni d'ordine assegnato, *semplici* [al finito (*multi-punti*), all'infinito (*multi-vettori*, *multipunti-misti* o *multivettori-misti*] e *composte*, considerate quali *variabili*. Da rilevarsi però è il fatto che, grazie alle costanti $\alpha^2_1, \alpha^2_2, \ldots, \alpha^2_{n+1}$ le quali accompagnano i diversi termini che compongono l'espressione dell'operatore, esso (posto anche da parte il numero qualunque di dimensioni che qui si considera) è ancora molto più generale degli operatori del Minkowsky e di quelli di E. B. Wilson e di G. N. Lewis.

di riferimento, l'espressione:

$$(3) \qquad (-1)^{\rho\rho'} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \bigg| E_i =$$

$$= (-1)^{\rho\rho'} \left\{ \frac{\partial U_1}{\partial \omega_i} F_1 . \bigg| E_i + \frac{\partial U_2}{\partial \omega_i} F_2 . \bigg| E_i + \cdots + \frac{\partial U_q}{\partial \omega_i} F_q . \bigg| E_i \right\},$$

dove $\varrho' = n + 1 - \varrho$;

e diremo *gradiente elementare della* U, *rispetto al medesimo* ϱ*-spigolo*, l'espressione

$$(4) \qquad \frac{\partial U}{\partial \omega_i} E_i = \frac{\partial U_1}{\partial \omega_i} F_1 . E_i + \frac{\partial U_2}{\partial \omega_i} F_2 . E_i + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega_i} F_q . E_i .$$

Queste espressioni sono identiche, nella forma dei loro primi membri, a quelle che si hanno pel caso di U scalare; ma i secondi membri mostrano che si tratta di *entità sostanzialmente diverse*.

Sommando da $i = 1$ ad $i = m$, membro a membro, le (3), troviamo

$$(5) \qquad (-1)^{\rho\rho'} \sum_1^m \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \bigg| E_i =$$

$$= (-1)^{\rho\rho'} \left\{ \sum_1^m \frac{\partial U_1 F_1}{\partial \omega_i} \bigg| E_i + \sum_1^m \frac{\partial U_2 F_2}{\partial \omega_i} \bigg| E_i + \cdots + \sum_1^m \frac{\partial U_q F_q}{\partial \omega_i} \bigg| E_i \right\};$$

e, sommando, in modo analogo, le (4):

$$(6) \qquad \sum_1^m \frac{\partial U}{\partial \omega_i} E_i = \sum_1^m \frac{\partial U_1 F_1}{\partial \omega_i} E_i + \sum_1^m \frac{\partial U_2 F_2}{\partial \omega_i} E_i + \cdots + \sum^m \frac{\partial U_q F_q}{\partial \omega_i} E_i$$ [1].

Queste somme saranno, rispettivamente, chiamate l'*hamiltoniano* ed il *gradiente* di U *rispetto ad* Ω, e saranno rispettivamente rappresentate scrivendo $\nabla_\Omega U$, $G_\Omega U$. Tenendo presenti le (3) e (4) si ha che

$$(7) \qquad (-1)^{\rho\rho'} \frac{\partial U_j F_j}{\partial \omega_i} \bigg| E_i \quad , \quad \frac{\partial U_j F_j}{\partial \omega_i} E_i$$

sono rispettivamente l'*hamiltoniano* ed il *gradiente* della $U_j F_i$ rispetto al

[1] Il passaggio dalla forma di scrittura $\frac{\partial U_h}{\partial \omega_i} F_h . E_h$ quale presentasi nella (4) alla forma $\frac{\partial U_h F_h}{\partial \omega_i} . E_h$ quale è adoperata nella (6). per essere U_h scalare ed F_h estensiva, è giustificata dalla definizione, che venne data nella N I, della *derivata* d'una funzione estensiva rispetto ad una variabile scalare [cfr., al riguardo, il n. 1, *c* di tal Nota, formula (6)].

ϱ-*spigolo* E_i ($\equiv$ rispetto alla Ω ridotta ad $\omega_i E_i$); si può, dunque, da un lato scrivere le (3), (4) nella forma

$$(3') \qquad \nabla_{\Omega_i} U = \nabla_{\Omega_i}(U_1 F_1) + \nabla_{\Omega_i}(U_2 F_2) + \cdots + \nabla_{\Omega_i}(U_q F_q)$$

$$(4') \qquad G_{\Omega_i} U = G_{\Omega_i}(U_1 F_1) + G_{\Omega_i}(U_2 F_2) + \cdots + G_{\Omega_i}(U_q F_q)$$

e dall'altro scrivere le (29), (30) come segue:

$$(5') \qquad \nabla_{\Omega} U = \nabla_{\Omega}(U_1 F_1) + \nabla_{\Omega}(U_2 F_2) + \cdots + \nabla_{\Omega}(U_q F_q)$$

$$(6') \qquad G_{\Omega} U = G_{\Omega}(U_1 F_1) + G_{\Omega}(U_2 F_2) + \cdots + G_{\Omega}(U_q F_q),$$

che contengono le precedenti, e che dimostrano il carattere *distributivo* dei ∇_{Ω}, G_{Ω} considerati quali *operatori*, non solo relativamente alla $U = \sum_1^q U_j F_j$, ma anche relativamente alla $\Omega = \sum_1^m \Omega_i$ (con $\Omega_i = \omega_i E_i$); poichè [giova tenere le (5'), (6') anche nella seguente forma] evidentemente

$$(5'') \quad \nabla_{\Omega} U = \nabla_{\Omega_1} U + \nabla_{\Omega_2} U + \cdots + \nabla_{\Omega_m} U\ ,\ \nabla_{\Omega} = \nabla_{\Omega_1} + \nabla_{\Omega_2} + \cdots + \nabla_{\Omega_m}$$

$$(6'') \quad G_{\Omega} U = G_{\Omega_1} U + G_{\Omega_2} U + \cdots + G_{\Omega_m} U\ ,\ G_{\Omega} = G_{\Omega_1} + G_{\Omega_2} + \cdots + G_{\Omega_m}$$

2. **a**) Conviene dare alle (5'), (6') una forma ancora più espressiva, e di più facile applicazione. A tal uopo, consideriamo dapprima, a meno del fattore $(-1)^{\varrho\varrho'}$, l'hamiltoniano di $U_j F_j$ rispetto al ϱ-spigolo E_i, cioè [cfr. le (7)] la funzione

$$(8) \qquad \frac{\partial U_j F_j}{\partial \omega_i} \mid E_i = \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j \mid E_i = \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}(F_j \mid E_i),$$

ove $\frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}$ è scalare. *Quattro casi possono darsi:*

1° caso. Il prodotto $F_j | E_i$ è identicamente nullo, il che avviene quando, essendo $\sigma + \varrho' \leq n + 1$, cioè $\varrho \geq \sigma$, le $e_{j_1} e_{j_2} \ldots e_{j_\sigma}$ sono in parte, o tutte, fra le $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_\varrho}$; ovvero quando, essendo $\sigma + \varrho' \geq n + 1$, cioè $\varrho \leq \sigma$, le $e_{j_1} e_{j_2} \ldots e_{j_\sigma}$ e le $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_\varrho}$ hanno meno di $\sigma - \varrho$ di elementi non comuni, poichè allora più di $\sigma - \varrho$ unità sono comuni ad F_j e $|E_i$. In tal caso, evidentemente, si può scrivere ($\sigma' = n + 1 - \sigma$):

$$(9) \qquad \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}(F_j | E_i) = (-1)^{\varrho'\sigma} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}(| E_i . F_j) =$$

$$= (-1)^{\varrho\varrho'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}(| E_i . F_j) = (-1)^{\varrho\sigma'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}(| E_i . F_j),$$

prendendo quella forma di potenza del -1 che meglio ci piace fra le tre indicate.

2° caso. Senza essere nullo, il prodotto $F_j | E_i$ è $\sigma + \varrho' < n + 1$

($\equiv \varrho > \sigma$); in tal caso $F_j | E_i$ è un prodotto progressivo, onde si ha $F_j | E_i = (-1)^{\varrho'\sigma} | E_i . F_j$; epperò

$$\frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i = (-1)^{\varrho'\sigma} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j . \tag{10}$$

3° caso. Senza essere nullo, il prodotto $F_j | E_i$ è $\sigma + \varrho' = n + 1$ ($\equiv \varrho = \sigma$); in tal caso $F_j | E_i$ è scalare, e si ha $F_j | E_i = (-1)^{\varrho\varrho'} | E_i . F_j$; epperò

$$\frac{\partial U_i}{\partial \omega_i} F_j | E_i = (-1)^{\varrho\varrho'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j . \tag{11}$$

4° caso. Senza essere nullo, il prodotto $F_j | E_i$ è $\sigma + \varrho' > n + 1$ ($\equiv \varrho < \sigma$); in tal caso $F_j | E_i$ è un prodotto regressivo, e, detta H la grandezza estensiva di ordine $\sigma - \varrho$ ch'esso rappresenta, si ha successivamente

$$H = F_j | E_i \ , \ | H = | F_j \| E_i = | F_j (-1)^{\varrho\varrho'} E_i = (-1)^{\varrho\varrho'} | F_j . E_i .$$

Essendo $\sigma' = n + 1 - \sigma$, siccome da $\sigma + \varrho' > n + 1$ si deduce $\sigma' + \varrho < n + 1$, così sarà $| H = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\sigma'} . E_i | F_j$; e quindi sarà pure

$$\| H = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\sigma'} . | E_i \| F_j = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\sigma' + \sigma\sigma'} . | E_i . F_j .$$

Ma è $\| H = (-1)^{(\sigma - \varrho)(n + 1 - \sigma - \varrho)} . H$; dunque, tenuto conto che

$$\varrho\varrho' + \varrho\sigma' + \sigma\sigma' + (\sigma - \varrho)(\sigma' - \varrho) \equiv \varrho\varrho' + \varrho^2 - \varrho\sigma \equiv \varrho(n + 1 - \sigma) \equiv \varrho\sigma' \pmod{2}:$$

$$H = F_j | E_i = (-1)^{\varrho\sigma'} | E_i . F_j ;$$

epperò

$$\frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i = (-1)^{\varrho\sigma'} | E_i . F_j . \tag{12}$$

Da tutto ciò concludiamo per l'hamiltoniano elementare rispetto al ϱ-spigolo E_i della piramide di riferimento, corrispondentemente agli ultimi tre casi esaminati, e col tener conto del primo che dà espressioni nulle:

$$(13) \begin{cases} 1°) \text{ che } \Delta_{\Omega_i}(U_j F_j) = (-1)^{\varrho\varrho'} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i = \\ \qquad = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho'\sigma} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j = (-1)^{\varrho'\sigma} \nabla_{\Omega_i} U_j . F_j \\ \qquad \text{se } \sigma + \varrho' < n + 1 , \text{ cioè } \sigma < \varrho ; \\ 2°) \text{ che } \nabla_{\Omega_i}(U_j F_j) = (-1)^{\varrho\varrho'} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i = \\ \qquad = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\varrho'} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j = (-1)^{\varrho\varrho'} \nabla_{\Omega_i} U_j . F_j \\ \qquad \text{se } \sigma + \varrho' = n + 1 , \text{ cioè } \sigma = \varrho ; \\ 3°) \text{ che } \nabla_{\Omega_i}(U_j F_j) = (-1)^{\varrho\varrho'} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i = \\ \qquad = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\sigma'} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j = (-1)^{\varrho\sigma'} \nabla_{\Omega_i} U_j . F_j \\ \qquad \text{se } \sigma + \varrho' > n + 1 , \text{ cioè } \sigma > \varrho . \end{cases}$$

b) Ragionando in modo perfettamente analogo al precedente, concludiamo pel gradiente elementare rispetto allo stesso ϱ-spigolo E_i:

$$
(14)\quad \begin{cases}
1^{\circ})\ \text{che}\ G_{\Omega_i}(U_j F_j) = \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j E_i = (-1)^{\varrho\sigma} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} E_i F_j = (-1)^{\varrho\sigma} G_{\Omega_i} U_j \,.\, F_j \\
\qquad \text{se}\ \varrho + \sigma < n + 1\,; \\[2ex]
2^{\circ})\ \text{che}\ G_{\Omega_i}(U_j F_j) = \dfrac{d U_j}{\partial \omega_i} F_j E_i = (-1)^{\varrho\varrho'} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} E_i F_j = (-1)^{\varrho\varrho'} G_{\Omega_i} U_j . F_j \\
\qquad \text{se}\ \varrho + \sigma = n + 1\,; \\[2ex]
3^{\circ})\ \text{che}\ G_{\Omega_i}(U_j F_j) = \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j E_i = (-1)^{\varrho'\sigma'} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} E_i F_j = (-1)^{\varrho'\sigma'} G_{\Omega_i} U_j . F_j \\
\qquad \text{se}\ \varrho + \sigma > n + 1\,.
\end{cases}
$$

c) Con l'aiuto delle (13), (14), per $j = 1, 2, \ldots, q$ sostituite rispettivamente nelle (3), (4), si ricava

$$
(15)\qquad \nabla_{\Omega_i} U = (-1)^{\theta} (\nabla_{\Omega_i} U_1 \,.\, F_1 + \nabla_{\Omega_i} U_2 \,.\, F_2 + \cdots + \nabla_{\Omega_i} U_q \,.\, F_q
$$

con $\theta = \varrho'\sigma\,, \varrho\varrho'\,, \varrho\sigma'$ secondochè $\sigma + \varrho'$ è $<, =, >$ di $n + 1$; e

$$
(16)\qquad G_{\Omega_i} U = (-1)^{\theta} (G_{\Omega_i} U_1 \,.\, F_1 + G_{\Omega_i} U_2 \,.\, F_2 + \cdots + G_{\Omega_i} U_q \,.\, F_q)
$$

con $\theta = \varrho\sigma\,, \varrho\varrho'\,, \varrho'\sigma'$ secondochè $\varrho + \sigma$ è $<, =, >$ di $n + 1$.

d) Con l'aiuto delle (15), (16), per $i = 1, 2, \ldots, m$, e delle (5″), (6″), si ricava poi, in fine:

$$
(17)\qquad \nabla_{\Omega} U = (-1)^{\varrho'\sigma} (\nabla_{\Omega} U_1 \,.\, F_1 + \nabla_{\Omega} U_2 \,.\, F_2 + \cdots + \nabla_{\Omega} U_q \,.\, F_q)
$$

se $\varrho' + \sigma < n + 1$, o, ciò che è lo stesso, $\sigma < \varrho$;

$$
(18)\qquad \nabla_{\Omega} U = (-1)^{\varrho\varrho'} (\nabla_{\Omega} U_1 \,.\, F_1 + \nabla_{\Omega} U_2 \,.\, F_2 + \cdots + \nabla_{\Omega} U_q \,.\, F_q)
$$

se $\varrho' + \sigma = n + 1$, cioè se $\sigma = \varrho$;

$$
(19)\qquad \nabla_{\Omega} U = (-1)^{\varrho\sigma'} (\nabla_{\Omega} U_1 \,.\, F_1 + \nabla_{\Omega} U_2 \,.\, F_2 + \cdots + \nabla_{\Omega} U_q \,.\, F_q)
$$

se $\varrho' + \sigma > n + 1$, cioè se $\sigma > \varrho$; e

$$
(20)\qquad G_{\Omega} U = (-1)^{\varrho\sigma} (G_{\Omega} U_1 \,.\, F_1 + G_{\Omega} U_2 \,.\, F_2 + \cdots + G_{\Omega} U_q \,.\, F_q)
$$

se $\varrho + \sigma < n + 1$;

$$
(21)\qquad G_{\Omega} U = (-1)^{\varrho\varrho'} (G_{\Omega} U_1 \,.\, F_1 + G_{\Omega} U_2 \,.\, F_2 + \cdots + G_{\Omega} U_q \,.\, F_q)
$$

se $\varrho + \sigma = n + 1$;

$$
(22)\qquad G_{\Omega} U = (-1)^{\varrho'\sigma'} (G_{\Omega} U_1 \,.\, F_1 + G_{\Omega} U_2 \,.\, F_2 + \cdots + G_{\Omega} U_q \,.\, F_q)
$$

se $\varrho + \sigma > n + 1$.

e) È da mettersi in rilievo, come conseguenza delle precedenti espressioni date per $\nabla_\Omega U$ e $G_\Omega U$, quanto appresso:

1°) $\nabla_\Omega U$ *è una funzione estensiva di specie* $n+1-\varrho+\sigma$ *quando* $\varrho>\sigma$, *è una funzione scalare quando* $\varrho=\sigma$, *ed è una funzione estensiva di specie* $\sigma-\varrho$ *quando* $\varrho<\sigma$;

2°) $G_\Omega U$ *è una funzione estensiva di specie* $\varrho+\sigma$ *quando è* $\varrho+\sigma<n+1$, *è una funzione scalare quando* $\varrho+\sigma=n+1$, *ed è una funzione estensiva di specie* $\varrho+\sigma-n-1$ *quando* $\varrho+\sigma>n+1$.

Questi enunciati concordano perfettamente con quelli dati al n. 2, *b*) della Nota II, quando una funzione scalare si consideri come estensiva di specie (ordine) 0, nel qual caso è $\sigma=0$, o come estensiva di specie $n+1$ (pseudo-scalare), nel qual caso è $\sigma=n+1$. Ed ove si considerino i casi di $\varrho=0$, $\varrho=n+1$, i quali corrispondono all'essere la Ω una variabile scalare, o pseudo scalare, gli enunciati precedenti restano applicabili, per $\sigma\neq 0$, alle derivazioni (*esterne*, o *interne*) di funzioni estensive rispetto a variabili scalari, o pseudo-scalari; e per $\sigma=0$ alle derivazioni ordinarie di funzioni scalari. Così, ogni funzione, sia scalare o pseudo-scalare, sia estensiva, ha il suo *hamiltoniano* ed il suo *gradiente* anche rispetto a variabili scalari, o pseudo-scalari; e questi si confondono, a meno della moltiplicazione per $e_1 e_2 \ldots e_{n+1}$ del ∇U quando $\varrho=0$ o del GU quando è $\varrho=n+1$, con la derivata ordinaria di U se U è scalare, e con la derivata di U quale venne definita nella formula (6), quando U è estensiva.

3. a) Se nelle formule (17), (19) in ciascuna delle quali si può immaginare racchiusa la (18), col ritenere la (17) per $\sigma\leq\varrho$, e la (19) per $\sigma\geqq\varrho$, poniamo, al posto di Ω, la formazione supplementare $|\Omega$; siccome allora si dovrà cambiare ϱ' in ϱ, e viceversa, si avrà:

$$(23)\quad \nabla_{|\Omega} U=(-1)^{\varrho\sigma}(\Delta_{|\Omega} U_1 . F_1+\nabla_{|\Omega} U_2 . F_2+\cdots+\nabla_{|\Omega} U_q . F_q)$$
$$\text{se } \varrho+\sigma\leq n+1;$$

$$(24)\quad \nabla_{|\Omega} U=(-1)^{\varrho'\sigma'}(\nabla_{|\Omega} U_1 . F_1+\nabla_{|\Omega} U_2 . F_2+\cdots+\nabla_{|\Omega} U_q . F_q)$$
$$\text{se } \varrho+\sigma\geqq n+1.$$

Ora, dalle formule (14) della N II, poichè $U_1, U_2, \ldots, U_q$ sono funzioni scalari, si ha, per $h=1,2,\ldots,q$:

$$(25)\qquad \nabla_{|\Omega} U_h=G_\Omega U_h;$$

dunque sarà:

$$(23')\quad \nabla_{|\Omega} U=(-1)^{\varrho\sigma}(G_\Omega U_1 . F_1+G_\Omega U_2 . F_2+\cdots+G_\Omega U_q . F_q$$
$$\text{quando } \varrho+\sigma\leq n+1, \text{ e}$$

$$(24') \qquad \nabla_{|\Omega} U = (-1)^{\rho'\sigma'} (G_\Omega U_1 . F_1 + G_\Omega U_2 . F_2 + \cdots + G_\Omega U_q . F_q)$$

quando $\varrho + \sigma \geqq n + 1$.

Confrontando con le (20), (21), (22) si deduce, qualunque sia il caso,

$$(26) \qquad \nabla_{|\Omega} U = G_\Omega U ;$$

epperò: *pure per funzioni estensive, il gradiente rispetto ad una data formazione può essere definito come l'hamiltoniano rispetto alla formazione supplementare* (cfr. Nota II, n. 2, *b*).

b) Se, nelle (20), (22), ciascuna delle quali può essere considerata come abbracciante la (21), si cambia Ω in $|\Omega$, si avrà, dovendosi allora cambiare pure ϱ con ϱ':

$$G_{|\Omega} U = (-1)^{\rho'\sigma} (G_{|\Omega} U_1 . F_1 + G_{|\Omega} U_2 . F_2 + \cdots + G_{|\Omega} U_q . F_q)$$

per $\varrho' + \sigma \leq n + 1$;

$$G_{|\Omega} U = (-1)^{\rho\sigma'} (G_{|\Omega} U_1 . F_1 + G_{|\Omega} U_2 . F_2 + \cdots + G_{|\Omega} U_q . F_q).$$

per $\varrho' + \sigma \geqq n + 1$.

Ora, dalle (15) della N II si rileva che, essendo $U_1, U_2, \ldots, U_q$ funzioni scalari, è, per $h = 1, 2, \ldots, q$:

$$G_{|\Omega} U_h = (-1)^{\rho\rho'} \nabla_\Omega U_h ;$$

dunque sarà:

$$(27) \quad \begin{cases} G_{|\Omega} U = (-1)^{\rho\rho' + \rho'\sigma} (\nabla_\Omega U_1 . F_1 + \nabla_\Omega U_2 . F_2 + \cdots + \nabla_\Omega U_q . F_q) \\ \qquad \text{se } \varrho' + \sigma \leq n + 1, \text{ e} \\ G_{|\Omega} U = (-1)^{\rho\rho' + \rho\sigma'} (\nabla_\Omega U_1 . F_1 + \nabla_\Omega U_2 . F_2 + \cdots + \nabla_\Omega U_q . F_q) \\ \qquad \text{se } \varrho' + \sigma \geq n + 1 . \end{cases}$$

Dal confronto con le (17), (18), (19) segue essere:

$$(28) \qquad G_{|\Omega} U = (-1)^{\rho\rho'} \nabla_\Omega U ;$$

epperò: *come per le funzioni scalari* [cfr. le (15), N. II], *così per le estensive, il gradiente di una funzione* U *rispetto alla formazione supplementare di una data* Ω *eguaglia l'hamiltoniano di* U *rispetto ad* Ω, *moltiplicato per* $(-1)^{\rho\rho'}$ (ϱ e ϱ' secondo il significato innanzi stabilito sono, rispettivamente, l'ordine di Ω e della supplementare). Anche per U estensiva saranno adoperati alle volte i simboli $\frac{dU}{d\Omega}, \frac{dU}{d|\Omega}$ in luogo di $\nabla_\Omega U, G_\Omega U$.

4. Non è possibile qui, per la ristrettezza dello spazio consentitoci, presentare altre proprietà degli operatori introdotti, nè di far cenno dell'interesse che essi presentano nelle applicazioni, mettendo in evidenza qualche esempio speciale. Ciò sarà oggetto, io spero, di comunicazioni ulteriori.

Chimica. — *I coefficienti di temperatura dell'azione fotochimica sulla miscela cloro-idrogeno con luci monocromatiche* [1]. Nota di M. Padoa e C. Butironi, presentata dal Socio G. Ciamician [2].

I risultati delle precedenti esperienze [3], che hanno dimostrato la variabilità dei coefficienti di temperatura della velocità di reazione di varî processi fotochimici, col variare della lunghezza d'onda della luce agente, avevano reso desiderabile di esaminare, sotto il medesimo punto di vista, fra le reazioni fotochimiche, una delle più semplici e tale da non lasciare adito a qualsiasi dubbio sulla sua natura di reazione fotochimica *pura*.

La combinazione del cloro coll'idrogeno a temperatura ordinaria, sotto l'azione della luce, risponde certamente a questi requisiti ed è delle più note e studiate, sia perchè dal punto di vista teoretico è più facilmente abbordabile, come reazione omogenea che avviene in ambiente gassoso, sia per la semplicità dei mezzi coi quali si può arrivare alla misura della velocità di reazione.

Come è generalmente noto, l'azione della luce sulle miscele cloro-idrogeno è stata studiata da tempo ed a fondo; Favre e Silbermann [4] osservarono che facendo agire le varie luci dello spettro solare, si ha una diversa intensità dell'azione catalitica. Più precise esperienze di Bunsen e Roscoe dimostrarono poi che si hanno due massimi d'azione, uno fra le righe G ed H e l'altro in corrispondenza della riga I dello spettro, ossia, all'incirca per le lunghezze d'onda 413 e 395 $\mu\mu$, e che il campo luminoso che agisce, si estende da un punto situato fra le righe C e D fino alla riga U, e cioè nell'intervallo compreso fra 620 e 294 $\mu\mu$.

A questi stessi autori è dovuto un apparecchio attinometrico destinato appunto a misurare l'intensità dell'azione fotochimica sulla miscela cloro-idrogeno; tale apparecchio è tutto costituito da parti in vetro, ed è formato da una celletta per l'elettrolisi dell'acido cloridrico, una bolla di lavaggio della miscela gassosa, una bolla per l'insolazione, un capillare graduato ed una valvola a chiusura idraulica. Man mano che la combinazione avviene

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1916.

(3) Questi Rendiconti, M. Padoa e A. Zazzaroni, 1915, I, 828; 1916, I, 808; M. Padoa e Teresa Minganti, 1915, II, 97; M. Padoa e L. Mervini, 1916, II.

(4) Annales de Chimie et de Phys. [3], *37*, 297.

nella bolla, l'acqua, che la riempie in parte, assorbe l'acido cloridrico formato e la contrazione di volume è misurata dallo spostamento dell'acqua (che si trova nella valvola di chiusura) lungo il capillare. Bunsen e Roscoe osservarono che, con illuminazione costante, trascorso un primo periodo di induzione, la velocità della reazione si mantiene pure costante.

Le variazioni di temperatura hanno una certa influenza sulla velocità di reazione e, secondo le esperienze di Bevan (1), il coefficiente di temperatura per un dislivello di 10° risulta di 1,21; bisogna pensare che a temperature più basse delle usuali questo coefficiente aumenti assai, come avviene anche in altri casi, se è vero che a —120° cloro e idrogeno non si combinano neppure sotto l'azione della luce solare (2).

Per le nostre esperienze abbiamo adoperato un apparecchio del tipo di quello ideato da Bunsen e Roscoe, costruito in modo da poter tenere immersa in un termostato la bolla che veniva illuminata: naturalmente il recipiente che conteneva l'acqua del termostato era di vetro, per poter illuminare lateralmente la bolla. L'apparecchio era montato in una camera scura e le sorgenti luminose, di cui facevamo uso, vennero racchiuse in una cassetta che lasciava passare per un foro il fascio di raggi destinato a provocare la reazione; trattandosi di fare osservazioni con luci colorate poco intense o poco attive, fu necessario concentrare sulla bolla le radiazioni a mezzo di una lente fissata nell'apertura della cassetta. La sorgente di luce era una lampada a filamento metallico; soltanto per le radiazioni ultraviolette adoperammo una lampada a vapore di mercurio. Per le luci colorate adoperammo i seguenti filtri:

	λ		
Luce verde	550-530	soluzione	conc. di solfato di nichel
" bleu	490-470	"	solfato di rame ammoniacale
" violetta	460 440	"	metilvioletto
" ultravioletta	400-350 (3)	"	nitrosodimetilanilina

Le letture sulla scala millimetrata si facevano a mezzo di apposita lampadina con luce rossa, che non poteva dar luogo a nessun inconveniente.

Per mantenerci sempre in condizioni comparabili abbiamo rinnovato spesso l'acido cloridrico usato per l'elettrolisi: infatti se questo col tempo

(1) Proc. Cambr. Phil. Soc 12, 398.

(2) Castle e Brocky, Centralblatt, 1898, I, 707.

(3) Questo è quanto può passare di luce ultravioletta attraverso il vetro comune [vedi ad es. Plotnikow, *Photochemische Versuchstechnick* (1912), 3]. La nitrosodimetilanilina lascia anche passare raggi gialli e rossi che non agiscono sulla miscela cloro-idrogeno.

si diluisce, può dar luogo allo sviluppo di piccole quantità di ossigeno che agisce, come è noto [1], rallentando notevolmente la reazione.

Le lunghe esposizioni, rese necessarie dalla debolezza della luce impiegata, fanno escludere gli errori imputabili ai tempi di induzione sopra accennati, ed anche quelli derivanti dal tempo occorrente affinchè tutto l'acido cloridrico formato venga assorbito dall'acqua. Del resto, le osservazioni venivano fatte dopo che il processo aveva assunto lo stato di regime.

Ognuna delle cifre qui riportate rappresenta la media di più osservazioni.

	Temperatura	Tempo di esposizione	Contrazione di volume
Luce bianca	40°	20′	51
"	30	"	35
"	20	"	30,5
"	10	"	24
Luce verde	40°	20′	14
"	30	"	9
"	20	"	6
"	10	"	4
Luce bleu	40°	20′	17
"	30	"	13
"	20	"	9,7
"	10	"	7,5
Luce violetta	40°	10′	20,5
"	30	"	17
"	20	"	14
"	10	"	11,3
Luce ultravioletta	40°	20′	17,
"	30	"	14,6
"	20	"	12,6
"	10	"	10,6

Le contrazioni di volume sono gli spostamenti, in millimetri, osservati sulla scala posta dietro il capillare. Risulta manifestamente dall'esame complessivo di queste cifre che l'accelerazione prodotta dagli aumenti di temperatura è piccola per la luce ultravioletta, cresce nel violetto e nel bleu, ed è massima nel verde, mentre è media per la luce bianca.

[1] Vedi ad es. Eder, *Photochemie* (1906), 134.

Ciò si vede ancor meglio quando si calcolano i coefficienti di temperatura, per ottenere i quali non rimane più che a fare i rapporti fra gli spostamenti osservati per ogni variazione di temperatura di 10°.

I risultati che si ottengono con questi calcoli sono riassunti nella tabella seguente, in cui figurano, per brevità, soltanto le medie dei tre valori determinati per ogni genere di luce.

	λ	K
Luce bianca	—	1,29
" verde	550-530	1,50
" bleu	490-470	1,31
" violetta	460-440	1,21
" ultravioletta	400-350	1,17

Per la luce bianca, il nostro valore di 1,29 è abbastanza concordante con quello di Bevan (1,21). La differenza può essere imputata, forse più che agli errori d'esperienza, alla diversa natura della luce impiegata ed al diverso intervallo di temperatura. In quanto ai valori ottenuti per le luci colorate, essi obbediscono pienamente alla legge osservata negli altri casi, e cioè aumentano regolarmente coll'aumentare della lunghezza d'onda.

Parassitologia. — *Per la lotta contro le arvicole.* Nuove osservazioni [1] del prof. ALFONSO SPLENDORE. Nota presentata dal Socio B. GRASSI [2].

A riguardo della epizoozia delle arvicole da me recentemente segnalata, per incarico del Ministero d'Agricoltura ho continuato ricerche ed osservazioni, allo scopo di poterne ricavare alcun utile ammaestramento nell'interesse della lotta contro tali roditori, che si sono enormemente moltiplicati in estese regioni del nostro paese. Ho eseguito studî sulla natura del *virus* relativo, ed ho tentato diverse prove per la trasmissione esperimentale dello stesso.

Darò, nella presente Nota, il risultato fino ad ora raggiunto da tali studî, a complemento della Nota preventiva pubblicata sull'argomento verso la fine dello scorso mese nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.

La morìa spontanea di detti animaletti, da me osservata primieramente

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Entomologia agraria della R. Università di Roma.

[2] Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1916.

nella contrada « Contessa » presso Cerignola [1], felicemente si è sviluppata e largamente diffusa in diverse località. Essa è stata accertata non solamente in altre contrade della stessa Cerignola, ma anche in diverse località di altri paesi, nella provincia di Foggia, in quella di Bari ed anche in quella di Potenza. Difatti, frequenti notizie ci sono pervenute e continuamente ci giungono da osservatori competenti e degni di fede, le quali concordano nell'affermare che, in siffatte località, il numero delle arvicole è oramai notevolmente diminuito, nel mentre che numerose arvicole morte s'incontrano alla superficie del suolo, così come cadaveri o scheletri di queste bestioline si rinvengono nei relativi nascondigli, quando si procede ad opportune escavazioni degli stessi. Ciò si verifica anche in quelle zone dove non fu mai adoperato alcun rimedio velenoso. In alcuni di tali siti la diminuzione delle arvicole è giunta a tale grado che, mentre fino a poco tempo addietro, il numero di tali bestioline vive arrestate quotidianamente nelle rispettive trincee oltrepassava di molto il migliaio, ora si è ridotto appena a qualche unità, e questa diminuzione non può attribuirsi che in parte al numero delle arvicole così distrutte per i veleni loro somministrati.

Citerò in proposito alcuni dati.

Il dott. Martelli, in una sua ultima informazione da Cerignola, in data 10 agosto 1916, fra l'altro, scrive le seguenti notizie:

— « Martedì scorso fui in territorio di Ascoli Sotriano a constatare la morìa di arvicole nella contrada « Spaventa » masseria del sig. Gerardo Di Miscio, ed osservai che colà la morìa è stata grande, giacchè un solo *Pytymys* ed un solo *Mus* potetti trovare vivi » . . . .

In altri saggi fatti nelle tane ho trovato nei nidi fino a quattro scheletri di *Pytymys.*

Da « Contessa » oggi ho potuto avere due soli *Pytymys* vivi, mentre sabato scorso furono duecento, domenica ventidue, lunedì tredici, martedì otto, mercoledì sette e giovedì, oggi cioè, due soli.

Da « Canale Gentile » località ove fu anche il sen. prof. Grassi, da milleduecento che si trovarono sabato, i topi sono scesi a trecento circa, poi a trentacinque; oggi mi attendevo altri topi da quella località, ma non ne ho avuti . . . ».

Il delegato antifilosserico di S. Severo ha notificato al Grassi che una morìa di arvicole è incominciata nelle contrade di S. Severo e di Ortanova.

Il Commissario antifilosserico di Bari ha fatto telegrafare che la morìa stessa si è manifestata in tenuta « Gravina », e in contrada « Maricello ».

Il Direttore della R. cattedra ambulante di agricoltura per il circondario di Melfi (Basilicata) ha scritto che l'invasione delle arvicole nei comuni di

[1] Di qui provenivano le prime arvicole in cui ho scoperta l'infezione della quale mi occupo fin dalla metà di giugno u. s.; e più tardi qui, già alla fine di luglio, tanto io che il prof. Grassi abbiamo accertata una notevole diminuzione dei suddetti roditori.

Lavello e di Montemilone, già molto intensa, è diminuita d'intensità ed aggiunge le seguenti considerazioni.

« Varî elementi da me personalmente controllati e da non pochi agricoltori confermati, inducono a ritenere che si sia manifestata una naturale morìa. Difatti si rinvengono alla superficie del terreno topi morti ed altri sono stati trovati nei nascondigli, in seguito ad opportune escavazioni fatte, mortalità che deve attribuirsi a cause naturali, giacchè in queste plaghe, per la mancanza fino ad oggi di veleni muricidi, non ancora è stata iniziata la lotta imposta a mezzi dei consorzi di difesa . . . ».

Oltre a ciò, posso aggiungere che, da qualche tempo, ricevo sistematicamente, due volte per settimana, per i miei studî, un buon numero di arvicole che mi vengono rimesse dalla Capitanata a mezzo di apposito corriere e, in tali animali, nel Laboratorio di Entomologia agraria dove attendo a tali ricerche, fra le arvicole arrivatemi in questi ultimi giorni si è manifestata una notevole mortalità spontanea, pur essendo animali provenienti da S. Severo o dalle tenute di Pavoncelli presso Cerignola, località molto invase, che sono assai lontane dalla contrada « Contessa ».

Credo che a tale propagazione della epizoozia abbia influito notevolmente la disseminazione degli animaletti fatta da quest'ultima regione in diverse località. Tale disseminazione da me proposta nella Nota preventiva avanti citata, fu iniziata personalmente dallo stesso benemerito prof. Grassi, il quale dividendo la mia opinione, si recò personalmente in Capitanata per metterla in esecuzione e per dare le disposizioni in proposito.

Per quanto riguarda l'infezione causatrice di tale epizoozia da me osservata, essa presenta i caratteri di una setticemia. Le lesioni anatomiche presentate da tali animaletti morti consistono in una congestione degli organi interni, i quali, specialmente la milza ed il fegato, si presentano sempre aumentati di volume e di colorito rosso bruno.

La *causa mortis*, come già dissi, è un piccolo batterio. Questo si può incontrare con facilità tanto nel sangue circolante, quanto negli organi interni delle bestioline infette. Io l'ho sempre rinvenuto non solo in tutti gli individui colpiti dalla epizoozia spontanea, finora esaminati in grandissimo numero, ma anche in quelli, non pochi, venuti a morte in seguito a infezione esperimentale prodotta con la somministrazione di materiale patologico diretto o di coltura relativa.

Circa i caratteri che possono individualizzare detto germe, sui quali avrò l'occasione di ritornare più dettagliatamente in altro lavoro, posso notare i seguenti fatti.

Trattasi di un microrganismo che si presenta nei tessuti dell'animale infetto in forma di bastoncini tozzi molto corti, aventi la dimensione di lunghezza superiore solo di poco a quella della larghezza, tanto che il germe prende, talvolta, l'aspetto di cocchi.

Spesso si mostra legato in catene di due elementi e può rassomigliare a diplococchi; più raramente anche in catene di un maggior numero di elementi. Le forme più piccole di tale microrganismo non oltrepassano il diametro di 0,5 μ; ma le formi maggiori raggiungono, ed anche oltrepassano, quello di 2 μ di lunghezza per circa 0,5 μ di larghezza.

Inoltre, esso appare provvisto di capsula.

Si colora coi comuni metodi di colorazione batterica e prende anche il Gram.

Si coltiva facilmente nei comuni terreni artificiali, non solo a temperatura 30-37 del Termostato, ma anche a temperatura ambiente del Laboratorio.

I caratteri fino ad ora osservati sui varî terreni culturali sono i seguenti:

Agar comune a becco di clarinetto: patina liscia splendente, biancogrigia a bordi ondulati.

Colonie staccate rotonde, biancogrige, umide, poco sollevate, a bordi regolari le quali, osservate al microscopio, appaiono uniformemente e finamente granulose.

Acqua di condensazione torbida e ricca di sedimenti.

Gelatina comune per infissione: alla superficie esterna patina sottile, estesa, di colore biancogrigio, a bordi ondulati. Lungo la linea d'infissione nastrino a fine granulazioni, ma senza caratteri speciali. Nessuna fluidificazione, almeno fino a circa quattro settimane di osservazione.

Brodo comune: intorbidamento uniforme, ma non molto intenso; nessun velo alla superficie; modico sedimento polveroso, biancastro, che si distribuisce omogeneamente agitando la provetta.

Brodo glucosato al 2 %: discreto sviluppo di gas.

Acqua peptonata: reazione d'indol (Salkowski) positiva.

Latte: nessuna coagulazione.

Patata: patina rigogliosa, spessa, umida, poltacea bruna, tendente al verdastro giallo.

Agar fucsinato sec. *Endo*: intenso colore viola rosso.

Agar rosso neutro sec. *Rothberger*: nessun cambiamento di colore.

Agar Drigalski Conradi: lieve arrossamento.

Siero di latte laccamuffa sec. *Petruski*: lieve arrossamento: il liquido rimane chiaro, assumendo un aspetto di vino di Marsala.

Sedimento piuttosto scarso.

Soluzione nutrosio glucosio laccamuffa sec. *Barsiekow*: già dopo 24 ore liquido appena torbido, con lieve arrossamento. Sedimento in discreta quantità.

Soluzione nutrosio lattosio laccamuffa sec. *Barsiekow*: intorbidamento nelle prime 24 ore, a cui segue graduale coagulazione, completa la quale,

rimane una separazione di liquido acqnoso, mentre il coagulo assume un colore latteo leggermente roseo.

Sui caratteri microscopici delle colture bisogna notare che il predetto germe è immobile o dotato di movimenti molto torpidi. In generale conserva la morfologia presentata nei tessuti, assumendo, però, spesso un aspetto più allungato. Alcune forme tozze e corte assumono, talvolta, coi colori d'anilina, una colorazione polare, mostrando nel mezzo uno spazio chiaro.

È interessante notare ancora che il germe proveniente dalle colture perde la resistenza al Gram.

Confrontato con una coltura di *B. typhi murium* ricevuta dall'Istituto d'Igiene della Regia Università di Roma, come pure con varî batterii del gruppo *typhi coli*, questo microrganismo delle arvicole da me studiato, per i suoi caratteri colturali, appare sicuramente differente dagli stessi. Credo che rappresenti una specie batterica nuova, non ancora registrata, e perciò la distinguerò, almeno provvisoriamente, col nome di *Bacterium pytymysi*, onde ricordare che è causatore della epizoozia di *Pytymys Savi* da me osservata.

Le ricerche di trasmissione sperimentale furono fatte non solo sopra le arvicole, ma anche sopra altri animali.

Alcuni *Pytymys Savi* di apparenza ben nutriti e sani provenienti da località dove non era stata verificata alcuna morìa spontanea, inoculati sottocute, anche con poche gocce di emulsione in siero fisiologico di fegato o di milza appartenenti a *Pytymys* infetti, vennero a morte in meno di 24 ore; altri cibati con lo stesso materiale patologico, pure vennero a morte, ma in un periodo di tempo di tre o quattro giorni, raramente prima.

Avendo introdotto cadaveri di *Pytymys* infetti, o individui inoculati con il materiale organi degli stessi, dentro casse, in mezzo a *Pytymys* sani, dopo pochi giorni si manifestò fra questi lo sviluppo della epizoozia.

Tali esperimenti ripetuti diverse volte e debitamente controllati con animali testimoni, hanno sempre dato lo stesso risultato.

Le inoculazioni sotto-cutanee anzidette fatte a due *Mus sylvaticus*, come pure a due ratti bianchi (*M. decumanus*) di media età, determinarono anche la morte di questi animali: i due *Mus sylvaticus* vennero a morte l'uno dopo tre, l'altro dopo cinque giorni: dei due ratti bianchi, l'uno morì al quinto, l'altro al quindicesimo giorno dell'esperimento.

Alcuni *Pytymys Savi* inoculati sottocute con poche gocce di colture in brodo di *B. pytymysi*, ed altri cibati con pane inzuppato delle stesse colture, vennero a morte in un periodo di tempo non inferiore ad una settimana, essendo stata, però, in generale, sempre più tardiva la morte negli individui infettati per via della bocca.

Un coniglio piccolo inoculato sottocute all'inguine con $^1/_2$ cc. di coltura in brodo dello stesso germe morì dopo due giorni.

Un ratto bianco di media età, inoculato nella stessa maniera del coniglio, morì dopo due settimane dall'inoculazione.

All'autopsia dei diversi casi esperimentati, in generale, si constatò lo stesso reperto anatomo patologico e microbiologico verificato negli animali morti dell'epizoozia spontanea, con di più un certo grado di sierosità edematosa e qualche glandoletta linfatica nella regione inoculata.

Le lesioni degli organi interni, per altro, erano, talvolta, poco marcate nei casi dell'infezione prodotta dalle colture o dall'ingestione di organi infetti, mentre, invece, non di rado, in questi casi si è riscontrato un grado di deperimento organico, molto più notevole di quello che si riscontra di ordinario nell'infezione spontanea.

Il microrganismo, negli organi dei due *Mus sylvaticus* aveva assunto una forma molto più tozza ed allungata del solito; però la sua identità con *B. pytymysi*, come pure negli altri casi, fu sicuramente verificata mercè le prove culturali.

Come si vede, dunque, è accertato che l'epizoozia delle arvicole da me studiata è dovuta al *B. pytymysi* ed il *virus* relativo è contagioso per *Pytymys Savi*, così come è anche patogeno per altre specie di animali.

Finalmente noterò che, in questi ultimissimi giorni, dall'intestino di alcune pulci raccolte sul corpo di *Pytymys* infetti, ho isolato lo stesso batterio avanti descritto. Inoltre, avendo inoculato sottocute all'inguine di un *Pytymys* sano, il contenuto intestinale appartenente a tre di tali insetti, è avvenuta la morte dell'animale in meno di 24 ore. L'autopsia relativa ha verificato le solite lesioni anatomiche, specialmente congestione dei polmoni e del fegato, e l'esame microscopico ha constatato, nei tessuti dei vari organi interni, la presenza del solito batterio. Questo, poi, coi suoi caratteri tipici, ho incontrato anche nella sierosità della regione inoculata, in numero così enorme come potrebbe osservarsi esaminando una goccia prelevata da rigogliosa coltura in brodo.

Un altro *Pytymys* che, come il precedente, stava nel laboratorio da oltre venti giorni, ed era di apparenza sano e ben nutrito, fu posto in un barattolo, entro cui furono liberate altre tre di dette pulci vive; dopo tre giorni dell'esperimento venne a morte anch'esso, e presentò, all'autopsia, il reperto anatomo-patologico e batteriologico sopra ripetuto.

Siffatte osservazioni, a quanto mi pare, confermano il sospetto da me già avanzato che la propagazione naturale dell'infezione in discorso, nelle arvicole, avvenga per opera di tali ectoparassiti.

Ciò posto, nell'interesse della lotta, mi pare giustificato il sistema da me suggerito di disseminare le arvicole infette nelle contrade invase da detti roditori, dove non si sia ancora sviluppata alcuna epizoozia e, per maggior sicurezza dell'infezione varrà la pena di infettare, a mezzo d'inoculazione di materiale di organi, come sopra fu detto, il maggior numero pos-

sibile di tali bestioline onde farne distribuzione agli agricoltori nelle diverse contrade, così come, fino ad ora, si è fatto per le esche avvelenate.

Questi animaletti disseminati nei campi s'incaricheranno essi stessi di propagare il *virus*, che, certamente, sarà trasmesso ai loro simili per mezzo delle pulci. Così si estenderà sempre più l'epizoozia, che potrà liberarci dai malefici roditori.

Siccome, per altro, ancora non sappiamo fino a che punto l'infezione da noi scoperta potrà distruggere l'infinito numero delle arvicole che si trovano sparse per le campagne invase, per evitare qualunque ingrata sorpresa di un'eventuale ripullulazione delle sopravviventi, consigliamo anche di non abbandonare l'uso dei veleni e degli altri mezzi ritenuti opportuni per la loro distruzione.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 6°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 11.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia durante le ferie del 1916.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 7.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXV.° — Fascicolo 7°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili del l'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

// RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Meccanica celeste. — *Sopra la forma dello sferoide lunare.* Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. Nella presente Nota espongo una mia idea destinata a spiegare un disaccordo, già più volte notato, nella teoria della figura della luna. Benchè il mio concetto sia semplicissimo, e benchè gli studî del Darwin, su cui esso si fonda, siano assai conosciuti, pure nessun autore ne ha mai fatto parola, almeno per quante ricerche io abbia eseguite. Credo quindi opportuno di darne parte all'Accademia.

2. Chiamiamo con A , B , C i tre momenti naturali d'inerzia del globo lunare e cerchiamo di determinare i due rapporti [2]:

$$\alpha = \frac{C - B}{A} \qquad \beta = \frac{C - A}{B} \,. \tag{1}$$

Abbiamo due vie, e cioè: o servirci della teoria generale delle figure di equilibrio, o dedurli dalle osservazioni del moto di librazione lunare *reale.* Dovremmo logicamente aspettarci di giungere con i due metodi ad identici risultati, ma al contrario le due serie di valori di α , β , a cui così si

[1] Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1916.

[2] Nella teoria dei moti libratori si considera anche il terzo rapporto

$$\gamma = \frac{B - A}{C}$$

il quale però è legato ai due primi dall'identità $\gamma = \dfrac{\beta - \alpha}{1 - \alpha\beta}$.

perviene, risultano assai differenti tra di loro. E, ciò che è anche più notevole, *le mutue differenze hanno tutte lo stesso segno, indizio sicuro che non si tratta di un errore accidentale.*

3. Più particolarmente:

a) Partendo dalle osservazioni del moto di librazione lunare reale (da non confondersi con la librazione ottica) ed eseguendo gli opportuni calcoli, secondo le note teorie dinamiche, troviamo [1]:

$$\alpha = 0{,}000.299 \quad ; \quad \beta = 0{,}000.614 \, ; \qquad (2)$$

b) Servendoci invece della teoria generale delle figure di equilibrio, nell'ipotesi dell'omogeneità [2] abbiamo con grande approssimazione $\alpha = \frac{\beta}{4}$ e precisamente:

$$\alpha = 0{,}000.009.4 \quad ; \quad \beta = 0{,}000.0375 \, ; \qquad (3)$$

cioè dei valori da *sedici* a *trenta volte* minori dei primi. Le differenze dei valori dedotti dall'osservazioni da quelli calcolati, dati dalla tabella seguente

Valori ded. dall'osserv.	Valori calcol.	Differ. Oss.-Calc.
$\alpha = 0{,}000.299$	$\alpha = 0{,}000.0094$	$+\ 0{,}000.2896$
$\beta = 0{,}000.614$	$\beta = 0{,}000.0375$	$+\ 0{,}000.5765$

hanno tutte lo stesso segno, ciò che rende il disaccordo anche più notevole.

Se si suppone la luna non omogenea il problema non è più integrabile. Però limitandosi ad una soluzione approssimata [3], e supponendo che le superficie di eguale densità siano ellissoidi, Laplace ha trovato che α e β conservano lo stesso rapporto. Egli ha poi dimostrato che se la densità aumenta, dalla superficie al centro, α e β assumono valori minori che nel caso dell'omogeneità [4]. Ammettendo la luna non omogenea il *disaccordo verrebbe quindi peggiorato.*

[1] V. Tisserand, *Méc. cél.*, tomo II, pag. 473. Le osservazioni cui si fonda il Tisserand sono principalmente quelle eseguite a Könisberg da Schlüter, determinando con un eliometro la posizione del cratere A Mösting per un periodo di circa tre anni (Ved. *Memorie dell'Osservatorio di Könisberg*).

[2] V. Tisserand, *Méc. cél.*, tomo II, pag. 110 e ss.

[3] Laplace, *Traité de Méc. Cél.*, tome II, livre V, § 18 (Ed. di Crapelet, Parigi, anno VII).

[4] Laplace, op. cit., pag. 371. Notiamo a tale proposito che nella teoria del Laplace sugli sferoidi, i rapporti tra le differenze dei momenti d'inerzia e i momenti stessi possono essere considerati come quantità piccole di primo ordine. Possiamo quindi scambiare $\frac{C-A}{B}$ con $\frac{C-A}{A}$, giacchè si ha identicamente $\frac{C-A}{A} = \frac{C-A}{B}\left\{1 + \frac{B-A}{A}\right\}$.

4. Per spiegare questa differenza il Tisserand [1], seguendo le idee di Laplace, si trova costretto ad ammettere che la luna si sia notevolmente alterata dopo la sua solidificazione. Benchè quest'opinione non sia molto plausibile, giacchè il segno costante delle differenze, Osserv.-Calcolo, mostra che non può trattarsi di deformazioni accidentali, essa è stata ammessa da tutti gli astronomi posteriori; almeno da quanto mi risulta.

5. A me sembra invece che il fatto potrebbe spiegarsi assai semplicemente, sia ammettendo la luna ancor fluida nell'interno (oppure sede di movimenti ciclici, adottando una teoria analoga a quella esposta dal prof. sen. Volterra) [2], ciò che porterebbe a correggere i *primi* valori di α, β; sia invece supponendo che la luna si sia solidificata a minore distanza dalla Terra, ciò che altera i *secondi* valori di α, β.

Data la piccola massa e lo stato dello sferoide lunare, la prima opinione sembrerebbe meno probabile; *io credo quindi che il fatto possa spiegarsi nel modo più naturale, ritenendo che la luna si sia solidificata ad una distanza dalla Terra minore dell'attuale, in perfetto accordo con le ricerche classiche del Darwin.*

6. Svolgo questo concetto in poche parole. Come è notissimo, secondo il Darwin, la Terra e la luna ancora fluide furono soggette a grandi maree, alle quali prendeva parte tutta la loro massa (*bodily-tides*), e il cui effetto, fra l'altro, era di aumentare la distanza media dei due corpi.

Partendo da ciò, noi possiamo ragionare nella seguente maniera. La luna si solidificò certamente assai prima della Terra; quindi, anche dopo la sua solidificazione dovette continuare ad allontanarsi a causa delle grandi maree di massa persistenti nella Terra ancora fluida: la distanza a cui avvenne la solidificazione della crosta lunare, fu quindi minore della distanza attuale.

7. Una volta giunti a questa conclusione, tutto si spiega con la massima semplicità. Infatti la teoria generale delle figure di equilibrio, nell'ipotesi dell'omogeneità, dà per α, β, le formole [3]

$$(4) \qquad \alpha = \frac{5}{4}\frac{M'a^3}{Ml^3} \quad ; \quad \beta = 5\frac{M'a^3}{Ml^3} \; ;$$

[1] Op. cit., pag. 375: « ..... Laplace suppose qu'en se solidifiant, la Lune a subi quelques modifications; les hautes montagnes et les autres inégalités que l'on observe à sa surface doivent avoir sur les différences des moments d'inertie une influence très sensible et d'autant plus grande que l'aplatissement du spheroïde lunaire est fort petit et sa masse peu considérable ».

[2] Cfr. V. Volterra, *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*. Rend. della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1895; ved. anche, sul medesimo argomento, una Nota dello stesso autore in Astr. Nachr., Bd 138, con una tavola.

[3] Cfr. Tisserand, op. cit., tomo II, cap. VIII « *Figure d'équilibre d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné* » in particol. pag. 115.

dove M', M, a, l indicano la massa lunare e terrestre, il semidiametro maggiore della luna e la distanza dei due centri.

Ponendo $l = d =$ distanza attuale, si hanno per α, β, i valori (3). Se si ammette invece che la distanza l di solidificazione sia minore della distanza attuale d, le differenze tra i valori (3) e i valori (2) tendono a diminuire. Per trovare il valore più opportuno di l, chiamando con d la distanza attuale, poniamo $\frac{d^3}{l^3} = \lambda$. Seguendo allora il metodo dei minimi quadrati sceglieremo λ, in modo che sia:

$$(614 - 37{,}5\lambda)^2 + (299 - 9{,}4\lambda)^2 = minimo. \tag{5}$$

Fatti i calcoli si ha $\lambda = 17{,}3$ circa, e quindi $l = 148.438$ Km.

Tornando di nuovo a servirci delle (4) abbiamo la seguente tabella con i nuovi valori di α, β:

Valori ded. dall'osserv.	Valori calcol.	Osserv.-Calc.
$\alpha = 0{,}000.299$	$\alpha = 0{,}000.163$	$+ 0{,}000.136$
$\beta = 0{,}000.614$	$\beta = 0{,}000.648$	$- 0{,}000.034$

Le nuove differenze sono assai minori delle antiche e non conservano più il medesimo segno.

Tutto ciò nell'ipotesi dell'omogeneità: nel caso poi di densità crescente dalla superficie al centro, basta supporre che la solidificazione sia avvenuta a distanza ancora minore, secondo quanto è stato già detto.

Unendo per comodità tutti i risultati in un solo quadro abbiamo la seguente

TABELLA RIASSUNTIVA [1].

Valori dedotti dalle osservazioni del moto libratorio	Valori dedotti dalla teoria delle figure di equilibrio	
	Supponendo la solidificazione avvenuta alla distanza attuale $d = 384.454$ Km.	Supponendo la solidificazione avvenuta a distanza $l \leqq 148.438$ Km.
$\alpha = 0{,}000.299$	$\alpha \leqq 0{,}000.009$	$\alpha = 0{,}000.163$
$\beta = 0{,}000.614$	$\beta \leqq 0{,}000.037$	$\beta = 0{,}000.648$

8. Termineremo con un'osservazione. È noto ad ognuno quanto la crosta lunare sia sconvolta e disseminata di rotture e scabrosità. Lasciando da parte le Memorie degli osservatori meno recenti, Beer e Mädler [2], Birt [3],

[1] Il segno $=$ vale nel caso dell'omogeneità; il segno $<$ nel caso di densità crescente della superficie al centro.

[2] Beer e Mädler, *Der Mond nach seinen Kosmischen und individuellen Verhältnissen.*

[3] *A catalogue of lunar objects with notes and illustrations,* Londra 1873.

Nasmith [1], Neison [2], ci limiteremo soltanto agli studî moderni dei signori Loewy e Puiseux. Questi scienziati, nelle loro pazienti ricerche, parlano più volte degli *efforts de soulèvement* a cui si direbbe che la crosta lunare sia stata assoggettata in alcuni punti particolari. Passando poi all'esame di altri dettagli del suolo lunare, essi ammettono esplicitamente dei « *mouvements généraux de l'écorce lunaire qui ont amené la formation des traînées blanches* » [3].

Quanto alle cause che hanno prodotto questi fenomeni, gli autori credono di trovarle nel fatto che « *la quantité de gaz et de vapeurs emprisonnés a dû être relativement plus considérable dans l'écorce lunaire que dans l'écorce terrestre en raison du refroidissement plus rapide etc.* » [4].

Si potrebbe forse osservare che anche la massa lunare era assai minore della terrestre; ma noi, pur riconoscendo la giustezza di queste idee specialmente nel dar ragione dell'origine dei circhi lunari, ci limiteremo ad osservare che la nostra teoria è altrettanto utile nello spiegare i moti della crosta. Infatti la corteccia lunare, solidificatasi allorchè il satellite era vicino alla Terra, cessò di essere una superficie equipotenziale quando la distanza tra i due astri aumentò notevolmente. Se la luna fosse stata ancor fluida, essa si sarebbe allora avvicinata alla forma sferica. Essendo la corteccia già formata, questo cambiamento non potè avvenire, ma certamente la crosta ancor debole si piegò e si ruppe in qualche parte, conformandosi alquanto alle nuove condizioni di equilibrio. *Così si spiegano nella maniera più semplice « les efforts de soulèvement », e soprattutto « les mouvements généraux de l'écorce ».*

Le due spiegazioni del resto, quella dei sigg. Loewy e Puiseux e la mia, possono essere ammesse simultaneamente, completandosi a vicenda. Anzi, come ho già detto, la teoria del Loewy e Puiseux è forse da preferirsi nella spiegazione di sollevamenti *locali* (p. es. *circhi lunari*, già paragonati dal Secchi « a grandi bolle scoppiate o a cupole sfondate »); la mia invece mi sembra più adatta a dar ragione di moti *generali* (origine di catene montagnose, grandi spaccature longitudinali (*scanalature*) ecc.). In ogni caso io ho creduto d'insistere su questo punto, giacchè non trovo che alcun autore, parlando delle grandi irregolarità della crosta lunare, abbia mai accennato al fatto che, a causa della maggior vicinanza della Terra, essa si formò in condizioni di equilibrio assai differenti dalle condizioni attuali.

9. Riepilogando, vediamo che la teoria del Darwin non solo ci spiega la differenza tra le due serie dei valori di α', β, ma ci dà anche ragione di altri fenomeni che osserviamo sulla superficie lunare.

[1] *The Moon considered as a planet, a world and a satellite*, id. 1874.

[2] *The Moon and the conditions and configurations of its surface*, id. 1876.

[3] Cfr. MM. Loewy et Puiseux, *Sur la constitution et l'histoire de l'écorce lunaire.* Comptes Rendus, 4 mai 1896.

[4] Id. id.

Matematica. — *Derivazione ad indice qualunque.* Nota I della dott.ssa Angela Maria Molinari, presentata dal Corrispondente E. Almansi [1].

Non è nuova l'idea di voler estendere il concetto di derivazione anche per un indice frazionario: Leibniz ne dà un primo accenno; Eulero [2] ha scritto qualche pagina, che Lacroix richiama nel suo *Traité de calcul différentiel* [Traitè III (1819), pag. 409], riportate anche da Liouville nella Memoria *Sur le théorème des fonctions complémentaires* (1834); un altro cenno si trova pure nelle opere di Laplace *Sur les probabilités*; Lagrange (Berlin, Mém. 1772, pag. 186) predisse che la derivazione generalizzata sarebbe stata la base del calcolo dell'avvenire. Fourier, nella sua *Théorie analytique de la chaleur*, indica una formula generale che considera come atta a trasformare in integrali doppî i differenziali ad indici qualunque. A Liouville, però, si deve l'aver mostrato più ampiamente alcuni partiti che si potevano trarre dal calcolo differenziale generalizzato [3].

Liouville parte, nella sua Memoria *Sur quelques questions de géometrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour resondre ces questions* (1832), dalla formula

$$y = \Sigma A_m e^{mx}$$

suppone dunque una funzione y sviluppabile in serie (o integrale esponenziale) e, dopo aver posto

$$D^\mu e^{mx} = \frac{d^\mu}{dt^\mu} e^{mx} = m^\mu e^{mx},$$

ne ricava

$$D^\mu y = \Sigma A_m m^\mu e^{mx} \tag{1}$$

che definisce per lui la derivata ad indice qualunque. Ad esempio

$$y = \frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-\alpha x} d\alpha \qquad x > 0$$

$$D^\mu y = \int_0^\infty e^{-\alpha x} (-\alpha)^\mu d\alpha \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \mu \text{ qualunque} \end{cases}$$

ma $\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-\theta} \theta^{\mu-1} d\theta$, dunque, posto $\theta = \alpha x$,

$$D^\mu y = D^\mu \frac{1}{x} = \frac{(-1)^\mu \Gamma(\nu+1)}{x^{\mu+1}}.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1916.

[2] *De progressionibus trascendentibus sen quarum termini generales algebraice dari nequeunt.*

[3] Cfr. le Memorie contenute nel XXI Cahier del Journal de l'École Polytecnique (1832-1837).

In una Memoria seguente (1834), *Memoire sur le théorème des fonctions complémentaires*, Liouville parte invece dallo sviluppo della funzione secondo le potenze negative della variabile indipendente,

$$y = \Sigma \frac{A_n}{x^n}$$

e definisce

$$D^{\mu} y = (1)^{\mu} \Sigma \frac{A_n \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)\, x^{n+\mu}} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{con } n,\ (n+\mu)\\ \text{reali, positivi}\end{array}\right]. \tag{2}$$

La definizione data da Liouville nella prima Memoria e quella riportata ora non sono indipendenti l'una dall'altra; Liouville mostra effettivamente come dalla (1) possa dedursi la (2); in modo analogo, definito il D^{μ} nel caso di una funzione sviluppabile in serie di potenze, è possibile ricavare la (1) da applicare quando la funzione è sviluppabile in serie esponenziale.

La difficoltà più grande, aggiunge il Liouville, consiste nel trovare una formula analoga alla (2), che dia il valore di $D^{\mu} \frac{1}{x^{\mu}}$ per tutti i possibili valori di n e di μ.

Il Laurent (nel III vol., pag. 487 del suo *Traité d'Analyse*) dà, come definizione della derivata d'ordine n della $f(z)$ monògena (analitica), nel punto x presa a partire da un punto x_0, l'integrale:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int_{x_0} \frac{f(z)\, dz}{(z-x)^{n+1}} \tag{3}$$

nel campo complesso, lungo un cappio a bordi rettilinei che parta da x_0 e vi ritorni, dopo aver girato con un cerchietto intorno al punto x. La derivata della $f(z)$ non è, in generale, monodroma intorno al punto x, i suoi diversi valori, che possono anche essere in numero infinito se n è incommensurabile, si permutano gli un gli altri intorno al punto x che è un punto critico. Il Laurent osserva che questa sua definizione, nel caso di n negativo, si confonde con quella data da Letnikof nel 1874 in un giornale russo. Per $n < 0$ l'integrale preso lungo il cappio ha valore zero; il suo valore lungo il primo bordo è:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int_{x_0}^{x} \frac{f(z)\, dz}{(z-x)^{n+1}};$$

il suo valore preso lungo l'altro bordo (dopo aver girato intorno al punto critico x) è:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int_{x_0}^{x} \frac{f(z)\, dz}{(z-x)^{n+1}} e^{-2(n+1)\pi i}.$$

La $D^n f(z)$ e dunquè:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\left[1 - e^{-2(n+1)\pi i}\right]\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$$

o

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\left[e^{(n+1)\pi i} - e^{-(n+1)\pi i}\right]\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}},$$

o ancora

$$\Gamma(n+1)\,\frac{\operatorname{sen}(n+1)\pi}{\pi}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}$$

e, se si osserva che

$$\Gamma(n+1)\,\Gamma(-n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(n+1)\pi},$$

si ha infine:

$$\frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}, \tag{4}$$

formula che Letnikof aveva adottata per definire la derivata d'ordine n nel caso di n negativo.

E gli esempi si potrebbero moltiplicare citando le formule di Lagrange, Caylay, Riemann, Grünwald, Most, Krug etc.

È stato però giustamente osservato che tutti questi metodi hanno avuto un indirizzo sempre parziale; gli autori cioè, anzichè partire da criterii generali o da scopi prefissi d'utilità pratica, hanno prese certe funzioni e certi sviluppi e stabilite delle formule d'interpolazione, sicchè queste ricerche si sono in gran parte risolte in argomento di curiosità scientifiche. Sarebbe desiderabile poter risolvere il problema affrontandolo con criterii più generali che dovrebbero derivare da questo: D^n soddisfi a proprietà analoghe a quelle della derivazione e integrazione ordinaria e sia definito con formule tali da conseguirne applicazioni utili, adatte a generalizzare quelle del calcolo ordinario.

Siamo ancora lontani, purtroppo, dal poter rispondere bene a questi desiderata: espongo però alcune idee che credo adatte ad entrare in argomento.

A mio avviso le condizioni da imporre alla D^n potrebbero precisarsi così:

1°) $D^n f(x)$ sia definita con una formula generale entro un esteso campo di funzioni di variabile reale (questo campo dovrebbe comprendere, per D^n qualunque, almeno tutte le $f(x)$ indefinitamente derivabili; più precisamente, per n positivo dato, tutte le funzioni che sono derivabili almeno

tante volte quant'è l'intero immediatamente inferiore ad n; per n negativo il campo dovrebbe comprendere tutte le funzioni integrabili).

2°) La formula che definisce $D^n f(x)$ sia possibilmente analitica in n.

3°) D^n si riduca alla derivazione e integrazione ordinaria per n intero.

4°) D^n sia operazione distributiva, cioè

$$D^n(a\varphi + b\psi) = a\,D^n\varphi + b\,D^n\psi\,.$$

5°) $D^{m+n} f(x) = D^m D^n f(x) = D^n D^m f(x) = D^{n+m} f(x)$.

Nel cercare altre condizioni ed una definizione di D^n occorre tener conto della possibile pluralità dei valori, pluralità che ha formato lo scoglio delle ricerche precedenti. La pluralità si verifica già nel caso di n intero, negativo; non è possibile dunque prescinderne. Per esempio, noi abbiamo che $D^{-1}(0)$ non è necessariamente zero, ma zero più una costante arbitraria; così $D^{-1} e^{\varphi t} = \varphi^{-1} e^{\varphi t} +$ cost. arb. e via via. Non è quindi il caso di porre condizioni come

$$D^n e^{\varphi t} = \varphi^n e^{\varphi t}$$

le quali escluderebbero certe pluralità di soluzione e contradirebbero con le convenzioni usuali del calcolo, convenzioni che hanno una ragione d'essere pratica molto importante per la risoluzione delle operazioni inverse. Dovremo prevedere invece che

$$D^n f(x)$$

sarà, in generale, esprimibile per mezzo di due parti; una parte convenzionalmente assunta come *principale*, e l'altra *funzione complementare* contenente le eventuali costanti o funzioni arbitrarie; quindi la 4ª condizione dovrà intendersi solo purchè si tenga conto opportuno della parte complementare. In armonia alla 3ª condizione le arbitrarie dovranno sempre sparire quando n è intero positivo.

Questa distinzione, fra il valore principale e la parte contenente le arbitrarie, era già stata accennata da Liouville senza però tenerne conto nelle sue formule generali [1].

In una Nota successiva esporrò, per ora limitatamente a quanto riguarda la ricerca del valore principale, una formula di definizione atta a soddisfare le condizioni imposte.

[1] Cfr. Liouville, *Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires*. Journal de Crélle (1834), B. XI, pp. 1-19.

Matematica. — *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti nell'analisi ad n dimensioni di Grassmann.* Nota I di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1].

Facendo seguito alla mia precedente Nota: *Hamiltoniani e gradienti di formazioni estensive* ecc. [2] ed alle due Note dei Rendiconti del mese di luglio della R. Acc. di Napoli, che ivi ho indicato con **N I**, **N II**, tratto qui di certe proprietà generali che collegano i due tipi di operatori; e vi introduco la nozione di *divergenza* per ogni funzione a più variabili nella qualità di hamiltoniano, o gradiente, particolare. Tratto, inoltre, del modo di comportarsi dei due operatori, rispetto al prodotto di due funzioni.

1. **a**) Vennero già notate nella precedente Nota le due relazioni significate dalle formole (26), (28) di essa, sussistenti fra gli hamiltoniani e gradienti di una stessa funzioue U, ed intendiamo, senza ripeterle, che siano qui tenute presenti. Ora, se, riferendoci alle formule (17), (18) per

$$\varrho' + \sigma \leq n + 1 \quad , \quad \varrho' + \sigma \geq n + 1 \text{ risp.},$$

ed alle formule (21), (23) rispettivamente per

$$\varrho + \sigma < n + 1 \quad , \quad \varrho + \sigma \geq n + 1$$

della stessa Nota, prendiamo le formazioni supplementari delle $\nabla_\Omega \mathbf{U}$, $\mathrm{G}_\Omega^- \mathbf{U}$, noi troviamo:

$$(1) \quad \begin{cases} |\nabla_\Omega \mathrm{U} = (-1)^{\rho'\sigma} \sum_{h=1}^{h=q} |\nabla_\Omega \mathrm{U}_h| \, \mathrm{F}_h = (-1)^{\rho'\sigma} \cdot \sum_{h=1}^{h=q} \mathrm{G}_\Omega \mathbf{U}_h | \mathbf{F}_h \\ \qquad \text{se } \varrho' + \sigma \leq n + 1 , \\ |\nabla_\Omega \mathrm{U} = (-1)^{\rho\sigma'} \sum_{h=1}^{h=q} |\nabla_\Omega \mathrm{U}_h| \, \mathrm{F}_h = (-1)^{\rho\sigma'} \cdot \sum_{h=1}^{h=q} \mathrm{G}_\Omega \mathbf{U}_h | \mathbf{F}_h \\ \qquad \text{se } \varrho' + \sigma \geqq n + 1 , \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} |\,\mathrm{G}_\Omega \, \mathbf{U} = (-1)^{\rho\sigma} \sum_{h=1}^{h=q} |\, \mathrm{G}_h \, \mathbf{U}_h \,|\, \mathbf{F}_h = (-1)^{\rho\rho'+\rho\sigma} \sum_{h=1}^{h=q} \mathrm{G}_h \, \mathbf{U}_h \,|\, \mathbf{F}_h \\ \qquad \text{se } \varrho + \sigma \leq n + 1 , \\ |\,\mathrm{G}_\Omega \, \mathbf{U} = (-1)^{\rho'\sigma'} \sum_{h=1}^{h=q} |\, \mathrm{G}_h \, \mathbf{U}_h \,|\, \mathbf{F}_h = (-1)^{\rho'\sigma'+\rho\rho'} \sum_{h=1}^{h=q} \mathrm{G}_h \, \mathbf{U}_h \,|\, \mathbf{F}_h \\ \qquad \text{se } \varrho + \sigma \geqq n + 1 ; \end{cases}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

[2] Questi Rendiconti, vol. XXV, serie 5ª, 2° sem., fasc. 6°, 1916.

perchè, dall'essere le U_h $(h = 1, 2, \ldots, q)$ funzioni scalari, hanno luogo le (14), (15) della Nota II. D'altro canto, se nelle (23'), (24') della *Npr.* (così indicheremo la Nota cit., alla quale la presente fa seguito) mutiamo U in $|U$, con che si dovrà cambiare anche σ in σ', e viceversa, abbiamo

$$(3) \quad \begin{cases} |\nabla_{|\Omega}|U = (-1)^{\rho\sigma'} \sum_{h=1}^{h=q} G_h U_h | F_h \quad \text{se } \varrho + \sigma' \leq n + 1, \\ \qquad \text{cioè se } \varrho' + \sigma \geqq n + 1; \\ |\nabla_{|\Omega}|U = (-1)^{\rho'\sigma} \sum_{h=1}^{h=q} G_h U_h | F_h \quad \text{se } \varrho' + \sigma \leq n + 1, \\ \qquad \text{cioè se } \varrho + \sigma' \geqq n + 1. \end{cases}$$

Confrontando la 2ª delle (1) con la 1ª delle (3), e la prima delle (3) con la 2ª delle (1), si ha, in ogni caso,

$$(4) \qquad |\nabla_\Omega U = \nabla_{|\Omega}|U.$$

b) In modo analogo, cambiando nelle (27) U in $|U$, si ha:

$$G_{|\Omega}|U = (-1)^{\rho\rho' + \rho'\sigma'} \sum_{h=1}^{h=q} \nabla_\Omega U_h | F_h \text{ se } \varrho' + \sigma' \leq n + 1, \text{ cioè se } \varrho + \sigma \geqq n + 1$$

$$G_{|\Omega}|U = (-1)^{\rho\rho' + \rho\sigma} \sum_{h=1}^{h=q} \nabla_\Omega U_h | F_h \text{ se } \varrho' + \sigma' \geqq n + 1, \text{ cioè se } \varrho + \sigma \leq n + 1;$$

e, dal confronto di queste con le (2), segue in entrambi i casi:

$$(5) \qquad |G_\Omega U = G_{|\Omega}|U.$$

I risultati forniti dalle (4), (5) si enunciano in linguaggio ordinario dicendo:

La funzione supplementare dell' hamiltoniano (o del gradiente) di una funzione U, *rispetto ad una formazione* Ω, *coincide con l' hamiltoniano (o col gradiente) della funzione supplementare di* U, *rispetto alla formazione supplementare di* Ω.

c) Tenendo presenti le (25), (26) della *Npr.*, dalle (4), (5) rispettivamente deduciamo:

$$|\nabla_\Omega U = G_\Omega |U \ldots (6) \quad , \quad |G_\Omega U = (-1)^{\rho\rho'} \nabla_\Omega |U \ldots (7);$$

vale a dire: 1°) *la funzione supplementare dell' hamiltoniano di una funzione* U, *rispetto ad una formazione* Ω, *coincide col gradiente della funzione supplementare di* U, *rispetto ad* Ω; 2°) *la funzione supplementare del gradiente di una funzione* U, *rispetto ad una formazione* Ω, *coincide con l' hamiltoniano della funzione supplementare di* U, *rispetto ad* Ω, *moltiplicato per* $(-1)^{\rho\rho'}$ (ϱ e ϱ' essendo, al solito, gli ordini di Ω e di $|\Omega$).

Dalle (6), (7) applicate successivamente deduciamo:

(8) $\|\nabla_\Omega U = |(G_\Omega | U) = (-1)^{\rho\rho'} \nabla_\Omega \| U = (-1)^{\rho\rho'+\sigma\sigma'} \nabla_\Omega U$

(9) $\| G_\Omega U = (-1)^{\rho\rho'} |(\nabla_\Omega | U) = (-1)^{\rho\rho'} G_\Omega \| U = (-1)^{\rho\rho'+\sigma\sigma'} G_\Omega U$;

vale a dire: *il supplemento del supplemento dell'hamiltoniano* (*del gradiente*) *di una funzione* U *di ordine* σ, *rispetto ad una formazione* Ω *di ordine* ϱ, *coincide con l'hamiltoniano* (*col gradiente*) *di* U *rispetto ad* Ω, *moltiplicato per* $(-1)^{\rho\rho'+\sigma\sigma'}$.

d) Le formule da (4) a (9) contengono evidentemente le (14), (15) della N II. Per passare dalle (4), ..., (9) alle corrispondenti relativamente ad U scalare, e pseudo-scalare, basta fare in esse $\sigma = 0$, o $\sigma = -1$, con che $\sigma' = n + 1 - \sigma$ diventa, rispettivamente, $n + 1$ o 0.

2. **a**) Fra i varii hamiltoniani e gradienti di appartenenza ad una data funzione U, sono da mettersi in rilievo gli *scalari* ed i *pseudo-scalari*. Dai due teoremi dati al n. 2, **e**) della *Npr.* risulta che un hamiltoniano ed un gradiente sono numerici se, rispettivamente $\varrho = \sigma$, o $\varrho + \sigma = n + 1$.

Fra i valori che possono prendere ϱ e σ compatibilmente a queste condizioni, vi sono quelli di $\varrho = \sigma = 0$, o $\varrho = \sigma = n + 1$ nel 1° caso; e di $\varrho = 0$ con $\sigma = n + 1$, o $\varrho = n + 1$ con $\sigma = 0$ nel 2° caso. Questi sistemi di valori di ϱ e σ dànno, rispettivamente, per un hamiltoniano, uno pseudo-scalare ed uno scalare; e, per un gradiente, uno scalare ed uno pseudo-scalare; *i quali*, allorchè sia fatta eccezione del prodotto delle unità fondamentali che interviene negli pseudo-scalari, *si riducono tutti alta derivata ordinaria di una funzione numerica rispetto ad una variabile pure numerica.* Esclusi questi casi, per avere hamiltoniani numerici, bisognerà che l'ordine σ della formazione U *sulla* quale si opera, sia quanto l'ordine ϱ della formazione Ω *rispetto* alla quale si opera, ed entrambi distinti da 0, o da $n + 1$; e per avere gradienti numerici bisognerà che ϱ e σ, distinti entrambi da 0 o da $n + 1$, siano *complementari* ad $n + 1$.

b) Quando $\varrho = \sigma$, le $F_1, F_2, \ldots, F_q$ sono le stesse $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ($q = m$); ed allora, a parte il fattore $(-1)^{\rho\rho'}$ [cfr. form. (15), (18) *Npr.*],

$$\nabla_\Omega U_h . F_h = \nabla_\Omega U_h . E_h =$$

$$= (-1)^{\rho\rho'} \left(\sum_1^m \frac{\partial U_h}{\partial \omega_i} | E_i \right) E_h = (-1)^{\rho\rho'} \frac{\partial U_h}{\partial \omega_h} | E_h . E_h = \frac{\partial U_h}{\partial \omega_h} E_h | E_h = \frac{\partial U_h}{\partial \omega_h};$$

per cui, sommando da $h = 1$ ad $h = m$, si avrà:

$$\nabla_\Omega U = (-1)^{\rho\rho'} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} + \cdots + \frac{\partial U_m}{\partial \omega_m} \right). \tag{10}$$

Il 2° membro della (10) sarà detto, senz'altro, *divergenza* della funzione U; ma si intenderà che resti sottinteso il *significato d'origine* quale hamiltoniano della U rispetto ad una formazione d'ordine eguale all'ordine di U. Che se questa formazione è proprio la U stessa (interessa metterlo in rilievo) viene:

$$\nabla_u \mathrm{U} = (-1)^{\rho\rho'} \cdot m . \tag{11}$$

c) Quando $\varrho + \sigma = n + 1$, sicchè $\sigma = n + 1 - \varrho = \varrho'$, fra le E_i vi saranno delle $\mathrm{E}_{i_1}, \mathrm{E}_{i_2}, \ldots, \mathrm{E}_{i_m}$ per le quali si suppone essere $\mathrm{F}_1 = |\mathrm{E}_{i_1}$, $\mathrm{F}_2 = |\mathrm{E}_{i_2}, \ldots, \mathrm{F}_m = |\mathrm{E}_{i_m}$ (anche in questo caso è $q = m$); ed allora:

$$\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U}_h . \mathrm{F}_h = \left(\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_1} \mathrm{E}_1 + \frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_2} \mathrm{E}_2 + \cdots + \frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_m} \mathrm{E}_m\right) | \mathrm{E}_{i_h} =$$

$$= \frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_{i_h}} \mathrm{E}_{i_h} | \mathrm{E}_{i_h} = \frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_{i_h}} .$$

Ne segue, sommando da $h = 1$ ad $h = m$, e moltiplicando per $(-1)^{\rho\rho'}$:

$$\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U} = (-1)^{\rho\rho'} \left(\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \omega_{i_1}} + \frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial \omega_{i_2}} + \cdots + \frac{\partial \mathrm{U}_m}{\partial \omega_{i_m}}\right). \tag{12}$$

Questa (12) suppone scritta, per U, la $\mathrm{U}_1 | \mathrm{E}_{i_1} + \mathrm{U}_2 | \mathrm{E}_{i_2} + \cdots$ che è la funzione supplementare della $\mathrm{V} = \mathrm{U}_1 \mathrm{E}_{i_1} + \mathrm{U}_2 \mathrm{E}_{i_2} + \cdots + \mathrm{U}_m \mathrm{E}_{i_m}$; e questa è del medesimo ordine $\varrho = \sigma'$ della Ω; sicchè $\nabla_\Omega \mathrm{V} = (-1)^{\rho\rho'} \mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{V} =$ $= \mathrm{G}_\Omega | \mathrm{V}$, cioè *la divergenza d'una funzione* U *d'ordine* ϱ, valutata quale hamiltoniano rispetto ad una formazione qualsiasi del medesimo ordine, *eguaglia il gradiente, moltiplicato per* $(-1)^{\rho\rho'}$, *della funzione* U *rispetto alla formazione supplementare*; ovvero, *uguaglia il gradiente della funzione supplementare di* U, rispetto a quella medesima prima formazione. Applicando questo enunciato al caso in cui per Ω si prende U, si ha, insieme alla (11):

$$\mathrm{G}_\mathrm{U} | \mathrm{U} = (-1)^{\rho\rho'} . m \;,\; \mathrm{G}_{|u} \mathrm{U} = m . \tag{11'}$$

d) Affinchè, per una medesima *data* funzione estensiva (per la quale l'ordine rimane da *ciò* stesso prescritto) tanto l'hamiltoniano quanto il gradiente siano funzioni numeriche, bisognerà che, contemporaneamente, sia

$$\varrho + \sigma = n + 1 \;,\; \varrho = \sigma; \quad \text{cioè} \quad \varrho = \sigma = \frac{n+1}{2} . \tag{13}$$

Ora ciò non è possibile che per gli spazî ad un numero *dispari* di dimensioni.

Da rilevarsi è, intanto, il fatto che una divergenza, *per una data funzione*, si presenta come un gradiente, o come un gradiente cambiato di segno, *per la medesima*, secondochè l'ordine di questa e quello della supplementare

non sono, o sono, entrambi dispari. Così, *negli spazii ad un numero dispari di dimensioni le sole divergenze di formazioni d'ordine dispari sono presentabili, senz'altro, come gradienti; le divergenze di formazioni d'ordine pari in tali spazî, e quelle relative a formazioni d'ordine qualsiasi in uno spazio ad un numero pari di dimensioni, sono presentabili come gradienti cambiati di segno*, nel senso dell'enunciato dato in **c**).

e) Per fare un esempio semplice relativamente a quanto si è detto, e per mostrare, nel medesimo tempo, in quale maniera delle teorie così generali, intervengono a perfezionare, nelle loro linee fondamentali, anche l'*analisi* ordinaria *mista* di *punti* e *vettori*, ed a metterne in rilievo la *differenza* con l'*analisi vettoriale pura*, prendiamo due punti

$$p' = t'e + x'i + y'j + z'k \quad ; \quad p = te + xi + yj + zk \tag{14}$$

dei quali supponiamo essere p' funzione di p, ammettente almeno le derivate prime; e dove e rappresenta un punto unitario fisso ed i, j, k i tre vettori unitarî soliti di Hamilton costituenti un sistema destrorso. Avremo

$$G_{|p}p' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial t'}{\partial t}; \tag{15}$$

ed in accordo a quanto si è detto in **c**), **d**) precedente, per essere $n = 3$, $\varrho = 1$:

$$G_p|p' = -\left(\frac{dx'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \nabla_p p'. \tag{16}$$

Se p fosse un vettore $u = xi + yj + zk$, senza esserlo p', si avrebbe:

$$G_{|u}p' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} + \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{t=0} \quad \text{e} \quad G_u|p' = -G_{|u}p' = \nabla_u p'. \tag{17}$$

Se fosse p' un vettore $u' = x'i + y'j + z'k$ essendolo, o non, p, si avrebbe invece

$$G_{|p}u' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z}\,; G_p|u' = \nabla_p u' = -\left(\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z}\right) \tag{18}$$

Se i due vettori u, u', invece che *valori* particolari di variabili estensive in uno spazio *misto* di punti e vettori, fossero variabili generiche di uno spazio *vettoriale puro*, per essere in tal caso $n = 2$, $\varrho = 1$, in accordo a quanto si è detto in **c**), **d**):

$$\nabla_u u' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} \quad ; \quad G_u|u' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = G_{|u}u' \tag{19}$$

diversamente da come è significato dalle (18).

Fisica. — *Dispositivi per produrre correnti di altissima tensione e di senso costante atte all'alimentazione dei tubi per raggi* X. Nota I di O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

Le nuove esigenze della radiologia hanno condotto in pochi anni a importanti perfezionamenti dei dispositivi elettrici destinati alla riproduzione delle scariche che alimentano i tubi a raggi X. In generale questi perfezionamenti hanno lasciato immulato il vecchio motodo di creare per mezzo dei fenomeni induttivi la corrente di alta tensione che serve pel tubo; si fa quindi uso essenzialmente del rocchetto o del trasformatore, dei quali apparecchi si è potuto aumentare la potenza quasi illimitatamente.

Ogni ulteriore aumento di potenza sembra non necessario finchè non si sia trovato un tipo di tubo capace di resistere a potenze maggiori delle attuali. Ma se gli apparecchi esistenti non lasciano nulla a desiderare rispetto alla regolarità di funzionamento e alla quantità di energia eregobile dal secondario, non puo dirsi lo stesso circa la loro adattabilità ai diversi usi della radiologia, per i quali occorrono grandi disponibilità di energia elettrica, ma di *qualità* differenti.

Così il classico rocchetto di Ruhmkorff con interruttore al primario, specialmente con i nuovi tipi di interruttori rotativi a mercurio e a gas, costituisce l'apparecchio ideale per la produzione di scariche di alta tensione e mediocre intensità, quali occorrono nella eccitazione dei tubi durissimi per radioterapia profonda. L'adozione del motore sincrono per l'interruttore dà all'apparecchio la possibilità di funzionare bene per questo scopo, anche con correnti alternate, le più diffuse ormai nelle reti urbane di distribuzione.

Ma il rocchetto con interruttore al primario, per ragioni che sono state esaurientemente illustrate da nostre ricerche speciali, per se stesso è incapace di fornire le grandissime intensità di corrente secondaria quali son richieste della moderna radiografia rapida. Servono assai meglio a questo scopo, quando si dispone di corrente alternata, i trasformatori di tensione nei quali la corrente secondaria deriva dalle naturali variazioni lente sinusoidali dalla corrente primaria, anzichè dalla rottura brusca di questa. La necessità di utilizzare nel secondario solo la semi onda di senso utile per il tubo vien soddisfatta senza inconvenienti con l'uso dei selettori di onda rotanti al sincronismo. Ma quando si volle rendere adatti gli stessi apparecchi per l'eccitazione dei tubi durissimi, che richiedono cioè una molto alta differenza di

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1916.

potenziale, e si credette di raggiungere lo scopo con l'accrescere eccessivamente il coefficiente di trasformazione del trasformatore, il tentativo non ebbe esito molto felice, nonostante quel che si va affermando dagli inventori e dai costruttori. Sta in fatto che l'eccitazione ad altissima tensione di questi apparecchi a trasformatore richiede che tutta la tensione primaria agisca sulle spire del primario ridotte al minor numero possibiie per elevare il coefficiente di moltiplicazione. In queste circostanze nessun freno o regolazione seria è possibile per la energia che il secondario fornisce al tubo: e le minime variazioni nella tensione stradale, o nello stato interno di durezza del tubo determinano oscillazioni violente e saltuarie nel carico di questo, con non lievi pericoli. Questi inconvenienti sono ben noti ai radiologi, i quali hanno potuto constatare che il migliore impianto a trasformatore non riesce a sostituire, nella radioterapia profonda, il funzionamento tranquillo, sicuro e perfettamente graduabile del più modeste rocchetto a interruttore.

Si sentiva quindi il bisogno di un apparecchio che, mentre permettesse la produzione delle grandi correnti secondarie, senza onde inverse, ottenibili coi trasformatori muniti di buoni selettori di onde al secondario, conservasse le qualità del rocchetto, di fornire cioè anche la scarica disruttiva di altissima tensione e di intensità facilmente moderabile, tale in ogni caso da non compromettere anche per false manovre l'esistenza dei preziosi tubi per radioterapia.

È questo lo scopo che si ritiene di avere felicemente raggiunto con gli apparecchi che passiamo a descrivere, i quali permettono inoltre l'utilizzazione diretta delle correnti alternate, o delle correnti continue, senza bisogno di trasformazione con gli ingombranti gruppi motore-dinamo, e forniscono correnti secondarie di qualunque intensità e tensione di senso assolutamente costante, senza bisogno di valvole.

Apparecchio per correnti alternate.

L'apparecchio risulta da un ordinario rocchetto di Ruhmkorff, opportunamente calcolato, da un interruttore rotativo a mercurio e a gas mosso da un motore sincrono a quattro poli, e da uno speciale selettore-commutatore sull'alta tensione trascinato dallo stesso motore sul medesimo albero.

L'interruttore consta di una pentola a chiusura ermetica (che si riempie nel solito modo di gas illuminante) nella quale sono disposte quattro lamine lungo una superficie cilindrica. Un getto diametrale di mercurio lanciato dalla rotazione mette periodicamente in contatto due lamine contrapposte. Con ciò la corrente viene periodicamente chiusa e interrotta a intervalli eguali di mezzo periodo, e, poichè la corrente usata è alternativa, a ogni rottura segue, come si vede dallo schema della fig. 1, una chiusura di corrente opposta che tende a magnetizzare il nucleo in senso contrario al precedente.

La corrente che traversa il primario del rocchetto assume perciò, all'incirca, la forma della figura 2. Se la si considera non nel solo istante A della rottura, ma nello intero tempo A B che comprende la rottura e parte della chiusura consecutiva (*che avviene in senso opposto*) si riconosce facilmente che la forza elettromotrice indotta nel secondario è durante il tempo A B di senso costante, e precisamente elevatissima al primo istante (rottura) e ancora elevata nella chiusura seguente.

Viene utilizzata la corrente secondaria in tutto questo intervallo, con che si ottiene, nel tubo, una corrente che sale bruscamente al suo valore massimo durante la rottura, prosegue (durante la pausa H, C al primario) sfruttando la decrescente magnetizzazione del ferro, e continua nel tratto C B sempre nel medesimo senso, utilizzando la fase di chiusura e sfruttando con ciò la sorgente di energia, mentre questa provvede per suo conto a magnetizzare in senso inverso il nucleo.

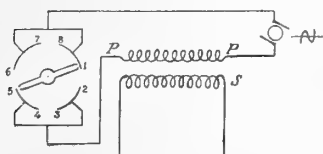
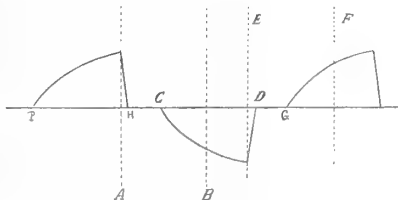



Fig. 1. Fig. 2.

La successiva rottura, che ha luogo in E, e la chiusura che la segue in G riprodurrà nel secondario qualitativamente il medesimo processo, ma il senso della corrente indotta sarà invertito, poichè in E si interrompe una corrente opposta alla prima interrotta in A.

Ma se con un artificio opportuno durante il tempo B E, nel quale la forza elettromotrice secondaria è trascurabile, si invertono le comunicazioni fra i poli del rocchetto e i capi del tubo, anche la nuova corrente indotta traverserà questo nel senso giusto. Occorre perciò che le comunicazioni tra il rocchetto e il tubo siano invertite a ogni mezzo periodo, e che l'istante della commutazione sia opportunamente scelto, cioè in un punto degli intervalli analoghi a B E.

Provvede a questo scopo il nuovo selettore commutatore del secondario che permette di ottenere con la minima velocità delle parti rotanti la maggiore distanza tra i capi del rocchetto e tra quelli del tubo, in modo da impedire che la scarica avvenga direttamente nel selettore, anzichè seguire la via del tubo.

Esso è costituito (fig. 3) da un telaio **TT'** che sostiene in RR' e V V' quattro archi metallici di ampiezza conveniente e aventi i bordi arrotondati. Gli archi RR' sono collegati al rocchetto, gli archi V V' al circuito di utilizzazione.

L'asse A porta in CC′ due croci il cui piano è perpendicolare all'asse stesso, costituite: nei bracci 1 e 2 da due bacchette metalliche, e nei bracci ad esse perpendicolari da due bastoni di materiale isolante. Gli estremi di tali bastoni sono riuniti da due bacchette metalliche 3 e 4 parallele allo asse A e con gli estremi piegati ad angolo retto verso lo esterno.

È facile riconoscere che le connessioni tra rocchetto e tubo si invertono ad ogni quarto di giro; a parità di dimensioni la distanza esplosiva utilizzabile è maggiore di quella possibile con qualunque altro tipo esistente.

L'apparecchio permette inoltre i seguenti due tipi di connessioni al secondario, dei quali può essere utile l'applicazione:

1°) Si unisca un polo del rocchetto a un polo del circuito di utilizzazione, permanentemente; l'altro polo del rocchetto all'arco R del commu-

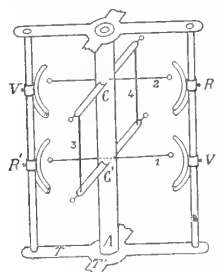



Fig. 3.

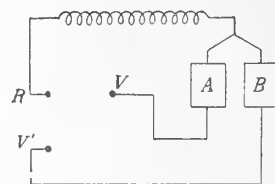



Fig. 4.

tatore, e l'altro estremo del circuito di utilizzazione a V. Si utilizzi infine uno solo dei contatti alle lamine dello interruttore, in modo che il primario sia interrotto una sola volta ogni mezzo giro. In queste condizioni l'apparecchio funziona da selettore della sola onda di apertura, trasportando sull'apparecchio di utilizzazione, senza limitazione, la più alta tensione di cui il rocchetto è capace.

È questa la disposizione consigliabile per l'uso dell'apparecchio nell'alimentazione dei tubi molto duri.

E poichè in tale caso è utile dare al primario una maggiore autoinduzione, e inserire fra i poli dello interruttore il condensatore, essendo molto elevata anche la tensione agli estremi del primario, tutti questi cambiamenti nel sistema primario sono eseguiti, in seguito a uno schema di connessione opportunamente studiato, col semplice spostamento di una manovella sul quadro di manovra.

Il condensatore non è necessario nella eccitazione dei tubi molli; ma nulla vieta che esso resti permanentemente inserito ai poli dell'interruttore per tutti gli usi.

2°) Si connetta, come nella fig. 4, un polo del rocchetto a due tubi distinti A e B. Si rileghi inoltre l'altro polo del rocchetto a R e i due capi liberi di A e B rispettivamente ai punti V e V′ del selettore. È chiaro che

in tal caso i due tubi A e B saranno alternativamente alimentati da correnti unilaterali per ciascuno di essi.

Ciò potrà servire per fare due applicazioni di raggi contemporaneamente, o per la visione diretta radiostereoscopica per mezzo dell'apparecchino Trabacchi [1].

***

La graduazione della corrente secondaria è ottenuta con un reostato, come anche con la immersione più o meno profonda di due lamine dell'interruttore, aventi forma triangolare, cosicchè viene mutato il tempo durante il quale esse sono lambite dal getto di mercurio e quindi il tempo di chiusura della corrente primaria.

La fase più conveniente della rottura viene trovata una volta per tutte spostando opportunamente lo statore del motorino, essendo il getto di mercurio rilegato al rotore.

E poichè questo, trattandosi di un motore a quattro poli, può entrare in sincronismo per quattro posizioni ortogonali, delle quali a due corrisponde una corrente secondaria in un certo senso, e a due una corrente opposta, un commutatore opportuno disposto sul circuito primario e comandato da un opportuno apparecchio di segnalazione o di blocco fa sì che la corrente traversi il tubo sempre nel giusto senso [2].

***

Con l'apparecchio sopra descritto, utilizzandosi la rottura brusca della corrente primaria e la susseguente chiusura di una corrente opposta, si possono raggiungere correnti secondarie estremamente elevate. Con il rocchetto calcolato appositamente (in base al fatto che le correnti di chiusura non sono più nocive, come in tutti gli apparecchi esistenti, ma utilizzate nel senso buono) si possono ottenere oltre cento milli ampère in un tubo normale da radiografia, cosicchè è possibile la radiografia istantanea o a brevissima posa di qualunque parte del corpo.

Ma poichè si ha ancora da fare con un vero e proprio rocchetto a interruttore sul primario, l'alimentazione dei tubi durissimi per radioterapia profonda si esegue con la migliore regolarità e facilità, a qualunque regime, senza violentare per nulla l'apparecchio e anzi lavorando con quasi tutta la resistenza del reostato e una corrente primaria piccolissima.

[1] Ved. Nuovo Cimento, vol. XI, 1° sem., pag. 212.
[2] Brevetto 28 agosto 1916.

Per gli usi della radioscopia e della radiografia di non grandissima intensità *si può mettere fuori circuito l'interruttore a mercurio* e inviare la corrente alternata direttamente nel primario. Il selettore raccoglie dal secondario le due onde d'alta tensione (funzionando il rocchetto da trasformatore) e le invia raddrizzate sul tubo. In tal caso l'interruttore gira a vuoto, e può anche essere svincolato dalla rotazione del motore.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 7°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 11.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 20; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia durante le ferie del 1916.

ERRATA-CORRIGE

Pag. 207, 1ª linea, in luogo di « non », porre « già ».

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 8.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXV.° — Fascicolo 8°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del **1916.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Chimica-fisica. — *Sulla legge delle fasi di Gibb.* Nota del Socio CARLO VIOLA [1].

In questa legge relativa all'equilibrio di un sistema eterogeneo di complessi in contatto, tre quantità intervengono: *fasi*, *componenti* e *variabili indipendenti* o *libere*.

Essendo N il numero delle fasi, n quello dei componenti ed F delle variabili indipendenti, la legge di Gibb è compendiata nell'equazione;

$$n + 2 - N = F.$$

Questa relazione è applicabile anche alle miscele meccaniche omogenee come fasi uniche? Naturalmente per rispondere a tale questione, dobbiamo intenderci sul significato di fase, se le miscele meccaniche possono riguardarsi come fasi, e se le contingenze connesse con la legge di Gibb sussistono ancora, ove in luogo di soluzione solida si sostituisca un miscuglio meccanico omogeneo.

Chwolson [2] chiama fasi le parti di un sistema eterogeneo separabili meccanicamente. Bakhuis Roozeboom [3] non comprende nella definizione di fase il carattere della separazione meccanica, ma, ciò che torna lo stesso, fase è uno stato separato da altri stati coesistenti negli equilibri eterogenei, poichè dicendo stato Bakhuis intende che è omogeneo, e che è separabile da

[1] Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre (1916).
[2] O. D. Chwolson, *Traité de physique* (1910), II, 535.
[3] H. W. Bakhuis Roozeboom, *Die heterogenen Gleichgewichte*. I, 11.

altri stati pure omogenei. In van't Hoff (¹) è implicita la separazione meccanica nella definizione di fase; e Nernst (²) « *i diversi complessi omogenei fisicamente e meccanicamente, formanti un sistema eterogeneo, si dicono fasi secondo Gibb* ».

Quest'ultima definizione dovuta a Gibb (³) mi pare la più esatta, poichè restringe il significato di fase a un complesso omogeneo, indipendentemente dal fatto se i complessi omogenei siano o no separabili per via meccanica. Infatti la separazione meccanica non è sempre possibile nemmeno là dove è sicuro che si tratta di un complesso analizzabile col microscopio e con la luce polarizzata; p. e. chi mai riuscirebbe a separare meccanicamente i singoli elementi che compongono un cristallo di leucite, di boracite, di microclino ecc. ecc.?

Dunque, carattere essenziale nella definizione di fase è quello dell'omogeneità, dove gli autori sono perfettamente concordi, poichè appena si verifica un salto nell'omogeneità, cioè un passaggio brusco da uno ad altro stato, si lascia una fase e si entra in un'altra; la separazione meccanica si può benissimo trascurare. Ma nemmeno con l'omogeneità tutto è perfettamente chiarito, poichè è sempre l'esperienza che deve fissare il limite, ove termina l'omogeneità e incomincia il complesso eterogeneo. Quando infatti non si riesca con la luce ad analizzare un complesso, essendo troppo grande l'onda, si ricorre all'ultramicroscopio, o anche ad ondulazioni infinitesime, come i raggi Röntgen, o infine a metodi termici, elettrici ecc., sempre nell'intento di determinare la discontinuità di un complesso.

L'omogeneità ha dunque varie gradazioni; oggi può essere eterogeneo quel complesso, che ieri fu omogeneo; ciò dipende dal nostro modo di osservare, dai mezzi di cui disponiamo per osservare. Così si può dire che omogeneo è un granito, il vetro, un colloide, un cristallo semplice; omogenea è una soluzione solida o liquida, una emulsione ecc. ecc.

Un cristallo attraversato da luce Röntgen apparisce discontinuo; come all'opposto un cristallo costituito di lamelle finissime alternate di due o più componenti può apparire continuo nella luce ordinaria e perciò omogeneo, non diversamente come lo è una soluzione solida nel senso di van't Hoff (⁴).

Un esempio può chiarire il problema. Da molteplici esperienze risulta che un feldispato triclino, composto di albite e anortite, non è una soluzione solida, ma una miscela meccanica omogenea, o più esattamente, tutte

(¹) I. W. von't Hoff, *Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie*, I, 92, 93.

(²) W. Nernst, *Theoretische Chemie* (1903), 459.

(³) Gibb, *Traust of the Connecticut Acad.*, III, 108 a 343 (1814-1878).

(⁴) J. H. vont't Hoff, *Die theorie der festen Lösungen.* Zeitsch. f. phys. Chemie *5*, 322 (1890).

le proprietà fisiche dei feldispati sono tali che possono spiegarsi con l'una o con l'altra ipotesi [1].

Gli estremi albite e anortite non possono riguardarsi come isomorfi, malgrado le artificiose argomentazioni di Tschermak e Becke.

Se la separazione meccanica non si può far entrare nella definizione di fase, e l'omogeneità ne è un fattore arbitrario ed imprecisabile, non rimane che ricorrere a un solo carattere, cioè al principio dell'energia. Se un complesso omogeneo è dissolvibile con consumo di lavoro e può ripristinarsi con risparmio di lavoro, esso riceve il carattere di fase. Una soluzione è fase (solida o liquida), poichè il soluto non può separarsi dal solvente senza lavoro, nè può entrare in soluzione senza ripristino della stessa quantità di lavoro. Altrettanto dicasi delle miscele meccaniche omogenee, quando le particelle finissime eterogenee, che le compongono, non siano separabili senza adeguata spesa di lavoro. Per separare due particelle finissime in intimo contatto, si aumenta la superficie e la tensione superficiale, corrispondente ad energia. Per questa ragione un conglomerato, ossia un miscuglio meccanico sciolto, i cui componenti eterogenei hanno tutto il contorno in contatto col solvente, non è fase.

In conclusione fasi sono le soluzioni solide e liquide, i gas, i vapori, i colloidi, i feldispati triclini, le miscele meccaniche omogenee ecc., e come tali dovrebbero entrare quale termine numerico nell'equazione di Gibb. Si vedrà fra breve se questa conclusione è accettabile.

Pertanto è inteso che le fasi hanno un carattere comune; sono cioè sedi di energia, che può cedersi o far passaggio senza perdita alcuna per il sistema eterogeneo quando una fase si scambia con un'altra. Ma non per questo le fasi sono tutte identiche. Nelle fasi gasose i varî componenti sono dotati di espansione e di una completa diffusione; nelle soluzioni liquide e solide vi è la pressione osmotica dovuta all'espansione del soluto, e con essa la diffusione come nei gas. Nelle miscele meccaniche omogenee, la pressione osmotica è naturalmente esclusa, e con essa anche il fenomeno della diffusione. Ed infatti in certi cristalli misti, p. e. i feldispati triclini, di cui si sa che sono miscele meccaniche e non fisiche, non si è verificato il più piccolo indizio di diffusione per migliaia d'anni, che sono passati dopo la loro cristallizzazione, come dopo il loro intimo contatto.

Stabilita così la definizione di fase, determinato la differenza che alcuni fasi hanno fra di loro, veduto che le miscele meccaniche omogenee possono entrare nel novero di fasi uniche, rimane a esaminarsi se malgrado questa differenza, la legge delle fasi di Gibb è applicabile alle miscele mecca-

[1] F. Pockels, N. Jahrb. f. *Mineralogie* (1893), B. B. *8*, 117. Vedi anche la critica di F. Becke su questo argomento. *Tschermaks min. u. petrogr.* Mitt., Wien 1906. *25*, 1-42.

niche omogenee come fasi. Questo è lo scopo della presente Nota, pubblicata nell'intento di portare un piccolo contributo alla teoria dell'equilibrio di contatto; la spinta di questa pubblicazione mi venne data da alcune esperienze su cristalli misti ancora in corso, che saranno pubblicate fra breve. Forse questa Nota porterà chiarezza nelle conclusioni relativamente ai detti cristalli misti.

Per risolvere il problema accennato è necessario vedere quali sono le condizioni fondamentali su cui si basa la legge delle fasi, e a quest'uopo possiamo seguire la dimostrazione datane da Gibb, che mi pare la più generale e completa.

Immaginiamo che l'equilibrio abbia luogo in un sistema eterogeneo fra un numero N di fasi in contatto ed n di componenti. N_1 di esse sono fasi comunemente intese, come gas, liquidi, soluzioni liquide e solide ecc.; N_2 sia il numero delle miscele meccaniche, a cui prendono parte i detti componenti, sicchè $N_1 + N_2 = N$ numero totale di fasi. Per ipotesi ogni componente entri nelle N_1 ed N_2 fasi; si sa d'altronde che questa ipotesi restrittiva si può lasciar cadere senza alterare la generalità del problema.

Sia m_k^i la massa dell'i^{mo} componente appartenente alla k^{ma} fase; inoltre sia φ_k^i il potenziale di essa calcolata per unità di massa, sicchè $\varphi_k^i\, m_k^i$ rappresenti il potenziale totale, e $\varphi_k^i\, \delta m_k^i$ la sua variazione infinitesima e virtuale, quando varia di δm_k^i la sua massa.

Temperatura assoluta, pressione esterna e volume del sistema siano rispettivamente T, p, v.

Immaginiamo effettuato nel sistema una variazione piccolissima, lasciando pel momento che l'energia totale varii di dU, l'entropia di dS e il volume di dv. L'equazione che lega queste trasformazioni è così definita:

$$(1)\qquad dU = TdS - Apdv + \sum_{i=1}^{i=(n)} \sum_{k=1}^{k=N_1} \varphi_k^i\, \delta m_k^i + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=N_1+1}^{k=N} \varphi_k^i\, \delta m_k^i\,.$$

Oltre di ciò scriviamo la nota funzione di Gibb

$$(2)\qquad \Phi = U - TS + Apv,$$

esprimente l'energia libera del sistema, differenziando la quale, si ottiene:

$$(3)\qquad d\Phi = dU - TdS - SdT + A(pdv + vdp),$$

che risulta dalla fusione delle due leggi sulla termodinamica e quindi soddisfacente a una *trasformazione reversibile*, essendo A il coefficiente termico del lavoro.

Sostituendo nella (3) il valore di dU data dalla (1) si ha:

$$(4)\quad d\Phi = -SdT + Avdp + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=N_1}\varphi_k^i\,\delta m_k^i + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=N_1+1}^{k=N}\varphi_k^i\,\delta m_k^i\,.$$

Qualora si voglia che le trasformazioni infinitesime abbiano luogo senza aumento nè diminuzione di energia libera, condizioni indispensabili dell'equilibrio, e così senza variazione nella temperatura e nella pressione, la condizione dell'equilibrio riceve la forma:

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=N_1}\varphi_k^i\,\delta m_k^i + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=N_1+1}^{k=N}\varphi_k^i\,\delta m_k^i = 0\,.$$

Qui è inteso che tutte le trasformazioni piccolissime sono possibili, ma che per l'equilibrio e la reversibilità del sistema, queste trasformazioni possono essere invertite. Di più si può supporre che le masse dei componenti soddisfino a qualche condizione, p. es. la più semplice che esse nel complesso non aumentino nè diminuiscono nelle $N_1 + N_2$ fasi; in tal caso possiamo scrivere le n equazioni

$$(6)\quad \sum_{k=1}^{k=N_1+N_2}\delta m_k^i = 0\,. \qquad i = 1\,,2\,,\ldots(n)$$

La (5) con l'applicazione delle (6) si scinde nelle seguenti:

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = \cdots = \varphi_{N_1}' = \cdots = \varphi_{N_1+N_2}' = \varphi_0'$$

$$\varphi_1'' = \varphi_2'' = \varphi_3'' = \cdots = \varphi_{N_1}'' = \cdots = \varphi_{N_1+N_2}'' = \varphi_0''$$

. . . .

$$\varphi_1^{(n)} = \varphi_2^{(n)} = \varphi_3^{(n)} = \cdots = \varphi_{N_1}^{(n)} = \cdots = \varphi_{N_1+N_2}^{(n)} = \varphi_0^{(n)}\,.$$

Sono le $n(N_1 + N_2 - 1)$ condizioni di equilibrio in un sistema eterogeneo reversibile, dove le trasformazioni piccolissime possono liberamente avere luogo in uno o nell'altro senso. Le incognite da determinarsi nel sistema sono in generale in numero maggiore delle equazioni disponibili. Esse sono temperatura, pressione, ed $(N_1 + N_2)\,(n - 1)$ concentrazioni. Da qui risulta che le variabili indipendenti o incognite arbitrarie si riducono in numero di

$$F = 2 + (N_1 + N_2)\,(n - 1) - n(N_1 + N_2 - 1) = 2 + n - (N_1 + N_2)\,,$$

come appunto vuole la legge di Gibb.

Si può procedere anche in un altro modo per arrivare allo stesso risultato.

La supposizione fatta in principio di questa Nota è che in ogni fase come ogni miscela meccanica omogenea sia tale, che i singoli componenti non possono essere separati gli uni dagli altri senza consumo di lavoro. Per questo solo fatto la tensione del vapore di ciascun componente obbligato ad altri deve essere minore di quella dello stesso componente allo stato libero e alla stessa temperatura, poichè, se ciò non fosse, durante un ciclo completo si avrebbe produzione di lavoro dal nulla. Per la stessa ragione, e generalizzando, un componente avrà diversa tensione del vapore secondo che si trovi in contatto con uno, con l'altro o con più componenti diversi, anzi deve risultare che l'abbassamento della tensione del vapore è tanto maggiore quanto maggiore è il lavoro necessario per distaccarlo. Da qui viene che l'abbassamento della tensione del vapore è proporzionale alla concentrazione del componente ed è funzione dei fattori determinanti le proprietà fisiche della fase, in cui il componente viene a trovarsi.

Da queste considerazioni possiamo dedurre le condizioni necessarie dell'equilibrio, che così si riassumono: un componente che fa parte di due o più fasi deve avere la stessa tensione del vapore lungo la superficie di contatto, per evitare che il detto componente passi da una ad altra fase, e che il processo sia in ogni istante reversibile. Chiamiamo con $c_1^i, c_2^i, c_3^i, \ldots c_k^i, \ldots c_N^i$ i coefficienti di concentrazione dell'i^{mo} componente nelle N_1 e N_2 fasi, e con $x_1^i, x_2^i, x_3^i, \ldots x_k^i, \ldots x_N^i$ funzioni relative alle N fasi, potremo con le seguenti $N - 1$ condizioni stabilire l'equilibrio dell'i^{mo} componente:

$$c_1^i x_1^i = c_2^i x_2^i = c_3^i x_3^i = \cdots = c_{N_1}^i x_{N_1}^i = \cdots = c_N^i x_N^i .$$

Ve ne sono n analoghe, essendo n componenti, che vogliamo ripetere:

$$\begin{array}{l}
c_1' \; x_1' = c_2' \; x_2' = c_3' \; x_3' = \cdots = c_k' \; x_k' = \cdots = c_N' \; x_N' \\
c_1'' \; x_1' = c_2'' \; x_2'' = c_3'' \; x_3'' = \cdots = c_k'' \; x_k'' = \cdots = c_N'' \; x_N'' \\
c_1''' \; x_1''' = c_2''' \; x_2''' = c_3''' \; x_3''' = \cdots = c_k''' \; x_k''' = \cdots = c_N''' \; x_N''' \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_1^i \; x_1^i = c_2^i \; x_2^i = c_3^i \; x_3^i = \cdots = c_k^i \; x_k^i = \cdots = c_N^i \; c_N^i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_1^{(n)} x_1^{(n)} = c_2^{(n)} x_2^{(n)} = c_3^{(n)} x_3^{(n)} = \cdots = c_k^{(n)} x_k^{(n)} = \cdots = c_N^{(n)} x_N^{(n)} .
\end{array}$$

In queste $n(N - 1)$ condizioni d'equilibrio vi sono propriamente $N(n - 1)$ coefficienti di concentrazione, che devono essere determinate in ogni singolo

caso. Le funzioni x_k^i non possono risultare naturalmente altro che dall'esperienza, si considerano come date, e possono essere costanti entro certi limiti delle concentrazioni.

Riassumendo e concludendo: *la legge di Gibb è applicabile all'equilibrio di miscele meccaniche omogenee considerate come fasi in contatto con altre fasi, a condizione che esse siano reversibili in qualsivoglia trasformazione entro l'esistenza del sistema.*

Se i cristalli misti in tutte le proporzioni fra due o più componenti isomorfi senza lacune non fossero fasi, la legge di Gibb ci darebbe risultati in contraddizione con l'esperienza. Si deve dunque ritenerli fasi, ma, per le cose ora dimostrate, rimane tuttavia indeciso se codeste fasi siano soluzioni solide ovvero miscele meccaniche omogenee, poichè l'una ipotesi entra nella legge di Gibb come l'altra; questo essendo il succo delle nostre considerazioni. Per esempio i due idrati isomorfi $Mg\,SO_4 + 7\,aq$ e $Zn\,SO_4 + 7\,aq$ in soluzione acquosa dànno cristalli misti $(Mg.Zn)\,SO_4 + 7\,aq$ in tutte le proporzioni [1]. Secondo la legge di Gibb i detti cristalli misti devono essere fasi; ma con ciò non è dimostrato che essi siano soluzioni solide, come ritiene il sig. Sommerfeld [2], esaminando altre proprietà fisiche non additive. E che essi debbano essere fasi risulta appunto dal fatto che mantengono l'equilibrio di contatto con la rispettiva soluzione e il vapore saturi, lasciando due variabili indipendenti come appunto insegna l'esperienza. In una prossima Nota esporrò le esperienze da me fatte intorno a questi cristalli misti, che ritengo miscele meccaniche omogenee. Mi pare perciò giustificato di avere innanzi tutto esaminato la legge di Gibb, in quanto essa possa estendersi alle miscele meccaniche omogenee quali fasi, e di avere con ciò sbarazzato il campo da un equivoco.

[1] W. Nernst, *Traité de Chemie générale.* Paris 1911. 132.

[2] E. Sommerfeld, *Thermochemische und Thermodynamische Methoden, angewandt auf den Vorgang der Bildung von Mischkristallen.* N. Jahrb. f. Min. ecc., 1900, BB. *13*, 434-468.

Matematica. — *Sui nuclei periodici di Evans e la composizione di seconda specie.* Nota I di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

1. In una recente Memoria il prof. I. G. Evans ha studiato le equazioni di Fredholm:

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 n(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{1}$$

nell'ipotesi che il nucleo n sia della forma

$$n(x \pm y),$$

e sia una funzione periodica, a periodo eguale all'intervallo di integrazione.

In questa Nota mi propongo di riprendere, generalizzandoli, lo studio di tali nuclei, dal punto di vista della composizione di seconda specie. La soluzione dell'equazione (1) ne viene di conseguenza, in uno coi risultati ottenuti dall'Evans.

Devo al mio Maestro prof. Volterra l'osservazione che due nuclei di Evans

$$m(x-y) \quad , \quad n(x-y)$$

sono sempre permutabili. Tale osservazione è capitale, poichè permette di estendere tutta la teoria del gruppo del ciclo chiuso.

2. Cominciamo dal considerare i nuclei della forma

$$n(ax - by)$$

ove la n sia una funzione periodica del suo argomento, a periodo eguale all'intervallo d'integrazione, ed a, b sieno interi; operiamo su essi mediante composizione di seconda specie.

Chiameremo tali nuclei: *nuclei di Evans della classe* (a, b).

Si può allora enunciare il

TEOREMA I. — *La composizione di due nuclei di Evans della classe* (a, b) *e della classe* (α, β) *dà due nuclei di Evans delle classi rispettive* $\left(\frac{a\alpha}{d_1}, \frac{b\beta}{d_1}\right)$; $\left(\frac{a\alpha}{d_2}, \frac{b\beta}{d_2}\right)$, *ove* d_1, d_2 *sono i massimi comun divisori rispettivi delle coppie* $\alpha, b; a, \beta$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

Infatti, uno dei due nuclei risultanti dalla composizione è

$$\overset{\times\times}{m}\ \overset{\times\times}{n} = \nu(x\,,y) = \int_0^1 m(ax - bs)\, n(\alpha s - \beta y)\, ds\,.$$

Mutiamo ora ax in $ax + \frac{bh}{d_1}$; βy in $\beta y + \frac{\alpha h}{d_1}$; nell'ipotesi che sieno $a\,,\beta$ differenti da zero, avremo

$$\nu\left(x + \frac{b}{ad_1}h\,, y + \frac{\alpha}{\beta d_1}h\right) = \int_0^1 m\left(ax + \frac{bh}{d_1} - bs\right)\, n\left(\alpha s - \frac{\alpha h}{d_1} - \beta y\right) ds\,.$$

In quest'ultimo integrale mutiamo a sua volta s in $\sigma + \frac{h}{d_1}$; sarà $ds = d\sigma$, mentre i limiti superiore ed inferiore dell'integrale diventeranno $1 + \frac{h}{d_1}\,, \frac{h}{d_1}$; avremo cioè

$$\nu\left(x + \frac{b}{ad_1}h\,, y + \frac{\alpha}{\beta d_1}h\right) = \int_{\frac{h}{d_1}}^{1+\frac{h}{d_1}} m(ax - b\sigma)\, n(\alpha\sigma - \beta y)\, d\sigma\,.$$

Per le proprietà degli integrali, questo si può scrivere anche

$$\nu\left(x + \frac{b}{ad_1}h\,, y + \frac{\alpha}{\beta d_1}h\right) =$$

$$= \int_0^1 m(ax - b\sigma)\, n(\alpha\sigma - \beta y)\, d\sigma + \int_1^{1+\frac{h}{d_1}} m(ax - b\sigma)\, n(\alpha\sigma - \beta y)\, d\sigma -$$

$$- \int_0^{\frac{h}{d_1}} m(ax - b\sigma)\, n(\alpha\sigma - \beta y)\, d\sigma\,.$$

Ora, tenuto conto della periodicità di m ed n, e del fatto che $b\,,\alpha$ sono interi, avremo

$$m(ax - b\sigma') = m(ax - b\sigma'')$$
$$n(\alpha\sigma' - \beta y) = n(\alpha\sigma'' - \beta y)$$

ove

$$0 < \sigma' < \frac{h}{d_1} \quad ; \quad \sigma'' = 1 + \sigma'\,.$$

Quindi gli ultimi due integrali scritti sono eguali e la loro differenza è nulla.

Resta dunque

$$\nu\left(x+\frac{b}{ad_1}h\,,\,y+\frac{\alpha}{\beta d_1}h\right)=\int_0^1 m(ax-b\sigma)\,n(\alpha\sigma-\beta y)\,d\sigma=\nu(x\,,\,y)\,;$$

il che implica, come si vede facilmente,

$$\nu(x\,,\,y)=\nu\left(\frac{a\alpha}{d_1}x-\frac{b\beta}{d_1}y\right).$$

Mutiamo ora x in $x+\frac{1}{a}$; avremo

$$\nu\left(\frac{\alpha}{d_1}x-\frac{b\beta}{d_1}y+\frac{\alpha}{d_1}\right)=$$

$$=\int_0^1 m\left(a\left(x+\frac{1}{a}\right)-b\sigma\right)n(\alpha\sigma-\beta y)\,d\sigma=\int_0^1 m(ax-b\sigma+1)\,n(\alpha\sigma-\beta y)\,\delta\sigma;$$

ed essendo la m funzione a periodo 1, sarà $m(ax-b\sigma+1)=m(ax-b\sigma)$, da cui si trae

$$\nu\left(\xi+\frac{\alpha}{d_1}\right)=\nu(\xi)\quad,\quad \xi=\frac{\alpha}{d_1}x-\frac{b\beta}{d_1}y\,.$$

In modo analogo, col cambiamento di y in $y+\frac{1}{\beta}$ si otterrebbe

$$\nu\left(\xi+\frac{b}{d_1}\right)=\nu(\xi)\,.$$

Cioè la funzione $\nu(\xi)$ ha i due periodi $\frac{\alpha}{d_1}$ e $\frac{b}{d_1}$. Essa avrà quindi più generalmente il periodo

$$e_1\frac{\alpha}{d_1}+e_2\frac{b}{d_1}$$

con e_1 ed e_2 interi positivi o negativi.

Intanto gli interi $\frac{\alpha}{d_1}$, $\frac{\beta}{d_1}$ sono primi fra loro; quindi si potranno determinare sempre gli interi e_1, e_2 in modo tale che

$$e_1\frac{\alpha}{d_1}+e_2\frac{b}{d_1}=1;$$

cioè la funzione $\nu(\xi)$ sarà periodica, a periodo 1.

Tenuto conto che $\xi = \frac{a\alpha}{d_1} x - \frac{b\beta}{d_1} y$, si vede allora che effettivamente essa è un nucleo di Evans della classe $\left(\frac{a\alpha}{d_1}, \frac{b\beta}{d_1}\right)$.

Un ragionamento identico si farebbe per il prodotto di composizione $\overset{\times\times}{n}\ \overset{\times\times}{m}$.

Noi abbiamo supposto che α, β siano diversi da zero. Se però, ad es., fosse $\alpha = 0$, sarebbe

$$\overset{\times\times}{m}\ \overset{\times\times}{n} = \nu = \int_0^1 m(-bs)\, n(\alpha s - \beta y)\, ds$$

che è funzione di βy, ed è anche a periodo 1. Se poi fossero $\alpha = \beta = 0$, allora risulterebbe

$$\nu = \overset{\times\times}{m}\ \overset{\times\times}{n} = \text{costante},$$

ed a maggior ragione appartiene ai nuclei di Evans.

Si converrà quindi che se $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, sia $d_1 = \beta$; se $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ $d_1 = \alpha$; e se $\alpha = \beta = 0$ anche $d_1 = \alpha = \beta = 0$.

3. In generale, due nuclei di Evans non sono permutabili.

Consideriamo, ad esempio, i due nuclei:

$$m = \cos 2\pi(x - 2y) \quad ; \quad n = \cos 2\pi(3x - y).$$

Avremo, applicando note formole di trigonometria,

$$\overset{\times\times}{m}\ \overset{\times\times}{n} = \int_0^1 \cos 2\pi(x - 2s) \cos 2\pi(3s - y)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \cos 2\pi(x - y + s)\, ds + \int_0^1 \cos 2\pi(s - x - y)\, ds \right\};$$

e ponendo nel primo integrale $s = t - (x - y)$, e nel secondo $s = u + x + y$, avremo

$$\overset{\times\times}{m}\ \overset{\times\times}{n} + \frac{1}{2} \left\{ \int_{x-y}^{1+x-y} \cos(2\pi t)\, dt + \int_{-(x+y)}^{1-(x+y)} \cos(2\pi u)\, du \right\},$$

e per la periodicità delle funzioni:

$$\overset{\times\times}{m}\ \overset{\times\times}{n} = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \cos(2\pi t)\, dt + \int_0^1 \cos(2\pi u)\, du \right\} = 0.$$

Invece, avremo

$$\overset{\times\times}{n}\;\overset{\times\times}{m} = \int_0^1 \cos 2\pi(3x - s)\cos 2\pi(s - 2y)\,ds =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{ \int_0^1 \cos 2\pi(3x - 2y)\,ds + \int_0^1 \cos 2\pi(3x + 2y - 2s)\,ds \right\}.$$

Ora, si vede che il secondo integrale è nullo; dunque resta

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = 0$$

$$\overset{\times\times}{n}\;\overset{\times\times}{m} = \tfrac{1}{2}\cos 2\pi(3x - 2y)\,.$$

Si può osservare che i nuclei di classe $(a\,,b)$ coincidono con quelli di classe $(-a\,,\ -b)$, e comprendono quelli di classe $a\varrho\,,b\varrho$ ove ϱ sia intero.

Teorema II. — *I nuclei di Evans di classe* $(1\,,1)$ *sono tutti permutabili fra loro (teorema del prof. Volterra).*

Infatti, se in

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = \int_0^1 m(x - s)\,n(s - y)\,ds\,;$$

poniamo $s = -t + y + x$; $ds = -dt$; i limiti superiore ed inferiore dell'integrale diventano rispettivamente $-1 + y + x$ e $y + x$. Quindi risulta:

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = -\int_{y+x}^{-1+y+x} m(x + t - y - x)\,n(-t + y + x - y)\,dt =$$

$$= \int_{y+x-1}^{y+x} n(x - t)\,m(t - y)\,dt\,,$$

ed essendo le $n\,,m$ periodiche, e l'integrale esteso ad un intervallo d'ampiezza eguale al periodo, sarà anche:

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = \int_0^1 n(x - t)\,m(t - y)\,dt = \overset{\times\times}{n}\;\overset{\times\times}{m}\,.$$

Teorema III. — *Due nuclei di classe* $(1\,,-1)$ *sono permutabili fra loro, se sono ambedue funzioni pari, o ambedue funzioni dispari.*

Infatti scriviamo

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = \int_0^1 m(x + s)\,n(s + y)\,ds\,;$$

e poniamo $s = -\sigma - x - y$; avremo $ds = -d\sigma$, mentre i limiti superiore ed inferiore dell' integrale diventano $-1 - x - y$, $-x - y$. Quindi

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = -\int_{-x-y}^{-1-x-y} m(-y-\sigma)\, n(-\sigma - x)\, d\sigma .$$

E per le ipotesi fatte:

$$m(-y-\sigma) = \pm\, m(\sigma + y) \ , \ n(-\sigma - x) = \pm\, n(\sigma + x) .$$

Quindi, tenendo conto della periodicità:

$$\overset{\times}{m}\,\overset{\times}{n} = -(\pm 1)^2 \cdot \int_{-x-y}^{-1-x-y} n(x+\sigma)\, m(\sigma + y)\, d\sigma = -\int_{1}^{0} n(x+\sigma)\, m(\sigma+y)\, d\sigma,$$

ed invertendo i limiti,

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = \int_{0}^{1} n(x+\sigma)\, m(\sigma + y)\, d\sigma = \overset{\times\times}{n}\,\overset{\times\times}{m} .$$

In modo analogo si dimostrerebbe il

Teorema IV. — *Se di due nuclei di classe* $(1, -1)$, *uno è funzione pari e l'altro funzione dispari, sarà*

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = -\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} .$$

Si può anche enunciare il

Teorema V. — *Se il nucleo* n *è di classe* $(1, -1)$, *ed il nucleo* m *è di classe* $(1, 1)$ *ed è di classe pari, allora essi sono permutabili; se invece* m *è di classe dispari, allora*

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = -\overset{\times\times}{n}\,\overset{\times\times}{m} .$$

Infatti, basta porre

$$s = \sigma + x - y \ ; \ x - s = -(\sigma - y) \ ; \ y + s = x + \sigma$$

ed operare le solite trasformazioni nell' integrale.

Matematica. — *Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio E. BERTINI [1].

Le 27 rette e i 45 piani tritangenti di una superficie del terzo ordine formano notoriamente una configurazione $(27_5, 45_3)$, cioè sono tali che sopra ognuno dei piani stanno tre delle rette e per ciascuna delle rette passano cinque dei piani. Godono inoltre di queste due proprietà:

1°) se due delle 27 rette sono incidenti, il loro piano contiene un'altra delle rette, epperò è uno dei 45 piani tritangenti;

2°) se una delle rette e uno dei piani non si appartengono, il loro punto comune giace sopra una delle tre rette contenute nel piano.

Le stesse due proprietà spettano altresì, com'è pure notissimo, alla configurazione $(15_3, 15_3)$ formata dalle 15 rette di una superficie cubica che rimangono levando quelle di una bissestupla, e dai 15 piani che le contengono a tre a tre.

Essendomi proposto di ricercare in che modo le proposizioni precedenti si possano invertire, sono stato condotto a considerare una configurazione di rette e di piani definita come segue.

Si abbiano x rette (di cui tre qualunque non passanti per uno stesso punto) ed y piani, tali che su ognuno dei piani giacciano **n** *delle rette e per ognuna delle rette passino k dei piani: rette e piani formanti dunque una configurazione (x_k, y_n). E si suppongano inoltre soddisfatte le due condizioni:*

(I) *se due delle x rette stanno in un piano, questo sia un piano della configurazione, epperò contenga altre $n-2$ delle rette;*

(II) *se una delle x rette ed uno degli y piani non si appartengono, il loro punto d'incontro giaccia sopra una delle n rette poste sul piano.*

Accennati brevemente i casi, di scarso interesse, in cui n o k abbiano il valore 1 o il valore 2, in questa Nota comunico alcune osservazioni generali sulle configurazioni testè definite, e dimostro che le rette di una tale configurazione appartengono tutte ad una superficie d'ordine n [2].

[1] Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1916.

[2] Di superficie contenenti un numero finito di rette semplici si è occupato il sig. Affolter in due lavori: *Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung*, Math. Ann., Bd. 27 (1886), pag. 277; Bd. 29 (1887), pag. 1, nel primo dei quali si tratta delle configurazioni qui considerate. L'Autore però parte senz'altro dalla presupposizione che esista una superficie algebrica, la quale contenga un numero finito di rette presen-

In una Nota successiva proverò che per $n=3$ sono possibili soltanto i due casi ricordati in principio, dovuti alle superficie del terz'ordine.

Delle superficie che s'incontrano per $n>3$, e delle estensioni agli iperspazii, spero di potermi occupare tra breve.

1. Anzitutto si ha, com'è ovvio,

$$kx = ny .$$

Una seconda relazione tra i numeri x, y, n, k si deduce dalle ipotesi (I) e (II). Infatti, per la (I), ognuna delle x rette ne taglia altre $k(n-1)$, situate ad $n-1$ ad $n-1$ sui k piani passanti per la retta. Considerando poi uno qualunque degli y piani, per ciascuna delle sue n rette passano altri $k-1$ piani, ognuno dei quali contiene altre $n-1$ rette. Per la (II) si ottengono così tutte le rette della configurazione, epperò

$$(n-1) \,.\, n(k-1) + n = x .$$

Con questa e la precedente, risultano le due formole

$$x = n[(n-1)(k-1)+1] , \tag{1}$$
$$y = k[(n-1)(k-1)+1] . \tag{2}$$

I casi, in cui l'uno o l'altro dei numeri k, n ha il valore 1 o il valore 2, si trattano subito, sia direttamente, sia col mezzo delle (1) e (2).

Se $k=1$, segue $x=n$, $y=1$, e la configurazione consta di un unico piano e di un numero qualunque di rette tracciate su esso.

Se $k=2$, si ha $x=n^2$, $y=2n$, e la configurazione è formata da due gruppi di n piani ciascuno, e dalle n^2 rette in cui i piani dell'un gruppo incontrano i piani dell'altro.

Per $n=1$, si ha $x=1$, $y=k$, e la configurazione si riduce ad una sola retta e ad un numero qualunque di piani passanti per essa.

Se $n=2$, segue $x=2k$, $y=k^2$: supposto $k>2$ per non ricadere in casi precedenti, la configurazione consta di $2k$ generatrici di una superficie del second'ordine, di cui k appartenenti all'una schiera e k all'altra, e dei k^2 piani che sono determinati dalle generatrici dell'un gruppo con quelle dell'altro.

Nel seguito potremo dunque supporre

$$n \geq 3 \;,\; k \geq 3 \;, \quad \text{epperò} \quad x \geq 15 \;,\; y \geq 15 . \tag{3}$$

2. Siano $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ le rette della configurazione contenute in un piano π_1 di questa. Per ciascuna di esse passano altri $k-1$ piani della

tanti una configurazione di quella natura, e si limita ad alcune proprietà relative soprattutto a diversi aggruppamenti che si possono formare con le rette ed i piani della configurazione.

configurazione, sicchè, contando anche π_1, si hanno in tutto $n(k-1)+1$ piani distinti della medesima. Questo numero non può dunque superare y; ma non può nemmeno essergli eguale, perchè se si avesse

$$n(k-1)+1 \geq y,$$

per la (2) seguirebbe l'assurdo

$$(n-1)(k-1)^2 \leq 0.$$

Ciò significa che, *se si fissa un piano qualunque della configurazione, esiste qualche altro piano di essa che non ha in comune col primo alcuna retta della configurazione.*

Sia π_2 uno dei piani non secanti π_1 in una retta della configurazione, e siano $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ le sue rette. Per la proprietà (II), ognuna di queste deve secare una delle rette di π_1. Se ad esempio a_{21} incontra a_{11}, la a_{22} non potrà essa pure incontrare a_{11}, altrimenti a_{11}, secando (per ipotesi, in punti distinti) due rette di π_2, sarebbe comune ai piani π_1 e π_2. Si può dunque supporre ad es. che $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ taglino risp. $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$.

Per la proprietà (I), i piani

$$\sigma_1 \equiv a_{11}\, a_{21}\,, \quad \sigma_2 \equiv a_{12}\, a_{22}\,, \ldots, \quad \sigma_n \equiv a_{1n}\, a_{2n}$$

appartengono alla configurazione, quindi ciascuno contiene altre $n-2$ rette di essa, che diremo ordinatamente

$$\begin{array}{l} a_{31}\,, a_{41}\,, \ldots, a_{n1}\,; \\ a_{32}\,, a_{42}\,, \ldots, a_{n2}\,; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{3n}\,, a_{4n}\,, \ldots, a_{nn}\,. \end{array}$$

Tutte queste rette sono distinte tra loro e dalle precedenti contenute in π_1 e π_2. Infatti, in primo luogo, se per es. a_{31} coincidesse con a_{22}, i piani π_2 e σ_1, avendo in comune anche la retta a_{21}, coinciderebbero, quindi π_1 e π_2 avrebbero in comune la retta a_{11}. In secondo luogo, se p. es. a_{31} e a_{32} fossero una medesima retta, questa, tagliando a_{11} e a_{12}, giacerebbe su π_1, e tagliando a_{21} e a_{22}, giacerebbe su π_2, sicchè π_1 e π_2 si taglierebbero in una retta della configurazione.

Dico inoltre che, fissati due qualunque dei piani $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, ognuna delle $n-2$ nuove rette ottenute sull'uno taglia una (sola) delle $n-2$ nuove rette ottenute sull'altro. Ad es. la a_{31} deve incontrare una delle a_{32}, $a_{42}, \ldots, a_{n2}$. Infatti, in caso contrario, per la proprietà (II), essa taglierebbe σ_2 o su a_{12} o su a_{22}, p. es. su a_{12}. Ma allora a_{31}, tagliando pure a_{11}, starebbe sul piano π_1, quindi coinciderebbe con una delle $a_{13}, a_{14}, \ldots, a_{1n}$, ciò che dimostrammo assurdo. Non può poi accadere che a_{31} incontri due

rette di σ_2, altrimenti starebbe su σ_2, e, contro ciò che precede, coinciderebbe con una delle rette della configurazione poste in questo piano.

Tenuto conto delle (3), la configurazione possiede certamente, oltre le n^2 rette fin qui considerate, altre rette, cioè si ha $x > n^2$. Poichè se fosse $x = n^2$, dalla (1) deriverebbe l'assurdo

$$(n-1)(k-2) = 0 .$$

3. Le osservazioni precedenti dànno modo di ordinare le rette della configurazione in uno schema, a cui si può ricorrere con vantaggio nello studio della configurazione stessa [1].

Anzitutto è lecito supporre che nello specchio

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

nel quale le rette di ogni verticale, come pure quelle delle due prime orizzontali, sono in un piano, la a_{31} tagli ciascuna delle $a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}$; e così a_{41} tagli ciascuna delle $a_{42}, a_{43}, \dots, a_{4n}$; ...; e a_{n1} tagli ciascuna delle $a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{nn}$.

Presa poi a_{21}, gli altri $k-2$ piani che, oltre a π_2 e σ_1, passano per essa contengano ancora rispettivamente le $n-1$ rette

$$\begin{array}{llll} a_{22}^{(1)} , & a_{23}^{(1)} , & \dots , & a_{2n}^{(1)} \; ; \\ a_{22}^{(2)} , & a_{23}^{(2)} , & \dots , & a_{2n}^{(2)} \; ; \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{22}^{(k-2)} , & a_{23}^{(k-2)} & \dots\dots & a_{2n}^{(k-2)} \; ; \end{array}$$

e le denominazioni di tali rette su ciascun piano siano scelte in modo che, conformemente alla proprietà (II), $a_{22}^{(i)}, a_{23}^{(i)}, \dots, a_{2n}^{(i)}$ incontrino rispettivamente $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ $(i = 1, 2, \dots, k-2)$. Nel piano $a_{2j}^{(i)} a_{1j}$ $(i = 1, 2, \dots, k-2 ; j = 2, 3, \dots, n)$ le rette rimanenti della configurazione siano $a_{3j}^{(i)}$, $a_{4j}^{(i)}, \dots, a_{nj}^{(i)}$, essendo i loro simboli scelti in modo che le rette stesse incontrino rispettivamente $a_{31}, a_{41}, \dots, a_{n1}$.

[1] Esso mi ha già servito a darmi tutte le configurazioni possibili per $n = 4$, e alcune di quelle rispondenti a $k = 3$.

Risultano così, in aggiunta allo specchio (4), altri $k-2$ specchi, di cui uno qualunque è

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}^{(i)} & a_{23}^{(i)} & \cdots & a_{2n}^{(i)} \\ a_{31} & a_{32}^{(i)} & a_{33}^{(i)} & \cdots & a_{3n}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(i)} & a_{n3}^{(i)} & \cdots & a_{nn}^{(i)} \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-2),$$

ed in essi, come in (4), mentre le rette di ciascuna verticale e quelle delle prime due orizzontali appartengono ad un piano, le rette che nella terza, quarta, ..., ultima orizzontale seguono rispettivamente $a_{31}, a_{41}, \ldots, a_{n1}$ si appoggiano appunto rispettivamente a queste ultime. Sono così poste in evidenza, nelle singole orizzontali di posti $3, 4, \ldots, n$ di (4) e (5), tutte le rette della configurazione che, insieme con quelle del piano σ_1, incontrano rispettivamente $a_{31}, a_{41}, \ldots, a_{n1}$.

A completare il quadro delle rette della configurazione mancano soltanto le rette che sono contenute negli altri piani (oltre che π_1 e σ_1) passanti per a_{11}.

Ben inteso, perchè la configurazione possa dirsi determinata, occorrerà in ogni caso particolare conoscere quali siano gli incontri delle sue rette, da aggiungersi a quelli che già furono indicati.

4. *Le rette della configurazione appartengono tutte ad una* (**sola**) ***superficie*** *irriducibile, non rigata, d'ordine n.*

Dimostriamo anzitutto che per le n^2 rette del quadro (4) passa un fascio di superficie d'ordine n. Tenendo conto degli incontri di quelle rette, il passaggio d'una superficie d'ordine n per le $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ importa (al più)

$$(n+1) + n + \cdots + 3 + 2 = \binom{n+2}{2} - 1$$

condizioni lineari; il successivo passaggio per $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ ne importa (al più) altre

$$n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \binom{n+1}{2};$$

il successivo passaggio per $a_{31}, a_{41}, \ldots, a_{n1}$ (al più) altre

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 = \binom{n}{2} - 1,$$

ed il successivo passaggio per $a_{32}, a_{42}, \ldots, a_{n2}$ (al più) altre

$$(n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 = \binom{n-1}{2}.$$

Tenendo poi conto che negli $n-2$ gruppi

$$a_{33}, a_{43}, \dots, a_{n3}\ ;\ a_{34}, a_{44}, \dots, a_{n4}\ ; \dots ;\ a_{3n}, a_{4n}, \dots, a_{nn}$$

ogni retta di ciascun gruppo deve incontrare una (sola) retta di ogni altro gruppo, risulta che i passaggi della superficie per le rette di questi gruppi importano altre condizioni al più risp. in numero di

$$(n-3)+(n-4)+\cdots+1=\binom{n-2}{2},$$

$$(n-4)+(n-4)+\cdots+1=\binom{n-3}{2},$$

. . . .

$$2+1=\binom{3}{2},$$

$$1=\binom{2}{2}.$$

Sommando tutti i numeri trovati, risulta che il numero delle condizioni imposte è al più

$$\binom{n+3}{3}-2.$$

Ma è chiaro che il sistema lineare di superficie così determinato non può avere dimensione superiore all'unità, quindi è un fascio.

Se ora fissiamo una qualunque delle rette della configurazione escluse dal quadro (4), per la proprietà (II) essa incontra n rette di questo quadro, situate ad una ad una sui piani $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Perciò esiste nel fascio precedente una ed una sola superficie che passa anche per quella retta; ed è facile verificare, tenendo conto della proprietà (II), che alla superficie appartengono anche le rimanenti rette della configurazione.

Che la superficie non possa decomporsi in altre due F'. F'', di ordini n', n'' (con $n'+n''=n$), si desume da ciò, che in caso contrario ad es. a_{11} apparterrebbe ad F' e non ad F''. Ma allora anche $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$, tagliando a_{11} e non le altre rette $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ del piano π_1, giacerebbero su F', il che è assurdo.

La superficie, finalmente, non è rigata: chè, in tal caso, delle n rette contenute in uno qualunque degli y piani, una almeno sarebbe una direttrice, e la superficie si spezzerebbe.

5. Il teorema del num. precedente conduce facilmente (¹) ad un limite superiore di k, ricordando (²) che una superficie d'ordine n non può conte-

(¹) Cfr. Affolter, primo lavoro citato, pag. 283.

(²) Clebsch, *Zur Theorie der algebraischen Flächen*, Giorn. di Crelle, Bd. 58 (1861), pag. 106. Cfr. pure Salmon-Fiedler, *Anal. Geometrie des Raumes*, II Theil, 3ª edizione, Leipzig, 1880, pag. 634.

nere più di $n(11n-24)$ rette senza essere rigata. Per la (1) si ottiene infatti

$$k \leq 2\left(6 - \frac{7}{n-1}\right),$$

epperò $k \leq 11$. Più precisamente, per i valori

$$3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9\,,10\,,11\,,12\,,13\,,14$$

di n, i massimi valori di k sono rispettivamente

$$5\,,7\,,8\,,9\,,9\,,10\,,10\,,10\,,10\,,10\,,10\,,10\,,$$

mentre per $n \geq 15$ il massimo valore di k è 11.

Matematica. — *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti nell'analisi ad n dimensioni di Grassmann.* Nota II di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1]

Nel 1° caso, $u' = 0, e + x'i + y'j + z'k$, è considerato come posizione limite di un punto, e

$$\begin{aligned} |u &= 0.|e + x'|i + y'|j + z'|k \\ &= 0.ijk - x'ejk - y'eki - z'eij \end{aligned}$$

come posizione limite di un tripunto; nel 2° caso, invece,

$$u' = x'i + y'j + z'k$$

è *dato* nel trivettore ijk e

$$|u' = x'|i + y'|j + z'|k = x'jk + y'ki + z'ij$$

è un *bivettore*.

3. Dalla definizione che venne data per $\nabla_\Omega U$, $G_\Omega U$ segue, come venne già osservato, sia U scalare sia estensiva, che ∇_Ω e G_Ω sono *distributivi* rispetto all'addizione. Che cosa avviene pel ∇_Ω e del G_Ω di un prodotto? La risposta riesce più facile cercandola per gli hamiltoniani e gradienti elementari in grazia delle (5″) e (6″) della *Npr.*

Devonsi distinguere diversi casi, e questi sono i seguenti:

a) 1° caso. *Le funzioni* U, V *che compongono il prodotto* U . V *sono entrambe scalari.* In tal caso si ha, evidentemente,

$$\frac{\partial UV}{\partial \omega_i}\,|E_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_i}\,V + U\,\frac{\partial V}{\partial \omega_i}\right)|E_i = \frac{\partial U}{\partial \omega_i}\,|E_i\,.\,V + \frac{\partial V}{\partial \omega_i}\,|E_i\,.\,U\,;$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

epperò, moltiplicando per $(-1)^{\rho\rho'}$ e sommando da $i=1$ ad $i=m$, si ha pure:

$$\nabla_\Omega(\mathrm{UV}) = \nabla_\Omega \mathrm{U}.\mathrm{V} + \mathrm{U}.\nabla_\Omega \mathrm{V}. \tag{20}$$

In modo consimile si avrà pure:

$$\mathrm{G}_\Omega(\mathrm{UV}) = \mathrm{G}_\Omega \mathrm{U}.\mathrm{V} + \mathrm{U}.\mathrm{G}_\Omega \mathrm{V}\,; \tag{21}$$

vale a dire, *nel caso in esame* ∇_Ω e G_Ω *si comportano come se fossero derivate ordinarie.*

b) 2° caso. *Una delle funzioni* U, V, *per es.* U, *è scalare, e l'ultra* V *estensiva d'ordine* σ. Questo caso si scinde in due: α) quello in cui $\sigma+\rho' \leq n+1$; β) quello in cui $\sigma+\rho' \geq n+1$. Siccome in entrambi questi sotto-casi

$$\frac{\partial \mathrm{UV}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i}\mathrm{V} + \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i}\right)|\,\mathrm{E}_i = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i}.\mathrm{V}\,|\,\mathrm{E}_i + \mathrm{U}.\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i, \tag{22}$$

così, quando $\sigma+\rho' \leq n+1$, essendo

$$\mathrm{V}\,|\,\mathrm{E}_i = (-1)^{\sigma\rho'}\,|\,\mathrm{E}_i.\mathrm{V},$$

sarà

$$\frac{\partial \mathrm{UV}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i = (-1)^{\sigma\rho'}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i.\mathrm{V} + \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i\,;$$

e quando $\sigma+\rho' \geq n+1$, essendo

$$\mathrm{V}\,|\,\mathrm{E}_i = (-1)^{\rho\sigma'}\,|\,\mathrm{E}_i.\mathrm{V},$$

sarà

$$\frac{\partial \mathrm{UV}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i = (-1)^{\rho\sigma'}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i.\mathrm{V} + \mathrm{U}.\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i.$$

Sommando da $i=1$ ad $i=m$, dopo aver moltiplicato per $(-1)^{\rho\rho'}$, si avrà:

$$\nabla_\Omega(\mathrm{UV}) = (-1)^{\rho'\sigma}\nabla_\Omega \mathrm{U}.\mathrm{V} + \mathrm{U}.\nabla_\Omega \mathrm{V} \tag{23}$$

quando $\sigma+\rho \leq n+1$, e

$$\nabla_\Omega(\mathrm{UV}) = (-1)^{\rho\sigma'}\nabla_\Omega \mathrm{U}.\mathrm{V} + \mathrm{U}.\nabla_\Omega \mathrm{V} \tag{24}$$

quando $\sigma+\rho' \geq n+1$.

Analogamente, per essere

$$\frac{\partial \mathrm{UV}}{\partial \omega_i}\mathrm{E}_i = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i}\mathrm{V} + \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i}\right)\mathrm{E}_i = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i}\cdot \mathrm{V}\mathrm{E}_i + \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i}\mathrm{E}_i\,; \tag{22'}$$

siccome, corrispondentemente ai casi $\sigma + \varrho \leq n + 1$ e $\sigma + \varrho \geqq n + 1$, si ha $VE_i = (-1)^{\varrho\sigma} E_i V$ e $VE_i = (-1)^{\varrho'\sigma'} E_i V$, così sarà:

$$\frac{\partial UV}{\partial \omega_i} E_i = (-1)^{\varrho\tau} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} E_i . V + U . \frac{\partial V}{\partial \omega_i} E_i$$

se $\sigma + \varrho \leq n + 1$, e

$$\frac{\partial (UV)}{\partial \omega_i} E_i = (-1)^{\varrho'\sigma'} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} E_i . V + U . \frac{\partial V}{\partial \omega_i} E_i$$

se $\sigma + \varrho \geqq n + 1$.

Sommando da $i = 1$ ad $i = m$, si avrà in fine:

$$G_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho\sigma} G_\Omega U . V + U . G_\Omega V \tag{25}$$

quando $\sigma + \varrho \leq n + 1$, e

$$G_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho'\sigma'} G_\Omega U . V + U . G_\Omega V \tag{26}$$

quando $\sigma + \varrho \geqq n + 1$. Così, a parte il segno del primo termine, la regola rimane come nel 1° caso.

c) 3° caso. *Le funzioni* U, V *sono entrambe estensive, e (supp.) d'ordine* σ, τ *rispettivamente.* Anche questo caso si scinde in due sotto-casi: α) quello nel quale $\frac{\partial U}{\partial \omega_i} V | E_i$, $U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} | E_i$ siano prodotti *puri*; il che avviene per entrambi nelle medesime circostanze, perchè $\frac{\partial U}{\partial \omega_i}$ e $\frac{\partial V}{\partial \omega_i}$ sono, come U, V funzioni estensive di ordine σ, τ rispettivamente, cioè quando si abbia

$$\sigma + \tau + \varrho' \leq n + 1 \quad \text{o} \quad \sigma + \tau + \varrho' \geqq 2(n + 1); \tag{27}$$

β) quello nel quale i suddetti prodotti siano *misti*.

Nel sottocaso α) si può scrivere la (22), col nuovo significato per la U; epperò, ragionando come si fece per arrivare alle (23), (24), si trova, allorchè si verifichino le (27), corrispondentemente:

$$\nabla_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho'\tau} \nabla_\Omega U . V + U . \nabla_\Omega V \tag{23'}$$

$$\nabla_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho\tau'} \nabla_\Omega U . V + U . \nabla_\Omega V . \tag{24'}$$

Analogamente, se

$$\sigma + \tau + \varrho \leq n + 1, \quad \text{o} \quad \sigma + \tau + \varrho \geqq 2(n + 1),$$

si potrà scrivere la (22'), e quindi pure le analoghe delle (25), (26), cioè le

$$G_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho\tau} G_\Omega U . V + U . G_\Omega V \tag{25'}$$

$$G_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho'\tau'} G_\Omega U . V + U . G_\Omega V . \tag{26'}$$

Dalle (23'), (24'), (25'), (26') si scorge che, nel sottocaso α), la U si comporta come se fosse una funzione scalare.

[Per dare un esempio semplice che servac ontemporaneamente di verifica per qualcuna delle formule precedenti, supponiamo che U, V siano due bivettori, nel trivettore ordinario ijk, di cui nell'es. 2, e); e si abbia

$$(28)\qquad U = u.jk + v.ki + w.ij \quad , \quad V = X.jk + Y.ki + Z.ij.$$

Sia poi $\Omega = x.i + y.j + z.k$ un vettore rispetto al quale si voglia l'hamiltoniano del prodotto UV. Nel caso presente è: $n+1=3$, $\sigma=2$, $\sigma'=1$, $\tau=2$, $\tau'=1$, $\varrho=1$, $\varrho'=2$; per cui è pure: $\sigma+\tau+\varrho'= = 2+2+2=2.3=2(n+1)$, conforme alla (27) a dritta. Ne segue che la formula (24') è da applicarsi; e si avrà:

$$(29)\qquad \nabla_\Omega(UV) = \nabla_\Omega U.V + U.\nabla_\Omega V.$$

Ora $\nabla_\Omega U = -\nabla_\Omega u.jk - \nabla_\Omega v.ki - \nabla_\Omega w.ij$, secondo la formula (19) della *Npr.* perchè $\varrho'+\sigma > n+1$, e $(-1)^{\rho\sigma'} = -1$. Inoltre, poichè $(-1)^{\rho\rho'} = +1$, è pure [cfr. form. (12) della N II]:

$$(30)\qquad \nabla_\Omega \alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x}|i + \frac{\partial\alpha}{\partial y}|j + \frac{\partial\alpha}{\partial z}|k \quad \text{per} \quad \alpha = u, v, w;$$

da cui, visto essere $|i = jk$, $|j = ki$, $|k = ij$, e

$$(31)\ jk.ki = -ki.jk = k \ , \ ij.jk = -jk.ij = j \ , \ ki.ij = -ij.ki = i$$

segue, per Δ_Ω, l'espressione

$$(32)\qquad \nabla_\Omega U = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) k,$$

e per $\nabla_\Omega V$ l'espressione analoga

$$(33)\qquad \nabla_\Omega V = \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) i + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) k.$$

Se indichiamo provvisoriamente con A, B, C i coefficienti di i, j, k nella (32) e con D, E, F i coefficienti analoghi nella (33) e teniamo presente pure che $i|i = |i.i = 1$, $j|j = |j.j = 1$, $k|k = |k.k = 1$, troviamo

$$\nabla_\Omega U.V = AX + BY + CZ \quad , \quad U.\nabla V = uD + vE + wF,$$

e quindi

$$(34)\qquad \nabla_\Omega (UV) = AX + BY + CZ + uD + vE + wF.$$

Se ora facciamo il prodotto UV, pel quale saranno tenute presenti le (31), troviamo

$$UV = (vZ - wY)\, i + (wX - uZ)\, j + (uY - vX)\, k;$$

e per prendere l'hamiltoniano di questa espressione, si deve osservare che, essendo ora $\sigma = 1 = \varrho$, si deve applicare la (18) della *Npr.*; la quale dà, al 2° membro;

$$\nabla_\Omega(vZ - wY)\,i + \nabla_\Omega(wX - uZ)\,j + \nabla_\Omega(uY - vX)\,k\,;$$

per cui [(12) della N II] essendo $(-1)^{\rho\rho'} = +1$ e

$$\nabla_\Omega(vZ - wY)\,.\,i = \frac{\partial v}{\partial x}\,Z - \frac{\partial w}{\partial x}\,Y + v\,\frac{\partial Z}{\partial x} - w\,\frac{\partial Y}{\partial x}$$

in grazia delle $i|i = 1$, $i|k = 0$, $i|j = 0$, con due altre analoghe, si troverà, dopo conveniente ordinamento:

$$\nabla_\Omega(UV) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{dz}\right)X +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)Y + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)Z + \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)u + \cdots;$$

cioè appunto le (34)].

Il trattamento del sottocaso β), per la discussione che richiede, ed il caso non ancora enunciato nel quale con ∇_Ω e G_Ω si operi sopra *prodotti interni*, non possono trovar posto che in ulteriori comunicazioni.

Matematica. — *Derivazione ad indice qualunque.* Nota II della dott.ssa ANGELA MARIA MOLINARI, presentata dal Corrispondente E. ALMANSI [1].

Nella Nota precedente, sotto lo stesso titolo, ho parlato del problema di definire, in forma utile e coerente con le regole del calcolo, l'operazione D^n, quando D rappresenti l'ordinaria derivazione $\frac{d}{dx}$, e l'indice n sia un numero qualunque. Ho accennato alle soluzioni proposte dai diversi autori che hanno considerato il problema, da Leibniz in poi, ho esposto il concetto che la definizione di D^n, per quanto arbitraria, deve, per rendersi praticamente utile, essere tale da soddisfare ad un insieme di condizioni più restrittivo di quelle verificate dalle varie formule proposte. In particolare è indeclinabile la condizione $D^m D^n = D^{m+n} = D^n D^m$, senza di che qualunque definizione proponibile si riduce ad una formula d'interpolazione senza reali vantaggi per il calcolo.

Distinzione però deve farsi fra la trattazione del *valore principale*, e quella del *termine complementare* (contenente le eventuali costanti arbitrarie) che si aggiunge al primo per ottenere il valore generale.

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1916.

In questa Nota espongo una formula atta a definire un *valore principale* che soddisfi le condizioni imposte.

L'operando $f(x)$ sia funzione di variabile reale, data nel campo $(-\infty, +\infty)$, e integrabile (nel senso di Lebesgue) in ogni intervallo finito, salvo aggiungere, di volta in volta, le condizioni opportune affinchè le formule che si applicano convergano ed i passaggi siano leciti.

Per n negativo assumerò, come valore principale, quello dato dalla formula

$$D^{-n} f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(\xi)\, d\xi \,, \tag{1}$$

che si ricaverebbe da quella di Letnikof precisando $x_0 = -\infty$; per $n = 0$ porrò identicamente

$$D^0 f(x) = f(x) \,; \tag{2}$$

per n positivo eguale a $(-m + N)$, dove N è il minimo intero non inferiore ad n, assumerò infine

$$D^n f(x) = \frac{d^N}{dx^N} \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)} f(\xi)\, d\xi \,. \tag{3}$$

Queste formule sono indipendenti da sviluppi particolari di $f(x)$ in serie o sotto altra forma. Quando i secondi membri non convergono, ma sono indeterminati, si dirà che la rispettiva D^n (valore principale) non esiste; la convergenza della (1) per $n \geq 1$ si ha quando la $f(x)$ è integrabile in ogni intervallo finito e si annulla inoltre di ordine sufficiente per $x = -\infty$; per la (3) occorre la derivabilità, una o più volte, ma, se $n < 1$, basta una condizione meno restrittiva. Si rileverà facilmente, per confronto con quello che accade quando n è intero, che queste restrizioni non rappresentano nulla di artificioso che sia dovuto a peculiarità della formula scelta (ciò che avviene invece quando $f(x)$ viene sviluppato in serie di Fourier, o di Taylor, etc., e il D^n si definisce operando termine a termine).

Prima di verificare se le formule qui preposte soddisfano alle condizioni volute, esporrò due lemmi.

Lemma I. — Supponiamo note le funzioni G_1, G_2 integrabili, anche in valore assoluto (esse ed i loro quadrati) e fra limiti infiniti, tali che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \, |G_1| \int_{-\infty}^{+\infty} |G_3| \, d\theta$$

risulti convergente. Ciò posto consideriamo l'integrale doppio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \, G_1(t-\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau-\theta)\, f(\theta)\, d\theta \,,$$

e dimostriamo che è eguale all'altro

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_3(t-\theta)\, f(\theta)\, d\theta$$

dove

$$G_3(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\theta - \vartheta)\, G_2(\vartheta)\, d\vartheta\,.$$

Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, G_1(t-\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau-\theta)\, f(\theta)\, d\theta$$

è uguale, poichè in questo caso è permesso commutare l'ordine delle integrazioni [1], a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\theta\, f(\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(t-\tau)\, G_2(\tau-\theta)\, d\theta\,,$$

e, ponendo $\tau = \theta + \vartheta$,

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta\, f(\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(t-\theta-\vartheta)\, G_2(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, d\theta \cdot G_3(t-\theta)\,.$$

Lemma II. — Come corollario al teorema precedente si può considerare il caso che G_1, G_2 si annullino al di là di determinati valori dell'argomento; avremo allora

$$\int_{-\infty}^{t} d\tau\,.\, G_1(t-\tau) \int_{-\infty}^{\tau} G_2(\tau-\theta)\, d\theta = \int_{-\infty}^{t} f(\theta)\, G_3(t-\theta)\, d\theta$$

dove

$$G_3(\theta) = \int_{-\infty}^{0} G_1(\theta-\vartheta)\, G_2(\vartheta)\, d\vartheta\,.$$

Premessi i due lemmi passiamo all'effettiva verifica delle condizioni proposte: assicuriamoci, cioè, se il $D^n f(x)$ definito dalle formule (1), (2), (3), vi soddisfa realmente.

Prima condizione. — Riguarda l'ampiezza del campo funzionale di applicabilità ed è evidentemente soddisfatta entro larghi limiti.

Seconda condizione. — La formula sia possibilmente analitica in n. Dalla struttura delle formule, e da teoremi noti, si può asserire che in *casi molto generali* anche questa condizione è verificata, senza insistere per ora in una più minuta investigazione.

[1] Cfr. Fubini, *Sugli integrali multipli*. Rend. Lincei (1907). vol. XVI, pp. 608-614, *Sugli integrali doppî*. Ibid. (1913), vol. XXII, pp. 584-589.

T e r z a   c o n d i z i o n e. — D^n si riduca alla derivazione e integrazione ordinaria per n intero.

Per il caso della derivazione ciò è evidente: basta dunque verificare per n negativo.

Si ha dalla formula:

$$D^{-1}f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^0}{\Gamma(1)} f(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi$$

$$D^{-2}f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^1}{\Gamma(2)} f(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{x} \frac{x-\xi}{1!} f(\xi)\, d\xi :$$

eseguiamo un' integrazione per parti, assumendo $(x-\xi)$ come fattore finito e $\int_{-\infty}^{\xi} f(\theta)\, d\theta$ come fattore differenziale. Avremo:

$$\int_{-\infty}^{x} (x-\xi) f(\xi)\, d\xi = \left[(x-\xi) \int_{-\infty}^{\xi} f(\theta)\, d\theta \right]_{\xi=-\infty}^{\xi=x} + \left[\left\{ \int_{\xi_1}^{\xi} f(\theta) d\theta \right\} d\xi \right]_{\xi_1=-\infty}^{\xi_1=x}$$

$$\int_{-\infty}^{x} (x-\xi) f(\xi)\, d\xi = \qquad 0 \quad + \qquad \int_{-\infty}^{x} d\xi \int_{-\infty}^{\xi} f(\theta)\, d\theta ;$$

in modo analogo si verificano i successivi casi.

Q u a r t a   c o n d i z i o n e. — D^n, definito c. s., sia operazione distributiva, cioè valga la relazione

$$D^n(a\varphi + b\psi) = aD^n\varphi + bD^n\psi ;$$

questa proprietà si ricava subito dalla struttura della formula data.

Q u i n t a   c o n d i z i o n e. — Resta l'ultima condizione

$$D^{m+n}f(x) = D^m D^n f(x) .$$

I C a s o: i n d i c i   e n t r a m b i   n e g a t i v i $-m$, $-n$. — Noi possiamo scrivere

$$D^{-m} D^{-n} f(x) = D^{-m} \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(\xi)\, d\xi$$

$$D^{-m} D^{-n} f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\, d\xi \int_{-\infty}^{\xi} \frac{(\xi-\theta)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(\theta)\, d\theta$$

e, per il lemma II,

$$D^{-m} D^{-n} f(x) = \int_{-\infty}^{x} G_3(x-\theta) f(\theta)\, d\theta ,$$

dove

$$G_3(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\vartheta)^{m-1}}{\Gamma(m)} \frac{\vartheta^{n-1}}{\Gamma(n)}\, d\theta .$$

Poniamo $xy = \vartheta$

$$G_3(x) = \int_0^1 \frac{(x - yx)^{m-1}}{\Gamma(m)} \frac{(yx)^{n-1}}{\Gamma(n)} d(yx)$$

$$G_3(x) = \int_0^1 \frac{x^{m+n-1}(1 - y)^{m-1}}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} y^{n-1}\, dy$$

$$G_3(x) = \frac{x^{m+n-1}}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \beta(m\,,\,n)\,.$$

Ora

$$\beta(m\,,\,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,,$$

e quindi

$$G_3(x) = \frac{x^{m+n-1}}{\Gamma(m+n)}\,;$$

segue che

$$D^{-m}\,D^{-n}f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x - \theta)^{m+n-1}}{\Gamma(m+n)} f(\theta)\,d\theta = D^{-m-n}f(x)\,,$$

come dovevasi dimostrare.

II Caso: il primo indice positivo intero N, l'altro negativo qualunque — m. — Partiamo dalla formula (3); avremo subito

$$D^{N}\,D^{-m}f(x) = \frac{d^{N}}{dx^{N}} \int_{-\infty}^{x} \frac{(x - \xi)^{m-1}}{\Gamma(m)} f(\xi)\,d\xi\,,$$

ponendo $x - \xi = s$

$$D^{N}\,D^{-m}f(x) = \frac{d^{N}}{dx^{N}} \int_0^{\infty} \frac{s^{m-1}}{\Gamma(m)} f(x - s)\,ds \qquad \begin{cases} \xi = -\infty\,, & s = +\infty \\ \xi = x\,, & s = 0 \end{cases}$$

$$D^{N}\,D^{-m}f(x) = \int_0^{\infty} \frac{s^{m-1}}{\Gamma(m)} f^{N}(x - s)\,ds = D^{-m}\,D^{N}f(x)\,.$$

Quest'ultimo passaggio è lecito sotto condizioni latissime per $f(x)$, purchè, naturalmente, resti sottinteso che $f^{N}(x)$ esista. Si dovrà infatti richiedere che l'ultima formula possa essere integrata (fra limiti finiti) sotto il segno integrale. Condizione sufficiente, non necessaria, è la convergenza dell'integrale

$$\int^{x} dx \int_0^{\infty} \left| \frac{s^{m-1}}{\Gamma(m)} f^{N}(x - s) \right| ds\,,$$

e altre condizioni meno restrittive che si possono enunciare in base a ben noti criterii.

III Caso: indici m, n qualunque. — Indichiamo con M, N gli interi immediatamente superiori agli indici m, n e poniamo $m = -\mu + M$, $n = -\nu + N$, dove μ, ν sono compresi fra 0 ed 1. Avremo allora

$$D^m D^n f(x) = D^{-\mu+M} D^{-\nu+N} f(x),$$

e, in virtù del caso II, la cui validità è manifesta in base alla definizione,

$$\begin{aligned} D^{-\mu+M} D^{-\nu+N} f(x) &= D^{-\mu} D^M D^{-\nu} D^N f(x) \\ &= D^{-\mu} D^{-\nu} D^M D^N f(x) \\ &= D^{-\mu-\nu} D^M D^N f(x) \quad \text{(applicando il caso I)} \\ &= D^{-\mu-\nu} D^{M+N} f(x) \quad \text{(per le regole della derivazione ordinaria)} \end{aligned}$$

e finalmente

$$D^{-\mu+M} D^{-\nu+N} f(x) = D^{-\mu-\nu+M+N} f(x) \qquad \text{c. d. d.}$$

La regola $D^m D^n f(x) = D^{m+n} f(x)$ vale dunqne senza alcuna ipotesi restrittiva circa la natura di m, n. È da notarsi che questa proprietà era stata messa in dubbio, anzi si era già rilevato [1] che, con la maggior parte delle definizioni proposte, essa non era verificata, ciò che costituiva la principale delle obbiezioni contro l'uso delle definizioni medesime.

In una prossima Nota mi riservo di mostrare qualche esempio e qualche utile applicazione.

Fisica. — *Dispositivi per produrre correnti di altissima tensione e di senso costante atte all'alimentazione dei tubi per raggi X.* Nota II di O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, presentata dal Socio Blaserna [2].

Apparecchio per correnti continue.

Confrontiamo la forma della corrente primaria ottenuta con l'apparecchio sopra descritto per le correnti alternate (fig. 5 *a*), con quella che si osserva nel funzionamento del rocchetto di Ruhmkorff a interruttore e corrente primaria continua (fig. 5 *b*).

Si riconosce subito che mentre nel primo caso la forza elettromotrice secondaria durante l'intervallo AB è sempre dello stesso senso, poichè la corrente primaria è sempre discendente, nella seconda essa ha un senso costante solo nel breve tratto AB′, e all'istante B′ muta di senso. Ora nei

(1) Cfr. Hagen, *Synopsis der hoeheren Mathematik*, vol. III.
(2) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1916.

grandi regimi, come risulta da speciali ricerche da noi compiute, esplorando con mezzi adeguati la vera forma della corrente primaria e della corrente secondaria di alta tensione, avviene che questa sussiste ancora con intensità rilevante quando, dopo la breve pausa A′ B′ dalla rottura che l'ha generata, interviene in B′ la nuova chiusura. Ne risulta che l'onda *inversa* di chiusura tronca di colpo la corrente secondaria che era ancora attiva e riesce anche ad invertirla, dando luogo ai seguenti inconvenienti:

1°) La intensità media della corrente secondaria viene fortemente diminuita, poichè le manca il tempo di esplicarsi liberamente.

2°) L'energia ceduta al tubo dal secondario è anch'essa diminuita, poichè l'energia magnetica del nucleo viene sfruttata solo in parte, trovandosi esso già parzialmente magnetizzato al momento della nuova chiusura, per opera della corrente secondaria tuttora esistente.

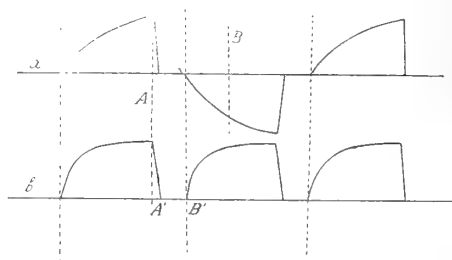



Fig. 5.

3°) La corrente primaria che si ristabilisce mentre ancora perdura la secondaria, trova, come si è detto, il ferro già magnetizzato da questa, e perciò raggiunge rapidamente il suo valore finale, conservandolo fino alla successiva rottura, ciò che abbassa in modo notevole il rendimento. È per questo che la salita della corrente primaria è più ripida nella fig. 2 che nella fig. 1.

4°) Infine prendono origine in B le correnti inverse, ciò che richiede l'impiego di apparecchi speciali per la loro eliminazione.

Tutti questi inconvenienti spariscono con il dispositivo per correnti alternate, poichè, come si vede dalla fig. 5*a*, in tal caso ogni chiusura magnetizza il nucleo a rovescio della precedente, e continua perciò nello stesso senso l'effetto induttivo dovuto alla precedente rottura. La corrente indotta secondaria si svolge così indisturbata, anzi esaltata dalla nuova chiusura nell'intero intervallo A B (fig. 5*a*).

Volendo raggiungere le stesse condizioni favorevoli anche con correnti continue, bisogna trasformare la corrente primaria dal tipo della fig. 5*b* a quello della fig, 5*a*. A ciò provvede lo stesso interruttore rotativo nel nuovo apparecchio per correnti continue.

Il rocchetto di induzione ha il primario costituito da due avvolgimenti eguali, eseguiti, a piacere, nello stesso senso o in senso opposto. Se sono in senso opposto vale lo schema della fig. 6; i capi opposti P′ e Q′ dei due avvolgimenti sono connessi tra loro e a un polo della sorgente di corrente continua.

L'interruttore, a dielettrico gassoso, è costituito, come nell'altro apparecchio, da quattro lamine isolate *a*, *b*, *c*, *d*, disposte su un cilindro; il duplice getto rotante di mercurio crea periodicamente una connessione tra due lamine contrapposte. Le due lamine *a*, *d*, sono connesse insieme e ad un polo N della sorgente; le lamine *b*, *c*, sono invece rilegate agli altri due capi liberi P e Q degli avvolgimenti primarî.

Quando il getto rotante di mercurio, che gira nel senso della freccia, trovasi nella posizione della figura, la corrente primaria percorre l'avvolgi-

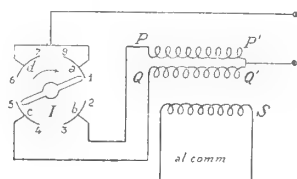



Fig. 6.

mento QQ′ ed è vicina a interrompersi. Avvenuta subito dopo l'interruzione, la corrente secondaria di rottura si stabilisce, e perdura indisturbata mentre il getto traversa lo spazio vuoto 1-2 da una parte e 5-6 dall'altra, nel qual tempo i due primarî sono del tutto interrotti, poichè non esiste il consueto condensatore ai poli dell'interruttore o del primario. Sopraggiunge la nuova chiusura in 2-6; ma questa, come si vede nello schema, si determina nell'altro circuito PP′ avvolto in senso opposto, e tende a magnetizzare il nucleo con polarità opposta alla precedente; cosicchè la corrente secondaria, non ancora esaurita, anzichè essere disturbata, viene esaltata dalla forza elettromotrice di chiusura che agisce in senso favorevole. Così il secondario può restar chiuso dalla posizione 1-5 del getto fino a poco prima che si raggiunga la posizione 3-7 della susseguente rottura, e ciò senza inconvenienti, non solo, ma con evidente vantaggio della quantità di elettricità messa in moto e della energia raccolta ai poli del secondario.

La susseguente rottura, in posizione 3-7, si compirà in senso inverso, e perciò nocivo, come è facile riconoscere.

Ma a raddrizzarla nel circuito di utilizzazione provvede il commutatore dell'alta tensione già descritto nell'apparecchio per correnti alternate. Esso invia nel tubo una corrente molto intensa e di senso perfettamente costante.

Nel caso in cui occorrano correnti non molto intense, ma di altissima tensione, una manovra molto semplice eseguibile con una manovella al quadro,

permette di ridurre a metà il numero delle interruzioni; dispone in serie i due avvolgimenti del primario, e inserisce il condensatore ai poli della interruzione, con che si ritorna al dispositivo classico (rocchetto e interruttore rotativo), per l'alimentazione dei tubi duri. La manovra già descritta serve per adattare il selettore alle nuove condizioni, facendogli assumere la sola funzione di eliminare le correnti inverse di chiusura. Le correnti secondarie così ottenute hanno una tensione altissima, atta al funzionamento di qualunque tubo da radioterapia; e mentre sono graduabili con grande finezza e regolarità, non possono mai raggiungere valori dannosi, anche se il tubo per qualunque causa diminuisse troppo di resistenza.

Apparecchio per correnti trifasi.

In tutti gli impianti radiologici finora esistenti, le reti urbane, quasi sempre disposte per distribuire energia sotto forma di correnti trifasi, vengono sfruttate per una fase sola, poichè gli apparecchi per produzione di raggi sono esclusivamente per corrente alternata semplice. Ciò crea talvolta delle difficoltà con le Società che distribuiscono energia elettrica, le quali si preoccupano giustamente degli squilibri nella rete in seguito alle saltuarie e rilevanti erogazioni di energia su una sola fase.

Per ovviare a questo inconveniente è stato ideato e costruito un apparecchio speciale che permette la utilizzazione diretta delle tre fasi, e che è perciò capace di fornire correnti secondarie abbastanza intense assorbendo correnti primarie di piccola entità e uniformemente distribuite sui tre cavi della presa.

In questo apparecchio vengono utilizzate solo le correnti di apertura, con un selettore rotante estremamente semplice, che elimina del tutto le nocive correnti indotte di chiusura. La potenza dell'apparecchio è alquanto minore di quella dell'altro per correnti alternate semplici sopra descritto; in un tubo normale da radiografie si raggiungono infatti solo da 30 a 40 milliampère. Questa intensità è ritenuta da tutti i radiologi come largamente bastevole alla radiografia intensiva e rapidissima, e perciò l'apparecchio può in molti casi, per gli altri suoi vantaggi, essere preferito anche a quello più potente per correnti alternate. E poichè esso fornisce un'energia al secondario paragonabile a quella che si ottiene dagli altri apparecchi prima esistenti per correnti alternate semplici, la sua superiorità su questi ultimi è indiscutibile, in quanto che essendo egualmente adatto agli usi della radiografia, conserva le qualità del rocchetto a interruttore per i tubi duri, cioè per la radioterapia profonda. Per questo scopo, poi, presenta, come vedremo, la possibilità di alimentare indipendentemente fino a tre tubi.

Per semplicità descriveremo solo la disposizione per il caso, che è il più frequente, in cui si abbiano a disposizione sulla rete stradale correnti

trifasiche, e si adoperi un motorino che compia un giro ogni due periodi. Il dispositivo si estende facilmente ai casi di correnti polifasiche qualunque.

Il motorino sincrono occorrente in questo dispositivo, di una piccola potenza meccanica, serve solo a trascinare l'interruttore rotativo (che è a getto di mercurio in seno a un dielettrico gassoso, e il selettore sul secondario.

L'interruttore porta sei lamine metalliche disposte lungo un cilindro, che vengono lambite dal getto diametrale rotante di mercurio, aspirato con i metodi soliti dal fondo della marmitta che circonda e chiude ermeticamente lo spazio dell'interruttore.

Le connessioni fra la conduttura, le lamine e il primario del rocchetto sono fatte come è indicato nella fig. 7.

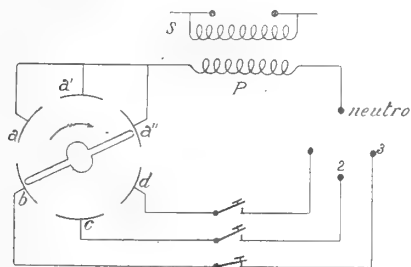



Fig. 7.

Le tre lamine a, a', a'', sono rilegate fra loro; esse si possono alzare e abbassare con una leva, in modo che, essendo la larghezza orizzontale variabile lungo l'altezza, permettono di modificare entro certi limiti la durata del contatto. Sono, inoltre, connesse con un estremo del primario, mentre l'altro estremo di questo è rilegato al neutro della linea. Le lamine b, c, d, sono invece rilegate alle tre fasi 1, 2, 3, della linea, in ordine conveniente.

Si riconosce subito che, a ogni chiusura fra due lamine opposte, la quale avviene ad ogni sesto di giro e perciò ad ogni terzo di periodo delle correnti, agli estremi del primario viene ad agire una forza elettromotrice sempre nella medesima fase.

Dopo un certo tempo la corrente, che traversa il primario sempre nel medesimo verso, viene interrotta bruscamente. E perciò nascerà nel secondario, sei volte a ogni giro, o tre volte a ogni periodo, una tensione di rottura di grande valore, e sempre nel medesimo senso. Se il circuito di utilizzazione presentasse un grande intervallo da essere superato da una scintilla lunga, il rocchetto che viene a funzionare nel primario come nel caso di correnti continue, darebbe correnti solo in un verso al secondario, poichè quelle di chiusura non son capaci di superare un grande intervallo di scintilla.

All'arresto delle onde di chiusura si può provvedere, o col solito artificio delle valvole, o meglio ancora con il particolare selettore (fig. 8) che passiamo a descrivere.

Esso è costituito da sei palline disposte ai vertici di un esagono iscritto in un cerchio orizzontale e sostenute da colonnine verticali isolanti. Il centro di questo cerchio trovasi sull'asse di rotazione del motore, che si prolunga in alto con un albero isolante, il quale porta un'asticina metallica orizzontale, diretta secondo un diametro del detto cerchio e che nella rotazione pone periodicamente in contatto, attraverso a una scintilla, due palline qualunque contrapposte.

Le connessioni sono disposte come nella figura: un polo del secondario del rocchetto è connesso permanentemente a un polo del circuito di utiliz-

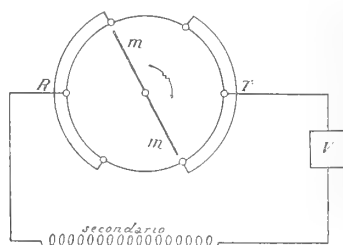



Fig. 8.

zazione, per esempio a un estremo del tubo per raggi X. L'altro estremo del rocchetto è rilegato alle palline R, R, R, fra loro connesse; e l'altro estremo del tubo alle palline T, T, T, anch'esse rilegate tra loro.

La posizione del cerchio rispetto all'asticella girevole *mm* è regolata una volta per tutte in modo che l'asticella sia in presenza di due palline contrapposte qualunque al momento della rottura. La connessione fra il tubo e il rocchetto sarà quindi soppressa nell'intervallo fra una rottura e una successiva, cioè nel periodo nocivo dell'onda di chiusura.

Le connessioni degli archi R e T fra loro e coi poli del rocchetto e del circuito utilizzatore, possono essere fatte come nella figura 8 che è semplicemente schematica.

Quando per la terapia profonda occorresse, per la contemporanea applicazione di raggi a più pazienti, alimentare insieme tre tubi, è possibile fare le connessioni come nella fig. 9.

I tre interruttori (fig. 7) inseriti nei tre cavi che fanno capo alle fasi permettono di eliminarne una qualunque, anche durante il funzionamento, rendendo così indipendenti i tre tubi, senza alcuna manovra sul selettore.

La soppressione di una o di due delle fasi può essere fatta, e riuscire comoda, anche quando il tubo in funzione è uno solo e ciò tanto nei lavori di radioterapia che in quelli di radioscopia.

Dove non esistesse la distribuzione con filo neutro, è facile formare un neutro artificiale, di conveniente potenza, chiudendo le tre fasi, comunicanti con le lamine *b*, *c*, *d*, su tre rocchetti, connessi a stella, e avvolti su tre colonne di lamiera di ferro magneticamente collegate come negli ordinarî trasformatori trifasi. Calcolando opportunamente le dimensioni del ferro e dei rocchetti, è possibile ottenere un apparecchio che assorbe senza carico

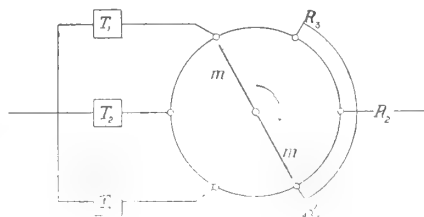



Fig. 9

una piccola potenza, ma permette, quando occorre, una conveniente erogazione di corrente lungo il filo derivato dal centro della stella e che funziona da neutro.

Mineralogia. — *La radioattività nei materiali endogeni della Sardegna con particolari rilievi minerogenetici* [1]. Nota di Aurelio Serra, presentata dal Corrispondente Federico Millosevich [2].

Mi pare di un certo interesse occuparmi, sotto il punto di vista radioattivo, dei materiali endogeni della Sardegna e pertanto rendo noti i risultati ottenuti, con la scorta delle attuali conoscenze di tal genere di ricerche, su una roccia *granito-porfirica* dalla cui attività evidentemente dipende quella delle acque termo-minerali che copiosamente l'attraversano. Le esperienze vennero eseguite con l'apparecchio del Sella di cui si determinò l'attività assoluta valutando la corrente di saturazione fra i due conduttori: per questo scopo si fece la graduazione in precedenza in volt e si stabilì opportunamente la capacità del collettore. La tecnica seguita fu quella che risulta magistralmente esposta nell'opera del Battelli: *La radioattività*. La roccia esaminata costituisce il colle di Castel D'Oria lungo il versante del Coghinas (Tempio). È un *granito porfirico* che fa passaggio al *porfido* che si mostra essenzialmente costituito da *quarzo feldspato* e lamine di *biotite* di color bruno verdastro. La descrizione particolareggiata troverà posto in altro studio.

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1916.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Sassari.

Grammi 105 di questa roccia ridotta in finissima polvere, diedero una dispersione di 5 volt per ora, sicchè, applicando la formula del Battelli $\alpha = \frac{c \cdot v}{p \cdot t}$ — nella quale α indica l'attività della sostanza, c la capacità del collettore, v la variazione di potenziale, p il peso, t il tempo — essendo la capacità dell'apparecchio di cm. 7, 8, si calcolò

$$\alpha = 0{,}00010.$$

Vennero fatte varie determinazioni con diversi campioni di roccia e si potè osservare che quelli che avevano un maggior contenuto di *biotite* manifestavano un'attività più spiccata, e si giunse così ad ottenere un valore massimo

$$\alpha = 0{,}0002$$

rispondente ad una dispersione di 11 volt per ora. Ciò m'indusse a supporre che la radioattività fosse dovuta alla presenza di questo minerale. Allo scopo di accertarmene, ne isolai accuratamente una certa quantità che sciolsi in acido nitrico concentrato, portai a secchezza, indi ripresi con acqua e alcalinizzai con carbonato di sodio. Una goccia della soluzione messa sopra un vetro copri-oggetti a contatto con un'altra di acido acetico mi fornì, dopo lenta evaporazione, alcuni cristallini tetraedrici di particolare nitidezza evidentemente dovuti ad *acetato doppio* di *uranio* e di *sodio.*

Questo fatto induce quindi a ritenere che la *biotite* sia *uranifera* e che la radioattività della roccia debba attribuirsi all'attività di questo minerale. Gli altri minerali, diligentemente isolati, non mostrarono che una debole radioattività che potrebbe ritenersi indotta.

Alle falde del colle scorre il fiume Coghinas; nelle sponde si ha un esteso deposito sabbioso attraverso cui, con opportuni scavi, si possono facilmente far scaturire le acque minerali. Queste, per la temperatura, sono da ritenersi termali assolute, vere *thiofene*: si mostrano caratterizzate dalla presenza di solfuri, di H_2S e di un po' di zolfo, dovuto all'ossidazione dell'H_2S ed alla scomposizione dei solfuri.

Il La Marmora riporta l'analisi seguente:

$Si\,O_2$	0,00625
$Ca\,SO_2$	0,01875
$Ca\,cl_2$	0,13850
$Na\,cl$	0,33050
H_2o	99,50600
	100,00000

Debbo però rilevare come in questa analisi non sia tenuto in dovuto conto la presenza dei solfuri alcalini e terrosi, dell' H_2S, dei carbonati, dell'alluminio e del ferro. Da questo lato attendono un più diligente esame il quale, ritengo, condurrà a stabilire trattarsi di un'acqua *salino-solfurea allumino-ferruginosa*.

La roccia con la quale viene a contatto, dà lieve effervescenza con gli acidi, ciò che denota la formazione di carbonati in seguito ad alterazione dei silicati. Si rendono evidenti piccoli cristalli di calcite con le seguenti forme:

$$\{100\}, \{110\}, \{111\}, \{10\bar{1}\}, \{11\bar{2}\}, \{2\bar{1}\bar{1}\}, \{1\bar{2}1\}.$$

Come nota il De Launay (¹), queste acque sono di particolare importanza non solo per le proprietà mineralogiche e chimiche che strettamente interessano il naturalista, ma, praticamente, dal punto di vista terapeutico, per gli effetti benefici che esercitano nell'organismo sulle cui cause sino a poco fa si rimaneva perplessi come di fronte ad una azione arcanamente miracolosa; ma col progredire dei mezzi di indagine tutto rientra nell'ambito delle leggi naturali e, quanto dapprima riusciva misterioso ed inesplicabile, trova ora la sua ragione scientifica, così l'azione salutare si spiega con la radioattività, con la solforazione, con l'alcalinità che dal più al meno esse addimostrano. De Launay fece interessanti osservazioni sulla mineralizzazione delle acque e giunse a concludere che questa si collega con la termalità e ne attribuisce le cause agli elementi facilmente asportabili dalle acque, alle azioni chimiche sui minerali delle zone traversate, ai gas provenienti da regioni vulcaniche.

La solforazione diede luogo a numerosi lavori che tuttora, però, sono ben lungi dal risolvere la questione in modo definitivo (²).

(¹) De Launay, *Les sources thermominérales*, 1899, Paris.

(²) Fontain nelle sue ricerche sulle acque dei Pirenei, Germania, Belgio, Svizzera, ritiene che il quantitativo dei solfuri sia in relazione con la prossimità della catena montuosa che in parte attraversano. De Launay ammette che il principio solforato sia Na_2S, quantunque ritenga che debba considerarsi nullo il calore di formazione della soda e del solfidrato i quali non reagiscono fra loro, e che il solfuro si dissoci in solfidrato. In ogni caso per decomposizione si libererebbe H_2S che varia a seconda delle sorgenti. Ritiene che nella riduzione del solfato di sodio in soluzione esercitino una forte influenza le sostanze organiche; il $CaSO_4$ per mezzo del carbone, di idrocarburi, in opportune condizioni di temperatura può così formare del CaS solubile, che per azione degli acidi minerali libera H_2S. Non dissimula però la difficoltà di accertarne in modo assoluto la vera causa. Data la costituzione geologica di questa regione, in cui i calcari fanno assolutamente difetto, più attendibilmente ne spiego l'origine ammettendo che in seguito a differenziazione magmatica ebbe modo di formarsi una soluzione metallifera di solfuri la quale, per una successiva ossidazione, potè dar luogo ad una soluzione solforica, con contemporanea liberazione di H_2S: in tali condizioni poterono formarsi agevolmente i solfuri alcalini e terrosi. La presenza dei solfuri si può tener certa poichè in diversi punti di questa plaga si rendono evidenti *pirite, calcopirite, erubescite, calcosina*, ed attive ricerche sono dirette sulle traccie di questi allo scopo di stabilirne l'entità.

La composizione di quest'acqua rivela l'azione fisico-chimica che ebbe modo di esercitare nelle roccie che attraversò, in causa della elevata temperatura che nella venuta a giorno varia dai 65 ai 75°, temperatura subordinata al grado geotermico ed alla pressione. Si ammette che in profondità ebbero origine le roccie, che ivi si stabilirono azioni idriche nonchè posteriori azioni idrotermali, che in speciali circostanze siffatte rocce liberarono vapori di acqua che posteriormente si condensò e potè incontrare estese falde acquee determinando la formazione di considerevoli correnti.

L'Arrhénius (¹) ritiene che l'acqua agisca in profondità come un acido relativamente forte e che vada potenzialmente man mano indebolendosi col graduale raffreddamento della massa ignea. Tengo però a rilevare come oggi s' inclini piuttosto ad ammettere un vulcanismo anidro: secondo tali moderne teorie l'acqua delle eruzioni sarebbe introdotta dall'esterno [De Lorenzo (²), De Stefani (³)].

Julien pure propende per un afflusso di acque per infiltrazione dall'esterno, contenenti in abbondanza sali minerali; queste raggiungendo gli strati profondi comporterebbero temperature assai elevate e assimilerebbero vapori con pressione considerevole e soprattutto CO_2 gassoso: tali condizioni sono in armonia con l'equilibrio che si suppone sussistere nell'interno della terra, equilibrio che varia col variare della temperatura. Si comprende quindi come queste acque, in tale stato, possano non solo agire meccanicamente, ma, dato lo spiccato potere solvente, è loro conferita la proprietà di decomporre i materiali costituenti le rocce e di asportare un certo numero di sostanze minerali. Si spiega così come codeste acque abbiano potuto decomporre la *biotite*, e conseguentemente si ha una potenza radioattiva maggiore o minore a seconda che esse abbiano attraversato strati rocciosi più o meno abbondanti di *mica uranifera*.

Un litro fornì la dispersione di 16 volt per ora, dedotta la dispersione ottenuta con l'acqua distillata. Sicchè si ottenne, con l'applicazione della formula del Battelli $\alpha = \frac{c \cdot v}{p \cdot t}$, un valore di 0,0044.

Il volume della camera di ionizzazione si calcolò di cc. 525 e la capacità dell'apparecchio di cm. 5,2. Nella seconda ora la dispersione diminuì di molto poichè si ottenne un valore di 1.5 volt. Nella terza si ebbe la completa inattività.

Credetti opportuno di determinare anche la radioattività delle sabbie: queste risultano degli stessi elementi frammentizî delle rocce e quindi di *quarzo*, *ortoclorio*, *biotite* in grado di avanzata alterazione. Grammi 81 diedero una dispersione di 8 volt per ora per cui

$$\alpha = 0,00021.$$

(¹) Arrhénius, *Geol. Fören. Forh.*, Stockholm, 1900.

(²) De Lorenzo, *Studî geol. del M. Vulture*. Mem. Acc. Sc., Napoli, 1900.

(³) De Stefani, *Le acque atmosferiche nelle fumarole*. Soc. Geol. It., 1900.

L'attività di queste sabbie sta evidentemente fra quella delle acque e quella del *granito porfirico*. Si ebbe modo di constatare che nei casi esaminati la radioattività si deve attribuire ad emanazione di radio e di escludere quella del torio e dell'attinio e ciò in base alla rapidità con cui la radiazione si riduce opportunamente misurando il semi-periodo. La presenza del radio si mostra in stretta relazione con quella dell'uranio cui in tracce infinitesime esso si associa, non rivelabile che dalle sue speciali emanazioni — fatto questo che induce ad ammettere un nesso genetico fra questi elementi, e ciò in armonia alle vedute del Coy (1) e del Boltwood (2). A questo riguardo ricordo che lo Strutt (3) giunse a constatare che la quantità di radio presente fra i minerali che partecipano alla costituzione di talune rocce è proporzionale alla quantità di uranio; e, dal rapporto ottenuto in diverse esperienze, concluse che bisogna ritenere che questo si manifesti costante se si pensi che si riferisce a materiali provenienti da diversi giacimenti e nei quali possono avere influito svariati e molteplici fattori per alterarne la originaria costituzione.

Rutherford (4) e Boltwood con speciali metodi valutarono il quantitativo di radio rispondente a un grammo di uranio e Soddy e Makenzie (5) verificarono sperimentalmente la derivazione del radio dall'uranio fornendo dati che consentono di calcolare direttamente la corrente di saturazione. La presenza dell'uranio e del radio fra i minerali della Sardegna richiama la maggior attenzione e da una serie ordinata di indagini ci sarà lecito, con sicuro presagio, aprire l'animo alla visione di promettenti risultati.

(1) Coy, Bon Chem. Gen., 1904.
(2) Boltwood, Am. Jorn. Sc., 1906.
(3) Strutt, Proc. Roy. Soc., 1905
(4) Rutherford e Boltwood, Am. Jorn. of Science, 22.
(5) Soddy e Makenzie, Phil. Mag., 1905-1908.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 8°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 11.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 30; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

RENDICONTI — Ottobre 1916.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia durante le ferie del 1916.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 novembre 1916.

Volume XXV.° — Fascicolo 9°

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 novembre 1916.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica-fisica. — *Sui cristalli misti* (Mg, Zn) $SO_4 + 7\ H_2O$. Nota del Socio C. Viola.

Ho fatto un tentativo per dimostrare se certi cristalli misti, dei quali si ritiene essere soluzioni solide, sieno veramente tali o non piuttosto miscele meccaniche omogenee. Mi sono posto, in altre parole, in campo incerto per risolvere il problema in uno o nell'altro senso, esaminando ancora se le dimostrazioni teoriche e i risultati sperimentali siano esaurienti per l'una o l'altra ipotesi.

Ho incominciato le esperienze con i cristalli misti (Mg. Zn) $SO_4 + 7$ aq, che, come è noto, si presentano in tutte le proporzioni senza lacune [1]. Ne dò comunicazione subito, benchè altre esperienze sieno in corso. Si sogliono considerare vere sostanze isomorfe $MgSO_4 + 7$ aq e $ZnSO_4 + 7$ aq, cristallizzanti nel trimetrico, simmetria bisfenoidale con costanti vicinissime e proprietà fisiche analoghe alla temperatura ordinaria [2]. Le dette sostanze sono isomorfe non perchè danno cristalli misti in tutte le proporzioni, senza lacune e senza sali doppî, ma perchè la loro struttura cristallina è la stessa, e i due elementi Mg e Zn possono vicariare non solo qui, ma anche in altri composti. Infatti la proprietà di dare cristalli misti in tutte le proporzioni

[1] W. Nernst, *Traité de Chimie générale*. Paris, 1911, 132.

[2] Come è noto il solfato magnesiaco ettaidrato cristallizza anche nel monoclino, modificazione labile, isomorfo col vitriolo di ferro.

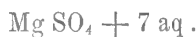
si ripete in sostanze, le quali non hanno nemmeno la base dell'isomorfismo come albite e anortite, cloruro ferrico e cloruro ammonico ([1]), ecc.

Sia o no la miscibilità in relazione con l'isomorfismo, poco monta per l'argomento qui trattato.

Il problema verte su fenomeni concreti, vale a dire se i cristalli misti, di cui vedremo le proprietà, sieno soluzioni solide nel senso di van't Hoff ([2]), ovvero semplicemente miscele meccaniche omogenee, vale a dire sovrapposizioni di lamelle sottilissime in intima aderenza.

Il materiale non estremamente purissimo, benchè proveniente dalla casa Erba di Milano, fu sciolto e fatto cristallizzare a diverse temperature, in spazi chiusi contenenti acido solforico concentrato per avere evaporazione uniforme e lenta e quindi reversibilità. Le misure sono state eseguite a temperature fra 20° e 32°. Ma i risultati ottenuti non sono molto diversi fra queste diverse temperature, sicchè basterà riferire quelle eseguite e ripetute a 30°, temperatura quasi costante di estate negli ambienti del laboratorio.

* * *

$Mg\,SO_4 + 7\,aq$.

Il peso specifico di questo idrato misurato col picnometro sopra gr. 1.0441 di sostanza è risultato di 1,676. Non è molto diverso dalle misure conosciute:

1.677	Johnsen ([3])
1.677	Retgers ([4])
1.684-1.691	Petterson ([5]),
1.678	Thorpe e Watts ([6])
1.694	Topsoe e Christiansen ([7]).

I cristalli ottenuti alla temperatura di 30° da una soluzione satura, avente il peso specifico 1,2966 (misurato con la bilancia di Westphal) sono allungati a terminazioni irregolari ma complete. La fig. 1 ne dà un'effige ideale avente le dimensioni $2 \times 3 \times 6$ mm.

([1]) Nernst, *Traité de Chimie générale*. Paris 1911, 131.
([2]) vant't Hoff, Zeitschr. physik. Chemie. *5*, 322, (1890).
([3]) N. Iahrb. f. Min. (1907), BB. *23*, 315.
([4]) Zeitsch. f. physik. Chemie (1889), *3*, 534.
([5]) Nova Acta Upsala (1874).
([6]) Journ. Chem. Soc., London *37*, 102.
([7]) Ann. chim., phys. (1874) (5), *1*, 63.

In questi cristalli così ottenuti spicca abbastanza bene il carattere bisfenoidale. Le misure su 4 cristalli furono abbastanza concordanti, offrendo le facce buoni riflessi e unici. Ecco gli angoli misurati:

$$110 : 1\bar{1}0 = 89°.24' \tfrac{1}{2},$$
$$101 : \bar{1}01 = 60 .01 \quad ,$$
$$111 : 001 = 38 .57 \tfrac{1}{3},$$

che non differiscono di molto dalle misure conosciute. Infatti:

	Broocke [1]	Rammelsberg [2]
$110 : 1\bar{1}0$	$= 89°.26^1$,	89.02
$101 : \bar{1}01$	$= 60 . 0$	60.27 calcolato
$111 : 001$	$= 39 . 3$	39.11 .

I cristalli di $Mg\,SO_4 + 7$ aq puri tolti dalla soluzione satura, asciugati ripetutamente fra carta bibula, si conservano bene in atmosfera secca, e le loro facce rimangono parecchi giorni perfettamente speculari; onde le misure degli angoli possono farsi agevolmente. Per dimostrare la conservazione di detti cristalli in ambiente secco, ne ho scelti due a facce liscie e limpidissimi dal peso complessivo di gr. 0.4448 e li ho collocati in ambiente secco, tenuto tale con acido solforico concentrato. Ecco le pesate dopo diverse ore di permanenza in detto ambiente, e ridotte a 1 gr. di sostanza:

gr.	1.0000	ore	0
"	1.0000	"	9
"	0.9995	"	12
"	0.9977	"	31
"	0.9957	"	78
"	0.9930	"	210
"	0.9787	"	300

È necessario che la permanenza dei cristalli in ambiente secco sia di parecchi giorni prima che essi perdono la loro limpidezza, e si coprono di una leggera velatura bianca. La trasformazione di $Mg\,SO_4 + 7$ aq è probabilmente in $Mg\,SO_4 + 6$ aq e forse anche in idrati più bassi.

* * *

$Zn\,SO_4 + 7$ aq

Ho ottenuto questi cristalli con la stessa facilità, con cui si ottengono i precedenti. Il loro peso specifico misurato col picnometro sopra gr. 0.9057 di sostanza è 1.9354, un po' più basso delle misure conosciute:

(1) Ann. of Philos. (1823), *22*, 40.
(2) Poggendorfs. Ann. d. Phys. (1854), *91*, 342.

2.008	Topsoe e Christiansen [1],
1.976	Hoeker [2],
1.974	Thorpe e Watts [3],
1.953	Schiff [4],
1.954	Schroeder [5].

I cristalli ottenuti a temperatura di circa 30° da soluzione satura, avente il peso specifico 1.4175, sono in generale più tozzi in confronto di quelli di $Mg SO_4 + 7$ aq con terminazioni per lo più regolari, tanto che dal loro sviluppo non apparisce distintamente la simmetria bisfenoidale. Essi si appoggiano nel fondo del cristallizzatore con una faccia del prisma {110}. La fig. 2 dà una effige ideale di questi cristalli aventi le dimensioni medie di 2 × 2 × 7 mm. Le misure su tre cristalli hanno dato

$110 : 1\bar{1}0 = 88°.40'$,	
$101 : \bar{1}01 = 60\ .40$	calcolato
$111 : 001 = 38\ .55$,	

che non differiscono di molto dagli angoli conosciuti, fra loro pure abbastanza discordi:

	Brooke [6]		Rammelsberg [7]	
$110 : 1\bar{1}0 =$	$88°.53'$		$89°.22'$	
$101 : \bar{1}01 =$	$60\ .\ 0\frac{2}{3}$	calcolato	$60\ .54$	calcolato
$111 : 001 =$	$38\ .58$		39.35.	

I cristalli di $Zn SO_4 + 7$ aq tolti dalla soluzione satura dal peso specifico 1.4175 (misurato con la bilancia di Westphal a 30° C., seccati ripetutamente fra carta bibula, si conservano bene in atmosfera umida; sicchè col riguardo a questa proprietà, le loro facce rimanendo speculari e dando perciò buoni riflessi unici, si prestano facilmente a misure goniometriche. Ma in atmosfera secca essi perdono tosto il loro splendore, si appannano e si coprono di una pattina bianca opaca, perdendo acqua. Probabilmente in atmosfera secca, dopo breve permanenza si trasformano in solfato anidro.

(1) Vid. Selsk. Skr. Kopenhagen (1873) (5), *9*, 703.
(2) Philos. Magaz. (3). *27*, 213.
(3) Journ. Chem. Soc., London *37*, 102.
(4) Lieb. Ann. *107*, 72 (1858).
(5) Iahr. pr. Chemie (2). *19*, 274 (1879).
(6) Annals of Philos. (1823), *22*, 437.
(7) Handb. d. Krystall.-physikal. Chemie, Leipzig (1881), *1*, 416.

Anche di questi cristalli ho voluto rendermi ragione della loro stabilità o rispettivamente instabilità in ambiente secco. A quest'oggetto alcuni limpidissimi e lucenti cristalli dal peso complessivo di gr. 3.3721 furono collocati come precedentemente in ambiente secco, tenuto tale con acido sol-

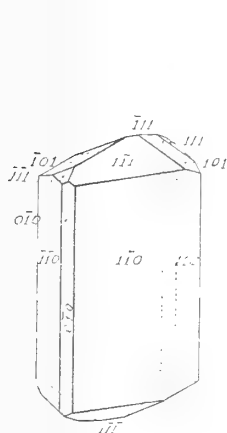
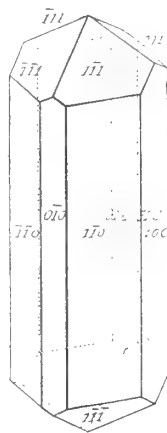
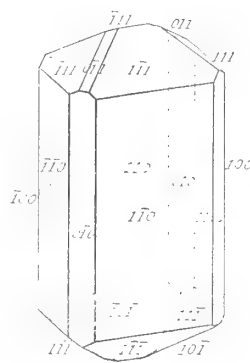



Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

forico concentrato. Ecco le pesate dopo varie ore di permanenza in detto ambiente riferite a 1 gr. di sostanza:

gr. 1.0000	ore 0
" 0.9967	" 1
" 0.9862	" 5
" 0.9361	" 27
" 0.8213	" 72

In capo a pochi minuti (10-15 circa) i cristalli di $Zn\,SO_4 + 7$ aq in ambiente secco divengono opachi, si coprono uniformemente di una pattina bianca senza tracce sulla loro superficie di parti inalterate.

Mi sono servito spesse volte di questo criterio per distinguere gli idrati di Zn dagli idrati di Mg; collocati i detti cristalli limpidi in ambiente secco, i primi divengono opachi dopo pochi minuti, gli ultimi si conservano limpidi per molte ore, come di sopra si è detto. Questa diversa alterabilità, dovuta alla diversa tensione del vapore a eguale temperatura, si ripete nei cristalli misti.

* * *

$(Mg\,.\,Zn)\,SO_4 + 7$ aq .

Sciogliendo in acqua distillata i due sali $Mg\,SO_4\,7$ aq $+ 7$ aq e $Zn\,SO_4 + 7$ aq si ottengono soluzioni sature in diverse proporzioni per la

stessa temperatura. Io ho sperimentato a due temperatnre 25° e 30° C. Facendo cristallizzare la soluzione si ottengono dalle dette soluzioni cristalli misti, le cui proporzioni sono diverse da quelle delle soluzioni corrispondenti.

Una soluzione della quale ottenni cristalli misti, aveva il peso specifico 1.3836 (misurato con la bilancia di Westphal) a 30° C.

Ho fatto l'analisi quantitativa di questa soluzione separando lo zinco dal magnesio allo stato di fosfato ammonico zincico o rispettivamente magnesiaco e pesandoli allo stato di pirofosfati; essendo che il primo dei detti fosfati ammoniaci è in solubile in soluzione leggermente acida, l'altro è insolubile in soluzione ammoniacale in presenza di sali ammoniacali [1].

In 100 gr. di detta soluzione satura sono contenuti

gr. 26.40 di $Mg SO_4 + 7$ aq,
" 14.84 " $Zn SO_4 + 7$ aq.

Da questa soluzione a 30° in ambiente contenente H_2SO_4 a scopo di lenta evaporazione, ho separato cristalli misti del seguente tenore:

gr. 58.70 di $Mg SO_4 + 7$ aq,
" 41.30 " $Zn SO_4 + 7$ aq,
" 100 — " $(Mg, Zn) SO_4 + 7$ aq,

la cui determinazione fu eseguita con lo stesso procedimento di poc'anzi.

Poichè con la separazione dei cristalli misti, la soluzione viene di qualche poco a modificarsi, ho fatto eseguire la cristallizzazione in bicchieri relativamente grandi e in grande quantità di soluzione. Ma la soverchia esattezza, a questo riguardo, è superflua per i risultati, a cui si vuol arrivare. I cristalli misti così ottenuti hanno il peso specifico di 1.7834 misurato col picnometro e sopra gr. 0.5757 di sostanza. Calcolando il peso specifico di essi col metodo di Retgers, supponendo che questa quantità sia additiva, si ottiene 1.7831. Una siffatta coincidenza è certamente fortuita, poichè l'errore nel peso specifico può cadere nella terza decimale. Vi sono casi in cui il picnometro non assicura nemmeno la seconda, ma ciò non riguarda questa determinazione.

I cristalli misti così individuati sono abbastanza regolari, allungati, con terminazioni incomplete, un po' schiacciati nella direzione perpendicolare a $(1\bar{1}0)$. I due bistenoidi $\{111\}$ e $\{1\bar{1}1\}$ sono un po' diversamente sviluppati, sicchè ne emerge la simmetria bistenoidale. Sorprende lo sviluppo di sole due facce del prisma orizzontale $\{101\}$ e del prisma $\{011\}$. L'effige della fig. 3 è tolta da questi dati e da cristalli aventi le dimensioni

[1] L. L. de Koninck, *Traité de Chimie analytique minérale* (1911). 2. 159, 475, 617.

$2 \times 3 \times 6$. Anche i cristalli misti $(Mg \cdot Zn) SO_4 + 7 aq$ come i cristalli puri $Mq SO_4 + 7 aq$ e $Zn SO_4 + 7 aq$ si trovano nel fondo del cristallizzatore appoggiati con una delle facce del prisma $\{110\}$. Da tre cristalli si sono avute le seguenti medie:

$$110:1\bar{1}0 = 89^\circ.15'\tfrac{1}{2}\,.$$
$$101:\bar{1}01 = 59\,.57\quad,$$
$$111:001 = 38\,.55\quad,$$

che sono contenute nei limiti corrispondenti a $Mg SO_4 + 7 aq$ e $Zn SO_4 + 7aq$, salvo piccolissime differenze, come del resto era da prevedersi.

I cristalli misti qui considerati non sono però così semplici, come abbiamo testè riferito. Le facce della zona verticale, ovvero quelle terminali o infine le une e altre sono accompagnate da facce vicinali, ciò che non si osserva nei cristalli puri. Ecco in uno di essi gli angoli di posizione della zona verticale:

		φ			φ
(100)		0°. 0′	(100)		0°. 0′
(110)	+	44.25	(1$\bar{1}$0)	—	44.33 44.22
(010)	+	89.50	(0$\bar{1}$0)	—	90.10
($\bar{1}$10)	+	135.21	($\bar{1}\bar{1}$0)	—	135.14 134.42
($\bar{1}$00)	+	179.48 178.17	($\bar{1}$00)	—	180.12 181.43

In un secondo di essi gli angoli di posizione fanno rilevare le facce vicinali nelle terminazioni, come segue:

		φ	ρ			φ	ρ
(100)		0°. 0′ . . .	90°. 0′	(100)		0°. 0′ . . .	90°. 0′
(111)	+	44.33 . . .	39.07	(1$\bar{1}$1)	—	44.18 . . .	38.56
(011)	+	90.41 . . .	29.47	($\bar{1}\bar{1}$1)	—	136.11 135.21 . . .	38.22
($\bar{1}$11)	+	136.09 137.00 . . .	37.46 40.03	($\bar{1}$01)	—	179.36 . . .	29.55 29.35

I cristalli misti $(Mg, Zn) SO_4 + 7 aq$ qui individuati furono collocati in ambiente secco, così mantenuto con $H_2 SO_4$ concentrato, col progetto di determinare il tempo della loro conservazione o rispettivamente alterazione.

Si sono fatte due esperienze in condizioni eguali di ambiente, di superficie e di peso, prendendo 1 g. di sostanza. I cristalli scelti erano traspa-

renti, limpidi e a facce speculari. Il tempo di permanenza è qui indicato in ore:

	I	II		
gr.	1.0000	1.0000	ore	0
	0.9989	0.9990		4
	0.9806	0.9891		16
	0.9723	0.9703		24
	...	...		...

L'alterazione dei cristalli misti è più rapida che nei cristalli puri di Mg, ed è più lenta che nei cristalli puri di Zn.

Secondariamente essa non è perfettamente eguale nelle due prove.

In terzo luogo essa non è uniforme su tutta la superficie di un cristallo. La pattina bianca che riveste i cristalli misti alterati è analoga a quella che riveste i cristalli di $ZnSO_4 + 7\,aq$ alterati; ma in quelli la pattina non è uniforme. Con discreto ingrandimento si osserva sulla superficie dei cristalli alterati una divisione omogenea di particelle alterati frammisti a particelle sane. Riferendomi alle precedenti osservazioni devo concludere che le particelle alterate e velate di pattina bianca sono costituite di $ZnSO_4 + 7\,aq$, e le particelle rimaste sane sono costituite di $MgSO_4 + 7\,aq$. Così si può spiegare perchè l'alterazione è ritardata, e perchè non è sempre la stessa in tutti i cristalli dallo stesso volume e dalla stessa superficie circa. I fenomeni qui riferiti che presentano i cristalli misti in ambiente secco, sono tanto più evidenti, quanto più piccola è la permanenza di essi in detto ambiente. Bastano pochi minuti di permanenza in ambiente secco, per riconoscere subito sulla superficie del cristallo quali sono le particelle costituite dell'una o dell'altra sostanza.

***

Conclusione.

Le esperienze sopra descritte permettono di concludere che i cristalli misti $(Mg, Zn)SO_4 + 7aq$ sono costituiti da lamelle finissime di $MgSO_4 + 7\,aq$ e di $ZnSO_4 + 7\,aq$, successivamente alternate, dando luogo a un complesso omogeneo e continuo. I detti cristalli misti sono dunque miscele meccaniche omogenee, e non miscele fisiche, quali le soluzioni solide di Van't Hoff [1]. Il modo di alterazione di detti cristalli misti in confronto con l'alterazione dei cristalli puri, ottenuti nelle stesse condizioni di ambiente e di temperatura, è la ragione principale su cui si fonda questa conclusione; essa

[1] I. H. van't Hoff, *Ueber feste Lösungen und Molekulargewichts bestimmung an festen Körpern*. Zeitschr. f. physikalische Chemie (1890), *5*, 322; G. Bruni, *Ueber feste Lösungen und Isomorphysmus*. Leipzig (1908).

è altresì avvalorata dalle facce vicinali osservate nei cristalli misti e non nei cristalli puri.

Questa conclusione non può passare senza osservazioni e considerazioni d'indole generale, che riguardano appunto la differenza fra miscele omogenee e soluzioni solide.

* * *

Osservazioni.

In appoggio alle soluzioni solide, che dovrebbero essere i cristalli misti di sostanze isomorfe in tutte le proporzioni, I. H. van't Hoff (1) cita molti esempî fra i quali hanno speciale interesse quelli osservati da v. Hauer e Lehmann. Fra questi esempî vi è il solfato piombico in miscela con i rispettivi solfati calcico e stronzitico, l'allume ferrico in miscela con l'allume alluminico, il formiato ramico in miscela con i rispettivi formiati baritico e stronzitico e altri.

L'osservazione che a questo riguardo fu fatta, è che i cristalli misti si disgregano molto più lentamente che i cristalli puri. Dobbiamo a van't Hoff la spiegazione di questo fenomeno. Egli dimostrò che i componenti dei cristalli misti hanno la tensione del vapore più bassa di quella corrispondente agli stessi componenti trovantesi nello stato libero; fenomeno che è stato dimostrato per tutte le soluzioni in generale, l'abbassamonto della tensione del vapore essendo funzione della pressione osmotica, a sua volta funzione lineare della concentrazione. Hollmann (2) fece misure in proposito. Ulteriori osservazioni e più importanti per il principio delle soluzioni solide furono fatte da van Bylert (3), Beckmann (4) e specialmente da G. Bruni (5).

Dobbiamo qui esaminare il problema generale per giustificare la nostra conclusione, se le miscele meccaniche omogenee rientrino come tutti i complessi omogenei nella legge delle fasi di Gibb, se un abbassamento della tensione del vapore sia unicamente dovuta alle soluzioni, ovvero ancora alle miscele meccaniche omogenee; e se i fenomeni connessi con esso abbassamento possono verificarsi così nelle miscele meccaniche senza pressione osmotica, come nelle soluzioni dotate di pressione osmotica; vale a dire si tratta

(1) I. H. van't Hoff, *Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie* (1901), II, 63.

(2) R. Hollmann, *Ueber die Dampfspannung von Mischkrystallen einiger isomorpher Salzhydrate*. Zeitschr. f. phys. Chemie (1901), *37*, 193.

(3) Van Beylert, Zeitschr. f. physik. Chemie, *8*, 343

(4) Beckmann e Stock, Zeitschr. f. physik. Chemie, *17*, 120; *22*, 609.

(5) G. Bruni, *Ueber feste Lösungen und Isomorphismus*. Leipzig (1908); Id., *Ricerche teoriche e sperimentali sulle soluzioni solide*. R. Acc. Linc., Memorie (1912), (*5*), IX, 39.

di esaminare se a questo riguardo le miscele meccaniche, come fasi uniche, valgano le soluzioni (liquide o solide), la cui differenza consiste solo nel fenomeno della diffusione, che in quelle necessariamente manca affatto.

Le miscele meccaniche si devono distinguere in conglomerati sciolti e in miscele omogenee costituite da particelle finissime in intima aderenza; i conglomerati non possono considerarsi come fasi uniche, ossia complessi omogenei. Per le miscele meccaniche omogenee come fasi vale la legge di Gibb, quando esse non possono dissolversi senza spesa di lavoro, nè costituirsi senza il corrispettivo guadagno, in guisa che la loro trasformazione è reversibile. Credo di avere dato ragione di questo fatto [1].

Sia D la forza di adesione di due particelle eterogenee per unità di area, e sia ε la distanza, a cui esse devono essere portate, affinchè cessi l'adesione D; il lavoro necessario per dissolvere una miscela meccanica omogenea sarà naturalmente dell'ordine

$$I = \frac{1}{2} \int_0^s D \varepsilon \, ds \, ,$$

esteso a tutta la superficie di contatto s.

Se la tensione del vapore di uno dei componenti fosse eguale o maggiore di quella che il componente avrebbe allo stato libero, sarebbe possibile guadagnare del lavoro dal nulla, percorrendo un ciclo completo, e precisamente il lavoro

$$2\,I = \int_0^s D \varepsilon \, ds$$

Essendo questo naturalmente inammissibile, è necessario che la tensione del vapore del componente allo stato legato (a una miscela) sia minore di quella del vapore dello stesso componente allo stato libero.

Lo stesso ragionamento può valere per dimostrare che il punto di fusione di un componente legato ad altri deve essere più basso che quello del componente libero alla stessa pressione. Altrettanto vale per il grado di solubilità di un componente solido in un solvente liquido, legato ad altri componenti, sia per effetto di una soluzione solida, sia per effetto di una miscela meccanica omogenea.

E. Sommerfeld [2] e W. Nernst [3] dichiarano esplicitamente che nel

[1] C. Viola, *Sulla legge delle fasi di Gibb.* R. Accademia dei Lincei, Rendiconti 1916, 2° sem., pag. 245.

[2] E. Sommerfeld, *Thermochemische und thermodynamische Methoden, angewandt auf den Vorgang der Bildung von Mischkristallen.* Neues Jahrb. f. Min. Geol. ecc., (1900). B. *13*, 434-468.

[3] W. Nernst, *Traité de Chimie générale.* Paris (1911), pag. 125.

formarsi una soluzione di carattere generale, liquida o solida, intervengono sempre variazioni

1. nell'energia totale,
2. nell'energia libera.

Sommerfeld [1] inoltre osserva che queste due variazioni sono sufficienti, anzi le sole caratteristiche per separare una soluzione solida da una miscela meccanica come fase degli stessi componenti. Prima di rispondere a Sommerfeld, bisogna rilevare che egli nella miscela meccanica ha di mira unicamente un conglomerato.

Sommerfeld nel dimostrare come la variazione nell'energia totale possa essere un carattere della soluzione solida per rispetto a una miscela meccanica omogenea parte da un postulato, che si deve provare.

Sia Q la quantità di calore che si partecipa a una miscela meccanica omogenea, per via diretta o indiretta, per ottenere un conglomerato di due componenti.

Essa quantità Q ha due uffici: innalza la temperatura di t° C. e scinde l'intimo contatto fra i due componenti eterogenei. Nel supposto che questa trasformazione si compia senza lavoro esterno, il calore Q sarà eguale all'aumento dell'energia totale U, comprendente l'incremento dell'energia cinetica W e dell'energia potenziale P, sicchè

$$Q = U = W + P ,$$

espresso tutto nella stessa unità. Il calorico specifico del conglomerato sia c_0, quantità additiva delle capacità calorifiche c' e c'' dei due componenti. Sia inoltre c il calorico specifico della miscela meccanica omogenea, che pel momento vogliamo supporre diversa di c_0. Si avrà intanto

$$W = (c - c_0)\, t ,$$

per l'unità di massa.

Il lavoro della forza di adesione necessario per ottenere la scissione della miscela meccanica omogenea, abbiamo già indicato con

$$I = \frac{1}{2} \int_0^s D\, \varepsilon\, ds ,$$

sicchè si avrà

$$P = \frac{A}{2} \int_0^s D\, \varepsilon\, ds ,$$

essendo A il coefficiente termico del lavoro. Così potremo scrivere

$$Q = (c - c_0)\, t + \frac{A}{2} \int_0^s D\, \varepsilon\, ds .$$

[1] E. Sommerfeld, op. cit.

Se l'effetto così ottenuto dovesse compiersi senza guadagno nè spesa di calore, avremo l'eguaglianza

$$2(c_0 - c)\,t = A \int_0^s D\,\varepsilon\,ds\;.$$

Sommerfeld [1] suppone senz'altro che il secondo termine di questa equazione sia zero; e allora ottiene naturalmente

$$c = c_0\;;$$

vale a dire egli ottiene la conseguenza già contenuta nella premessa, cioè che la capacità calorifica di una miscela meccanica omogenea è proprietà additiva, e perciò conclude che i cristalli misti da lui sperimentati, avendo calorico specifico diverso dal valore additivo, sono necessariamente soluzioni solidi. Io credo invece che questi risultati di Sommerfeld debbano essere ripresi in esame. L'integrale

$$A \int_0^s D\,\varepsilon\,ds$$

ossia la differenza $2(c_0 - c)t$ per una miscela meccanica omogenea infatti non è zero: ciò possiamo provare in un altro modo.

Poniamoci nella condizione scelta da Sommerfeld nell'intento di determinare la capacità calorifica c_0 della miscela meccanica omogenea, essendo quantità additiva quella c del conglomerato, i cui componenti hanno la capacità c' e c''.

La miscela meccanica omogenea viene riscaldata della temperatura di t^0 C, e il calorimetro dimostra una quantità q_0 di calore impiegato, di modo che teoricamente dovrebbe scriversi la relazione

$$q_0 = c_0\,t$$

sopra l'unità di massa.

Per alzare della stessa temperatura t l'unità di massa del conglomerato, vi abbisogna la quantità di calore

$$q = ct\;.$$

Orbene q non è eguale a q_0; infatti riscaldando di t^0 C la miscela meccanica omogenea si aumenta, o si diminuisce la superficie di contatto fra i componenti eterogenei, secondo vi sia dilatazione o contrazione, e ciò corrisponde a una spesa o un guadagno di lavoro, essendovi variazione nella tensione superficiale.

Sia α la costante capillare fra i due componenti, e $d\sigma$ l'aumento elementare di superficie; il lavoro elementare della tensione superficiale sarà $\alpha\,d\sigma$, e quindi

$$\int_0^\sigma \alpha\,d\sigma$$

[1] E Sommerfeld, loc. cit.

il lavoro totale, il quale sarà positivo o negativo secondo che avvenga dilatazione o contrazione.

La quantità di calore q_0 misurata nel calorimetro si divide dunque in due parti; l'una delle quali effettua l'alzamento di temperatura t, l'altra passa nella variazione della tensione superficiale; scriveremo perciò la relazione

$$q_0 - q = \pm A \int_0^\sigma \alpha \, d\varrho = (c_0 - c)\, t\,.$$

che naturalmente non è zero.

Lo stesso risultato si ottiene determinando la capacità calorifica di una soluzione. Questa è la ragione per cui io credo ingiustificate le conclusioni di Sommerfeld relativamente ai cristalli misti.

L'altro carattere adottato da Sommerfeld per distinguere una soluzione solida da una miscela meccanica, vi è la variazione nell'energia libera. Ma questo carattere si appoggia sull'abbassamento della tensione del vapore di un componente, libero od obbligato ad altro.

Per far evaporare i due componenti di un cristallo misto (l'uno in quantità di 1 Mol, l'altro in quantità di x Mol) in modo che il valore dell'uno sia nella stessa proporzione di quella dell'altro, vi abbisogna una quantità di calore Q così espressa alla temperatura assoluta T, in via approssimata

$$Q = + RT^2 \frac{d}{dT}\, l \left(\frac{p}{p_0}\right) \left(\frac{P}{P_0}\right)^x ,$$

essendo p e P le tensioni di due componenti allo stato libero e p_0 e P_0 le corrispondenti tensioni dei detti componenti trovantesi alla temperatura T allo stato obbligato.

La variazione Q ha un valore naturalmente quando p_0 e P_0 sono diversi da p e P, come in effetto si verifica così nelle soluzioni come nelle miscele meccaniche omogenee.

Riassumendo, i caratteri basati sull'energia totale e sull'energia libera non contraddicono le nostre conclusioni sui cristalli misti $(Mg, Zn)\, SO_4 + 7\,aq$. Ma si può aver ragione su questo risultato ancora per mezzo della struttura.

Sulla struttura cristallina si fecero invero fino a pochi anni fa null'altro che studî teoretici, che potevano dare un'idea della distribuzione uniforme della materia nello stato cristallino, e fornire anche le basi per studî ulteriori. Appena però fu dimostrata la natura ondulatoria dei raggi Röntgen (¹), e si ottenne l'ordine di grandezza delle loro onde, che è 10^{-9} cm., l'esperienza si è sostituita a quegli studî teorici, e ha portato un contributo

(¹) W. Wien, Gött. Nachr. 598 (1901); Stark, Phys. Zeitschr., *8*, 881 (1907); R. Pohl, *Die Physik der Röntgenstrahlen*. Braunschweig (1912); Id., Ann. d. Physik (4), *29*, 331 (1909); A. Sommerfeld, Ann. der Physik, *38*, 473 (1912); Vedi anche H. Haga e C. H. Wind, Wied. Ann., *68*, 884 (1899) e Ann. d. Physik, *10*, 305.

notevolissimo sulla struttura cristallina e sulla natura chimica dei cristalli. Facendo uso di tali raggi si poterono ottenere gli spettri di diffrazione attraverso quel reticolato finissimo, che è la struttura cristallina, e viceversa si potè dedurre la posizione delle molecole e rispettivamente degli atomi partendo dagli spettri di interferenza [1]. Laue [2] andò più oltre dei due Bragg; constatò che fotografando gli spettri prodotti dal salgemma (Na Cl) in diverse posizioni, si ebbero distinti e riconoscibili i luoghi di interferenza prodotti dagli atomi di Na in confronto di quelli prodotti dagli atomi di Cl in base al diverso modo di diffusione della luce Röntgen, dovuta alla natura diversa di Na e di Cl. Laue concluse allora: *la struttura di un cristallo consiste di un numero finito di reticolati o sistemi punteggiati compenetrantesi, ciascuno dei quali è sede di atomi eguali.* Le molecole dello stato amorfo si associano intimamente e omogeneamente appena lo stato amorfo passa allo stato cristallino, in guisa che gli atomi chimici divengono le vere unità individuali del cristallo; e Groth [3] aggiunse: *in un cristallo esistono p. e. gli atomi del potassio* (K), *dello zolfo* (S), *dell'ossigeno* (O), *ma non esistono propriamente le molecole nella forma* $K_2 SO_4$ *o* $K_4 S_2 O_8$ *ecc.; vi è all'incontro la possibilità di formarsi le molecole* $K_2 SO_4$ *all'istante, in cui il cristallo si dissocia, e si dissolve con la fusione, con la solubilità, con l'evaporazione* [4] ecc.

Da queste contingenze deriva che la natura chimica di una sostanza allo stato cristallino è individuata da due fattori; la struttura, ossia il modo di aggruppamento degli atomi nell'edificio cristallino, e la possibilità di formare determinate molecole per mezzo della dissolvenza del cristallo medesimo, molecole che caratterizzano lo stato amorfo, qualunque esso sia, solido, liquido o vapore.

Le esperienze suddette permettono di tirare un'altra conclusione, che due cristalli dovrebbero chiamarsi isomorfi unicamente, quando le loro strutture sono le stesse, poco importa se nei luoghi ove risiedono gli atomi, p. e.

[1] W. Friedrich, P. Knipping e M. Laue, Sitzungsber. München, (1912), 303, Ann. d. Phys., Bd. 41 (1913), pag. 971; Id., *Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen und die Raumgitter der Krystalle.* Zeitsch. f. Kryst. *52*, 58; W. L. Bragg, Proc. Soc. Cambridge Phil. Soc., *17* (1912), 43; W. H. Bragg e W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. (1913), 88 e 428; H. G. I. Moseley e C. G. Darwin, Phil. Mag., Bd. *26*, 210 (1913); Id., Phil. Mag., *26*, 1024 (1913); W. H. Bragg, Proced. Roy. Soc., *89*, 468 (1914).

[2] M. Laue e F. Tank, Ann. d. Phys., *41*, 1003 (1913); M. Laue, Ann. d. Phys., *42*, 1561 (1913); M. Laue e F. Tank, Verhandt. d. deutsch. Phys. Ges., *16* (1914); M. Laue, e I. Steph. van der Lingen, Phys. Zeitschr., *15*, 75 (1914); M. v. Laue, *Die Lichtbarmachung des Raumgitters der Kristalle durch Röntgenstrahlen.* Fortsch. d. Mir. Krystall. e Petrographie, *4*, 43-72 (1914).

[3] P. Groth, *Einleitung in die Chemische Krystallographie* (1904), 8, 9.

[4] P. Groth, Vedi Zeitsch. f. Krystall., *54*, 73, Nota.

di Mg, si trovino p. e. gli atomi di Zn, qualunque sia la simmetra o sistema, a cui le strutture appartengono.

In una struttura siffatta è possibile la diffusione, come avviene nello stato amorfo? L'esperienza risolverà a suo tempo questa questione; ma intanto considerando i varî sistemi punteggiati eguali, che costituiscono le strutture dei due sali $Mg SO_4 + 7 aq$ e $Zn SO_4 + 7 aq$, si dovrebbe ritenere che se diffusione c'è, sarebbero gli atomi Mg e Zn, che si diffondono, ossia che si scambiano le posizioni loro; orbene una diffusione siffatta sarebbe grandissima pari alla forza osmotica proporzionale al numero degli atomi contenenti nella soluzione, cosa contradetta dalla osservazione.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci degli animali omeotermi.* IX: *Azione dei gas della respirazione sui muscoli lisci* (parte 1ª). Nota del Corrispondente FILIPPO BOTTAZZI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui nuclei periodici di Evans e la composizione di seconda specie.* Nota II di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

In questa seconda Nota continuiamo a sviluppare i risultati ottenuti nella prima.

Come corollario del teorema I della Nota I, si ha che:

1. COROLLARIO I. — *La composizione di due nuclei di Evans di classe* $(1, 1)$, *dà ancora un nucleo di classe* $(1, 1)$; *la composizione di un nucleo di classe* $(+1, -1)$ *e di uno di classe* $(1, 1)$ *dà ancora uno di classe* $(+1, -1)$; *ed infine la composizione di due nuclei di classe* $(+1, -1)$ *dà un nucleo di classe* $(1, 1)$.

Ne seguono come necessaria conseguenza i risultati enunciati dall'Evans:

COROLLARIO II. — *Se nella* (1) *il nucleo* n *è della forma* $n(x-y)$, *il nucleo risolvente è della stessa forma.*

Infatti, tutti i nuclei iterati di n sono ancora della stessa forma. Quindi, scrivendo la formula di soluzione, si vede che il nucleo risolvente è espresso proprio da una serie di funzioni di quel tipo, ed è quindi anche esso della stessa forma.

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

Corollario III. — *Se nella* (1) *il nucleo* n *é della forma* $n(x+y)$, *il nucleo risolvente è della forma*

$$r_1(x+y)+r_2(x-y).$$

Ed infatti, i nuclei iterati di ordine dispari, cioè le potenze dispari di composizione, per il Corollario I, sono della forma $f(x+y)$, mentre le potenze pari sono della forma $f(x-y)$. Quindi il nucleo risolvente si spezza in due parti: una contenente tutte le potenze pari, l'altra contenente tutte quelle dispari; e resta così stabilito il corollario.

Dalla (1) segue intanto che se la $f(x)$ è funzione periodica a periodo 1, e la n è un nucleo di Evans, anche la φ è periodica ed a periodo 1; infatti, si ha

$$\varphi(x+1)+\lambda\int_0^1 n(x+1\,,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x+1)$$

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 n(x\,,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)\,.$$

Per la periodicità di n, $n(x+1\,,y)=n(x\,,y)$; quindi

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=f(x+1)-f(x)\,, \tag{2}$$

per cui da $f(x+1)=f(x)$ segue $\varphi(x+1)=\varphi(x)$.

Più generalmente ancora, se $n(x\,,y)=n(ax-by)$, sarà

$$\varphi\left(x+\frac{1}{a}\right)-\varphi(x)=f\left(x+\frac{1}{a}\right)-f(x)\,.$$

Dalla (2) ne segue che, in particolare, se $f(x)=0$ [cioè se la (1) diventa l'equazione omogenea], la soluzione, esistendo, deve essere periodica a periodo $\frac{1}{a}$.

Se la $f(x)$ non è a periodo 1, noi potremo sempre definire una funzione periodica $f_1(x)$, eguale ad $f(x)$ nell'intervallo $(0\,,1)$. Allora la funzione φ corrispondente sarà eguale alla φ nell'intervallo $(0\,,1)$, e sarà periodica: la φ è poi legata ad essa, per valori esterni a quell'intervallo, dalla (2).

È possibile assegnare *a priori* gli autovalori e le autofunzioni dei nuclei di Evans di classe $(1\,,\pm1)$.

2. Infatti, se $n(z)$ è un nucleo di Evans, noi potremo (nell'ipotesi abituale che sia sommabile e di quadrato sommabile) porre

$$n(z) = \alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_r \cos(2\pi r z) + \sum_1^\infty \beta_r \operatorname{sen}(2\pi r z) \qquad (z = ax - by).$$

Abbiamo visto che la soluzione dell'equazione omogenea, se esiste, è anche essa periodica a periodo 1. Quindi, sotto ipotesi poco restrittive, abbiamo

$$\varphi(x) = \gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_r \cos(2\pi r x) + \sum_1^\infty \delta_r \operatorname{sen}(2\pi r x),$$

da cui

$$\gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_r \cos(2\pi r x) + \sum_1^\infty \delta_r \operatorname{sen}(2\pi r x) +$$

$$+ \lambda \int_0^1 \left\{ \alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_r \cos 2\pi r(ax - b\xi) + \sum_1^\infty \beta_r \operatorname{sen} 2\pi r(ax - b\xi) \right\} \times$$

$$(3) \qquad \times \left\{ \gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_r \cos 2\pi\xi + \sum_1^\infty \delta_r \operatorname{sen} 2\pi\xi \right\} ds = 0.$$

Sviluppando il prodotto sotto segno di integrale, si trovano, oltre il termine $\alpha_0\gamma_0$, termini del tipo

$$\begin{cases} \alpha_r \cos 2\pi r(ax - b\xi) \cdot \gamma_s \cos 2\pi s\xi \\ \alpha_r \cos 2\pi r(ax - b\xi) \cdot \delta_s \operatorname{sen} 2\pi s\xi \\ \beta_r \operatorname{sen} 2\pi r(ax - b\xi) \cdot \gamma_s \cos 2\pi s\xi \\ \beta_r \operatorname{sen} 2\pi r(ax - b\xi) \cdot \delta_s \operatorname{sen} 2\pi s\xi . \end{cases}$$

Questi, per note formole di trigonometria, diventano

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha_r\gamma_s[\cos 2\pi(rax - (rb - s)\xi) + \cos 2\pi(rax - (rb + s)\xi)] \\ \frac{1}{2}\alpha_r\delta_s[\operatorname{sen} 2\pi(rax - (rb - s)\xi) - \operatorname{sen} 2\pi(rax - (rb + s)\xi)] \\ \frac{1}{2}\beta_r\gamma_s[\operatorname{sen} 2\pi(rax - (rb - s)\xi) + \operatorname{sen} 2\pi(rax - (rb + s)\xi)] \\ \frac{1}{2}\beta_r\delta_s[-\cos 2\pi(rax - (rb - s)\xi) + \cos 2\pi(rax - (rb + s)\xi)] \end{cases} \quad r, s \text{ interi positivi arbitrarî.}$$

Integrando rispetto a ξ fra i limiti 0 ed 1, e tenuto conto della periodicità delle funzioni, si vede che tali termini dànno come risultato 0, se $(rb - s)$ ed $(rb + s)$ sono diversi da zero.

Se invece è $rb - s = 0$ (ed allora la $rb + s = 0$ non avrà soluzioni, poichè r, s sono positivi e b deve essere positivo, i quattro termini soprascritti si riducono, dopo l'integrazione, a

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\alpha_r \gamma_s (\cos 2\pi r a x) \\ \frac{1}{2}\alpha_r \delta_s (\text{sen } 2\pi r a x) \\ \frac{1}{2}\beta_r \gamma_s (\text{sen } 2\pi r a x) \\ -\frac{1}{2}\beta_r \delta_s (\cos 2\pi r a x) \end{array}\right. \qquad (s = rb, \ b > 0).$$

Se invece è $rb + s = 0$ (ed allora $b < 0$, e la $rb - s = 0$ non avrà soluzioni), avremo

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\alpha_r \gamma_s (\cos 2\pi r a x) \\ -\frac{1}{2}\alpha_r \delta_s (\text{sen } 2\pi r a x) \\ \frac{1}{2}\beta_r \gamma_s (\text{sen } 2\pi r a x) \\ \frac{1}{2}\beta_r \delta_s (\cos 2\pi r a x) \end{array}\right. \qquad (s = - rb, \ b < 0).$$

Quindi la (3) si scriverà

$$\gamma_r + \sum_1^\infty \gamma_r \cos 2\pi \varrho x + \sum_1^\infty \delta_\varrho \text{ sen } 2\pi\varrho x +$$
$$+ \lambda \left\{ \alpha_0 \gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (\alpha_r \gamma_s \mp \beta_r \delta_s) \cos 2\pi r a x + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (\pm \alpha_r \delta_s + \beta_r \gamma_s) \text{ sen } 2\pi r a x \right\}$$

ove si prenda il segno superiore per $b > 0$, e l'inferiore per $b < 0$, mentre

$$s = \pm rb.$$

3. Dovendo essere identicamente nullo tale sviluppo, se ne deduce che nei primi due sommatori sono nulle tutte le γ, δ che non hanno un indice multiplo di a; se invece esso è eguale ad ha, avremo

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_0 + \lambda \alpha_0 \gamma_0 = 0 \\ \gamma_\varrho + \frac{\lambda}{2}(\alpha_r \gamma_s \mp \beta_r \delta_s) = 0 \\ \delta_\varrho + \frac{\lambda}{2}(\pm \alpha_r \delta_s + \beta_r \gamma_s) = 0 \end{array}\right. \qquad \varrho = ha \ , \ s = |rb|.$$

Se $a = 1$, $b = \pm 1$, se cioè il nucleo di Evans è di classe $(1, \pm 1)$, le equazioni ora scritte diventano

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_0 + \lambda \alpha_0 \gamma_0 = 0 \\ \gamma_r + \frac{\lambda}{2}(\alpha_r \gamma_r \mp \beta_r \delta_r) = 0 \\ \delta_r + \frac{\lambda}{2}(\pm \alpha_r \delta_r + \beta_r \gamma_r) = 0 . \end{array}\right.$$

Epperò, considerando le α, β come assegnate, e le γ, δ come incognite, sarà sempre

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0 & \text{se } (1 + \lambda\alpha_0) \neq 0 \\ \gamma_0 \text{ qualunque} & \text{se } (1 + \lambda\alpha_0) = 0 \end{cases}$$

ed inoltre $\gamma_r = \delta_r = 0$, se

$$D_r(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\lambda}{2}\alpha_r & \mp\frac{\lambda}{2}\beta_r \\ \frac{\lambda}{2}\beta_r & 1 \pm \frac{\lambda}{2}\alpha_r \end{vmatrix} \neq 0 ;$$

mentre, se $D_r = 0$, γ_r, δ_r potranno essere diversi da zero.

Quindi, per i nuclei di Evans di classe $(1, \pm 1)$, vale il

Teorema VI. — *Sviluppato il nucleo $n(x \pm y)$ in serie di Fourier, ed indicati con $\alpha_0, \alpha_r, \beta_r$ i suoi coefficienti di Fourier, gli autovalori sono le radici delle equazioni di secondo grado*

$$\begin{cases} 1 + \lambda\alpha_0 = 0 \\ D_r(\lambda) \quad = 0 \end{cases} \qquad (r \geqq 1) .$$

Le autofunzioni sono poi combinazioni lineari del seno e del coseno di $2\pi r_1 x$, $2\pi r_2 x$, ... ove

$$D_{r_1}(\lambda) = D_{r_2}(\lambda) = \cdots = 0 .$$

Se il nucleo non fosse di classe $(1, -1)$, ma di classe (a, b) ove però $a \neq \pm b$, allora dal suo sviluppo in serie trigonometrica, e da quello dei suoi iterati — i quali sono rispettivamente delle classi

$$\left(\frac{a^2}{d_1}, \frac{b^2}{d_1}\right), \left(\frac{a^3}{d_1}, \frac{b^3}{d_1}\right), \ldots \quad —$$

si deduce che tutte le tracce dei nuclei iterati sono nulle, se è nulla la costante α_0; oppure sono legate dalla relazione

$$n_p = \alpha_0 \,.\, n_{p-1} \quad ; \quad n_1 = \alpha_0 \quad ; \quad n_p = \alpha_0^p$$

il che implica che il *nucleo non ha altri autovalori* che $1 + \lambda\alpha_0 = 0$, ed altre autofunzioni che $\varphi = \text{cost}$.

Nel caso, infine, che fosse $a = \pm b$, la discussione procederebbe in modo del tutto analogo a quella del nucleo di classe $(1, \pm 1)$; basta considerare che il nucleo n_1 e la funzione φ avranno il periodo $\frac{1}{a}$, per ridursi, mediante la trasformazione $x' = ax$, $y' = ay$, $\lambda' = \frac{\lambda}{a}$, al nucleo di classe $(1, \pm 1)$.

6. Se si avessero invece delle equazioni di prima specie

$$\int_0^1 n(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

si trova, come prima condizione necessaria per la risolubilità, che la $f(x)$ sia periodica, a periodo 1. Quindi, adottando il solito sviluppo in serie, ne segue che deve essere

$$\alpha_0 \gamma_0 + \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty (\alpha_r \gamma_s \mp \beta_r \delta_s) \cos 2\pi r a x +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty (\pm \alpha_r \delta_s + \beta_r \gamma_s) \operatorname{sen} 2\pi r a x = f(x) = \varepsilon_0 +$$

$$+ \sum_1^\infty \varepsilon_\rho \cos 2\pi \varrho x + \sum_1^\infty \theta_\rho \operatorname{sen} 2\pi \varrho x \qquad s = |rb|$$

Ciò obbliga $\varepsilon_\rho, \theta_\rho$ ad essere nulli se non è ϱ multiplo di a, mentre si ha

$$\begin{aligned} \alpha_0 \gamma_0 &= \varepsilon_0 & r &= 1, 2, \ldots \\ \tfrac{1}{2} (\alpha_r \gamma_s \mp \beta_r \delta_s) &= \varepsilon_\rho & s &= |rb| \\ \tfrac{1}{2} (\pm \alpha_r \delta_s + \beta_r \gamma_s &= \theta_\rho & \varrho &= ra \end{aligned}$$

ove per semplicità negli indici si è segnato s invece di $|rb|$, ϱ invece di ra.

Si vede che il determinante dei coefficienti di γ_s, δ_s, coefficiente del Fourier della φ, cioè

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} \alpha_r & \mp \beta_r \\ \beta_r & \pm \alpha_r \end{vmatrix}$$

è sempre eguale a $\pm \frac{1}{4} \cdot (\alpha_r^2 + \beta_r^2)$: ed è quindi diverso da zero, a meno che non siano nulli α_r e β_r. Nel primo caso, dati ε_ρ e θ_ρ ; γ_s e δ_s restano fissati in modo unico; e se $\varepsilon_\rho, \theta_\rho$ sono nulli (il che avviene sempre che ϱ non sia multiplo di a), saranno nulli anche γ e δ.

Nel secondo, invece, ε_ρ e θ_ρ dovranno essere eguali a zero; e γ_s, δ_s potranno invece essere qualunque.

Quindi, *fra le* γ_s *e le* δ_s, *sono arbitrarî:*
quelli aventi l'indice s *non multiplo di* b;
quelli aventi l'indice $s = |rb|$, *se si ha* $\alpha_r = \beta_r = 0$.
Sono fissati in modo unico:
quelli aventi l'indice $s = |rb|$, *se* $\alpha_r^2 + \beta_r^2 \neq 0$.

La funzione f, a sua volta, dovrà avere nulli tutti i coefficienti di Fourier il cui indice non è multiplo di a, e quelli per cui $\alpha_r = \beta_r = 0$.

Se, infine, chiamiamo nuclei generali di Evans gli aggregati (delle serie, purchè, ad esempio, uniformemente convergenti) di nuclei di Evans di classe diversa, si vede che i teoremi continuano a valere; così ad es. si ha:

TEOREMA VII. — *La composizione di due nuclei generali di Evans dà ancora un nucleo generale di Evans; essi quindi formano gruppo. Con procedimenti analoghi a quelli svolti finora, si potrebbero determinare le tracce, gli autovalori, e autofunzioni di tali nuclei.*

Meccanica celeste. — *Osservazioni sopra una recente teoria della luce zodiacale.* Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE [1].

1. Una spiegazione, certamente assai elegante, della luce zodiacale è stata data di recente dal sig. B. Fessenkoff in una Nota pubblicata nel vol. 198 delle Astronomische Nachrichten, e riprodotta quindi in altre riviste scientifiche; per es. C. R. 1914, pp. 541 e 1001 ecc.

Quest'astronomo suppone che tutte le comete entrino nella sfera d'attrazione del Sole con velocità tale che la loro orbita riesca esattamente parabolica: una gran parte di esse è quindi catturata da Giove e trasformata in comete ellittiche secondo le formole notissime del Tisserand.

Secondo il Fessenkoff, sono appunto i *resti di un gran numero di queste comete ellittiche* che, circolando intorno al Sole e riflettendone la luce, dànno origine a quella nube a forma di lente che si estende per parecchi gradi lungo l'eclittica, da una parte e dall'altra del Sole, e che viene conosciuta sotto il nome di luce zodiacale. Una teoria analoga era stata proposta dallo Charlier per spiegare il cosidetto « Gegenschein » (apparenza luminosa che si scorge nel cielo in direzione opposta al Sole) supponendo che un gruppo di aereoliti si mantenga nelle vicinanze del secondo centro di librazione lagrangiano, situato sulla retta Sole-Terra dalla parte opposta al Sole rispetto alla Terra.

L'ipotesi del Fessenkoff ha il vantaggio di spiegare facilmente perchè la luce zodiacale si trovi presso a poco nel piano dell'eclittica, giacchè egli dimostra che le comete la cui orbita si trova nel piano dell'orbita di Giove, hanno la massima probabilità di essere catturate: ma superato questo punto sorgono gravi difficoltà.

Infatti, mentre nulla v'è da osservare nella teoria dello Charlier, è strano come non sia stato ancor rilevato che una formola fondamentale a cui giunge il Fessenkoff è in diretta opposizione con una formola analoga data dal

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1916.

prof. G. V. Schiaparelli nella sua Memoria: *Sulle relazioni fra le comete, le stelle cadenti e i meteoriti* (Istit. lombardo, 1871); ciò che rende necessario un accurato esame della teoria del Fessenkoff. Ed è appunto su ciò che cominceremo a richiamare l'attenzione del lettore.

2. Sia S il Sole e Σ la sfera di preponderante attrazione solare. Indichiamo con r_0 il raggio di Σ e calcoliamoci la probabilità P_0^q perchè una cometa *parabolica* entrando in Σ, dia origine ad un'orbita avente una distanza perieliaca minore od uguale a q.

Lo Schiaparelli propone la seguente costruzione geometrica. Descritta una sfera s di raggio $\sqrt{\frac{2}{r_0}}$, costruiamo un iperboloide rotondo ad una falda, avente il medesimo centro, e la cui equazione in coordinate polari sia

$$(1) \qquad \nu^2 (r_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - q^2) = 2q\left(1 - \frac{q}{r_0}\right)$$

dove ν è il raggio vettore e φ l'angolo che esso forma con l'asse dell'iperboloide. Esso staccherà sulla sfera s due calotte sferiche s_1 ed s_2 uguali ed opposte.

Ciò posto lo Schiaparelli dimostra che nel caso di comete paraboliche, la probabilità P_0^q è precisamente uguale al rapporto tra la somma delle due aree s_1 ed s_2 e l'area della sfera S.

3. Fatto il calcolo, che è elementarissimo, si ha subito

$$(1) \qquad P_0^q = 1 - \sqrt{1 - \frac{q}{r_0}}.$$

Se vogliamo la probabilità p_q affinchè la distanza perieliaca sia compresa tra q e $q + \delta q$, essendo δq una quantità estremamente piccola in nostro arbitrio, non ci resta che differenziare ottenendo:

$$(2) \qquad p_q = \frac{\delta q}{2\sqrt{r_0(r_0 - q)}}$$

che è la formola dello Schiaparelli.

Il Fessenkoff, chiamando con α l'angolo d'ingresso d'una cometa parabolica in Σ e partendo dalla nota equazione $q = r_0 \operatorname{sen}^2 \alpha$, trova invece la formola

$$(3) \qquad p_q = \frac{\delta q}{\pi \sqrt{q(r_0 - q)}}$$

che è in opposizione con quella (2) dello Schiaparelli.

Se supponiamo, come è lecito, r_0 assai grande rispetto a q, la formola dello Schiaparelli diviene:

$$p_q = \frac{\delta q}{2r_0}, \tag{4}$$

cioè p_q è indipendente da q: cosa perfettamente logica.

Ed infatti avendo immaginato che tutte le comete partano da distanza estremamente grande, con velocità estremamente piccola dell'ordine di $\frac{1}{r_0}$ (condizione necessaria affinchè l'orbita sia parabolica) ed avendo di più supposto che tutte le direzioni iniziali siano ugualmente favorite, noi non abbiamo alcun motivo di scommettere che la distanza perieliaca sia compresa tra q_1 e $q_1 + \delta q$, piuttostochè tra q_2 e $q_2 + \delta q$.

Invece la formola (3) del Fessenkoff ci darebbe, in analoghe condizioni,

$$p_q = \frac{\delta q}{\pi \sqrt{q r_0}} \tag{5}$$

da cui risultano preferite le piccole distanze perieliache: anzi la probabilità che q sia compresa tra 0 e δq, risulterebbe *infinitamente maggiore* della probabilità di q compresa tra q_1 e $q_1 + \delta q$: cosa che evidentemente ripugna.

4. Queste semplici considerazioni basterebbero già a farci vedere da qual parte sia l'esattezza, se uno studio accurato della questione non ci mettesse in grado di appianare ogni difficoltà, mostrando che le due vie conducono realmente allo stesso risultato, e che, senza una svista nel calcolo, il Fessenkoff sarebbe giunto allo stesso risultato dello Schiaparelli.

Ed è questo appunto che passiamo a dimostrare.

Il Fessenkoff considera le comete che entrano nella sfera d'attrazione solare per un punto K, e suppone con lo Schiaparelli che tutte le direzioni siano ugualmente favorite. Passa poi ad esaminare quelle comete la cui orbita cade sul piano $z = 0$ e cerca la probabilità affinchè l'angolo d'ingresso in Σ, sia compreso tra α e $\alpha + \delta\alpha$. Egli la pone uguale a $\frac{\delta\alpha}{\pi}$, ciò che è in contrasto con la prima ipotesi; ed è precisamente questa inesattezza iniziale che vizia tutto il calcolo successivo [1].

[1] Un errore interamente analogo si commetterebbe se, volendo studiare la probabilità p perchè due stelle S S' distino non più di 10', si ragionasse nel modo seguente. Consideriamo il cerchio massimo passante per S ed S', prendiamo S come origine e chiamiamo con α la distanza angolare SS'. Poichè tutte le distanze angolari sono ugualmente probabili, assumiamo $\frac{\delta\alpha}{\pi}$ come misura della probabilità che α cada tra α_1 e $\alpha_1 + \delta\alpha$.

La probabilità domandata perchè sia $\widehat{SS'} \leqq 10'$, sarà allora

$$p = \frac{\text{arc } 10'}{\pi} = \frac{1}{1080}.$$

La *vera probabilità è invece* $p = \frac{1}{236362}$. Si veda p. es. Bertrand, *Calcul des probabilités*, pag. 7, e Poincaré, id. id., pag. 123.

Infatti, secondo lo spirito del calcolo delle probabilità, il considerare le comete la cui orbita giace sopra un piano P (per es. $z = 0$) *non è che una locuzione abbreviata con la quale s' intende di considerare le comete la cui orbita é compresa tra il piano* P *ed un piano infinitamente prossimo* P'.

Basta consultare un trattato qualsiasi per persuadersene.

Il problema fondamentale del Fessenkoff va quindi posto nella seguente maniera:

« *Una cometa* C *entra nella sfera d'attrazione solare* Σ. *Si sa che* « *la sua orbita è compresa tra il piano* P ($z = 0$) *ed un piano estrema-* « *mente prossimo* P'; *qual' è la probabilità affinchè la direzione d'ingresso* « *formi con la normale un angolo compreso tra* α *e* $\alpha + \delta\alpha$, *supposte tutte le direzioni ugualmente favorite?* ».

È facile rispondere. I due piani P e P' passando per il centro solare S (fuoco comune di tutte le orbite) e per il punto K d' ingressso della cometa, si taglieranno lungo il raggio vettore KS. Sia $\delta\eta$ l'angolo diedro che essi formano. Centro in K descriviamo una sfera σ di raggio unitario e consideriamo la porzione λ della sua superficie compresa fra i due piani ed interna alla sfera d'attrazione solare Σ. Sarà $\lambda = 2d\eta$. Per ipotesi la direzione d'ingresso della cometa considerata giacerà lungo una semiretta unente K con un punto qualunque dell'area λ.

Ciò posto, consideriamo ancora due coni rotondi c_1, c_2, aventi per vertice K, per asse la normale KS e le cui generatrici formino con l'asse angoli rispettivamente uguali ad α pel primo cono, e ad $\alpha + \delta\alpha$ pel secondo.

Essi staccheranno sulla parte di σ interna a Σ, una zona sferica μ di area $2\pi \operatorname{sen} \alpha \delta\alpha$, la quale avrà in comune con λ due aree uguali ed opposte m_1 ed m_2 tali che

$$\frac{m_1 + m_2}{\lambda} = \frac{2\,\delta\eta \operatorname{sen} \alpha\, d\alpha}{2\,\delta\eta} = \operatorname{sen} \alpha\, \delta\alpha. \tag{6}$$

Ora, affinchè la velocità d' ingresso della cometa faccia con la normale un angolo compreso tra α e $\alpha + \delta\alpha$, è necessario e sufficiente che la semiretta su cui giace tagli λ in punti appartenenti ad m_1 o ad m_2.

La probabilità richiesta è quindi data da $\operatorname{sen} \alpha\, \delta\alpha$ e non già da $\frac{\delta\alpha}{\pi}$, come pone il Fessenkoff. Si ha poi immediatameute

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \alpha\, d\alpha = 1\,, \tag{7}$$

come semplice verificazione.

5. Mostriamo ora che il metodo del Fessenkoff, una volta corretta questa inesattezza, riconduce all'equazione (2) dello Schiaparelli.

Indicando ora V_0 la velocità d'ingresso, con W la velocità al perielio, con fM il prodotto della massa solare per il coefficiente attrattivo, abbiamo col Fessenkoff, in virtù del teorema della forza viva nel caso del moto parabolico:

$$(8) \quad V_0^2 = \frac{2fM}{r_0} ; \qquad (8^{bis}) \quad W^2 = \frac{2fM}{q} .$$

Il teorema delle aree ci da poi, paragonando l'istante d'ingresso in Σ con l'istante in cui la cometa è al perielio:

$$(9) \qquad r_0 V_0 \operatorname{sen} \alpha = qW .$$

Eliminando V_0 e W per mezzo delle (8) e (8^{bis}) abbiamo col Fessenkoff

$$(10) \qquad q = r_0 \operatorname{sen}^2 \alpha ,$$

Da questa, differenziando e riducendo, si ottiene

$$(11) \qquad \delta\alpha = \frac{\delta q}{2\sqrt{q(r_0 - q)}}$$

da cui infine, servendoci delle (10), abbiamo:

$$(12) \qquad \operatorname{sen} \alpha \, \delta\alpha = \operatorname{sen} \alpha \frac{\delta q}{2\sqrt{q(r_0 - q)}} = \frac{\delta q}{2\sqrt{r_0(r_0 - q)}} .$$

Ma il primo membro, come abbiamo visto, è la probabilità che α sia compreso tra α e $\alpha + \delta\alpha$: quindi avremo come probabilità p_q che q cada tra q e $q + \delta q$:

$$(13) \qquad p_q = \frac{\delta q}{2\sqrt{r_0(r_0 - q)}} .$$

Abbiamo così mostrato che anche l'equazione (10), *da cui parte il Fessenkoff, riconduce alla formola* (2) *dello Schiaparelli purchè il calcolo venga condotto con rigore. Resta quindi stabilito che delle due equazioni* (2) *e* (3) *solo quella* (2) *data dallo Schiaparelli è valida.*

6. Passando a considerare le comete la cui orbita si trova presso a poco nel piano dell'orbita di Giove (o ciò che è lo stesso, presso a poco nel piano dell'eclittica), l'autore chiama con h la distanza tra Giove e la cometa nel momento in cui questa attraversa per la prima volta l'orbita del pianeta, e suppone, senza dimostrarlo, che la probabilità che h sia compresa tra h_1 e $h_1 + \delta h$ sia uguale a $c\,\delta h$ ($c =$ costante), cioè che non dipenda da h_1.

Anche su questo è difficile convenire.

Ammettiamo, in mancanza di ogni altra nozione, che in tempi uguali entrino in Σ uguale numero di comete, e supponiamo l'orbita di Giove circolare, come prima approssimazione. Ne risulta, come conseguenza, che la probabilità che l'arco γ dell'orbita di Giove compreso tra il punto in cui essa è attraversata dalla cometa e il punto in cui in quell'istante si trova il pianeta cadà tra γ_1 e $\gamma_1 + \delta\gamma$ è indipendente da γ_1.

Essendo h la corda dell'arco γ data dall'equazione

$$h = 2\varrho \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\gamma \,. \tag{14}$$

dove ϱ è il raggio dell'orbita, la probabilità p_h di h compresa tra h e $h + \delta h$ sarà quindi data da

$$p_h = \text{cost.} \frac{\delta h}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{4\varrho^2}}} \,. \tag{15}$$

Come si vede il Fessenkoff ha confuso l'arco con la corda senza che se ne scorga il motivo.

7. Una volta giunti a questa conclusione, noi vediamo che la formola data dal Fessenkoff per calcolare l'intensità della luce zodiacale,

$$\iint \frac{D}{\sqrt{q}} \, dq \, dh \,, \tag{16}$$

dove D è una quantità su cui ora non insistiamo, va sostituita con l'altra:

$$\iint \frac{D}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{4\varrho^2}}} \, dq \, dh \,. \tag{17}$$

Chiamando con ω la distanza angolare del Sole e determinando le costanti in modo da avere l'uguaglianza per $\omega = 50°$, il Fessenkoff ottiene per mezzo della (16) i seguenti risultati:

ω	34°	38°	42°	46°	50°
Intens. calcol.	29,9	24,6	20,7	17,5	15,6
Intens. osserv.	27,5	23,8	20,6	17,9	15,6

In realtà però la (16) *va sostituita con la* (17), *ma allora il calcolo numerico mostra che l'osservazione non s'accorda più con la teoria.*

8. Riepilogando: Come già tante volte è avvenuto nella Meccanica Celeste, anche ora siamo costretti a riconoscere che l'accordo era *soltanto apparente*, perchè dovuto ad inesattezza nel calcolo. *In realtà l'accordo non esiste.* Dobbiamo quindi concludere che la nuova teoria sulla luce zodiacale non può accettarsi, se non venga prima assoggettata a cambiamenti radicali.

9. Precisando, a me sembra che la teoria del Fessenkoff potrebbe modificarsi nel modo seguente:

Poichè tra tutte le comete entranti nella sfera d'attrazione solare, solo quelle, le cui orbite sono situate presso a poco nel piano dell'orbita di Giove, hanno grande probabilità di essere catturate, è chiaro che i resti di queste comete dovranno alla lunga formare una nube giacente in questo piano. I numerosissimi meteoriti che la compongono si muoveranno in orbite quali più quali meno ellittiche, ruotando intorno al Sole alcuni in senso diretto, altri in senso retrogrado, secondo il moto della cometa primitiva. Avverranno quindi necessariamente urti numerosi, in seguito ai quali i meteoriti urtati tenderanno a cadere verso il Sole. Dopo un tempo lunghissimo la nube zodiacale avrà assunto perciò una grande densità nelle vicinanze del Sole e diverrà più rada man mano che ci allontaniamo da esso, il che è in buon accordo con l'osservazione.

Matematica. — *Sulle discontinuità delle funzioni scalari e vettoriali e delle loro derivate nel passaggio attraverso una superficie.* Nota di P. Burgatti, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Lo studio delle discontinuità delle funzioni scalari, dei vettori e delle loro derivate nel passaggio attraverso una superficie. si suol fare con mezzi speciali dipendenti dalla particolar forma delle funzioni che si sottopongono ad esame. Così, ad esempio, pei potenziali newtoniani. In tal modo sfuggono le proprietà di carattere generale, e si è costretti di rifarne interamente lo studio caso per caso. Per questo credo interessante la presente Nota, contenente una rigorosa e generale ricerca della natura, direi, geometrica delle discontinuità indipendentemente dalla special forma delle funzioni, fatta con mezzi rapidi e semplici. Dalle applicazioni, che ho brevemente accennate, risulterà chiaramente la sua utilità. Per l'analisi vettoriale ho seguìto l'opera di Burali-Forti e Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, Tome I.

1. — Preliminari.

La grandezza scalare φ e il vettore $\mathbf{u}$ son definiti in un campo S luogo dei punti M, nel quale s'immagina tracciata una superficie σ (aperta o chiusa) luogo dei punti P. Distinguendo le due facce σ_1 e σ_2 di σ, indicheremo con $\mathbf{n}$ il vettore unitario che definisce la normale in un punto generico P nel senso da σ_1 a σ_2; con φ_1, $\mathbf{u}_1$ e φ_2, $\mathbf{u}_2$ i valori di φ e $\mathbf{u}$ nelle

[1] Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1916.

regioni rispettivamente adiacenti alle facce σ_1 e σ_2. Circa il comportamento di queste grandezze attraverso σ, considereremo due casi: il caso della continuità, caratterizzato da

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0 \qquad \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = 0 \qquad (\text{su } \sigma);$$

e quello della discontinuità, caratterizzato da

$$\varphi_2 - \varphi_1 = [\varphi] \neq 0 \quad , \quad \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = [\mathbf{u}] \neq 0 \qquad (\text{su } \sigma);$$

rappresentando in generale la discontinuità di una grandezza col simbolo relativo alla grandezza racchiuso in una parentesi quadra.

Chiameremo *gradiente superficiale di* φ, e lo indicheremo con *grad*$_\sigma$, il vettore definito nei punti P di σ da

$$\text{grad}_\sigma \varphi = \text{grad}\, \varphi - (\text{grad}\, \varphi \times \mathbf{n})\, \mathbf{n}\,,$$

dove il grad φ del secondo membro è l'ordinario gradiente di φ in P, quando φ è definita con continuità in tutto S; mentre rappresenta il limite dell'ordinario gradiente per M tendente a P, quando φ è definita con continuità da un sol lato di σ [1]. Per uno spostamento dP lungo σ risulta

$$\text{grad}_\sigma \varphi \times d\text{P} = \text{grad}\, \varphi \times d\text{P} = d\varphi\,, \tag{1}$$

essendo $d\varphi$ l'incremento di φ corrispondente a dP. Di qui si vede che grad$_\sigma$ è effettivamente un operatore sopra σ [2], che gode delle stesse proprietà dell'operatore spaziale grad; onde si ha

$$\text{grad}_\sigma(\varphi + \psi) = \text{grad}_\sigma \varphi + \text{grad}_\sigma \psi \;,\; \text{grad}_\sigma(\varphi\psi) = \varphi\, \text{grad}_\sigma \psi + \psi\, \text{grad}_\sigma \varphi.$$

Introdurremo inoltre *la derivata superficiale del vettore* $\mathbf{u}$, col simbolo $\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\text{P}}\right)_\sigma$, mediante la formula di definizione

$$\left(\frac{du}{d\text{P}}\right)_\sigma = \frac{d\mathbf{u}}{d\text{P}} - \text{H}\left(\mathbf{n}\,, \frac{d\mathbf{u}}{d\text{P}}\, \mathbf{n}\right).$$

[1] Il gradiente superficiale fu già introdotto da Burali-Forti nella Memoria: *Fondamenti per la geometria differenziale* ... Rend. Circ. Mat. Palermo, 1912. Non è altro che la componente di grad φ sul piano tangente a σ in P.

[2] Questo operatore, insieme ad altri che ho avuto occasione di considerare per varie ricerche, ha grande importanza nella teoria delle superficie. Per esempio

$$(\text{grad}_\sigma \varphi)^2 \;,\; \text{grad}_\sigma \varphi \times \text{grad}_\sigma \psi$$

sono rispettivamente il parametro differenzial primo di φ, e il parametro differenzial misto di φ e ψ relativi a σ.

Veramente nel secondo membro bisognerebbe scrivere

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}\right)_{\text{per M=P}},$$

sia per chiarezza, sia per comprendere anche il caso in cui $\mathbf{u}$ sia definito con continuità da un sol lato di σ. Ma abbiamo scritto così per semplicità; ed il lettore, ora avvertito, non cadrà in equivoco. Ricordiamo che in generale $\mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ rappresenta una diade (omografia degenere), definita dall'operazione $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$; talchè si ha

$$\mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b}.$$

Risulta subito, per ogni spostamento $d\mathrm{P}$ sopra σ,

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)_\sigma d\mathrm{P} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\, d\mathrm{P} = d\mathbf{u}, \tag{2}$$

essendo $d\mathbf{u}$ l'incremento di $\mathbf{u}$ corrispondente a $d\mathrm{P}$. Di qui si vede che la derivata superficiale d'un vettore è effettivamente una omografia che gode delle stesse proprietà della derivata spaziale.

Si noti infine che, quando φ e $\mathbf{u}$ sono definiti nei soli punti P di σ, $\mathrm{grad}_\sigma \varphi$ e $\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)_\sigma$ sono equivalenti a $\mathrm{grad}\,\varphi$ e $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$; o meglio, questi ultimi enti non si possono concepire che nel senso dei primi. Si ha in tal caso

$$\mathrm{grad}_\sigma \varphi \times \mathbf{n} = \mathrm{grad}\,\varphi \times \mathbf{n} = 0 \quad , \quad \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)_\sigma \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{n} = 0.$$

2. — Comportamento di $\mathrm{grad}\,\varphi$ attraverso σ.

Essendo φ definita in tutto S, partiamo dal punto P di σ e passiamo al punto vicinissimo $\mathrm{P} + d\mathrm{P}$ pure di σ; ma restando, una volta sulla faccia σ_1, una seconda volta sulla σ_2. Si ottiene manifestamente, per quanto si è detto,

$$d\varphi_1 = \mathrm{grad}_\sigma \varphi_1 \times d\mathrm{P} \quad , \quad d\varphi_2 = \mathrm{grad}_\sigma \varphi_2 \times d\mathrm{P};$$

da cui

$$d\varphi_2 - d\varphi_1 = (\mathrm{grad}_\sigma \varphi_2 - \mathrm{grad}\,\varphi_1) \times d\mathrm{P}. \tag{4}$$

Distinguiamo per chiarezza i due casi sopra distinti.

1° caso. La φ è continua anche attraverso σ. Allora la (4) dà

$$(\mathrm{grad}_\sigma \varphi_2 - \mathrm{grad}_\sigma \varphi_1) \times d\mathrm{P} = 0;$$

od anche, per la (1),

$$(\mathrm{grad}\,\varphi_2 - \mathrm{grad}\,\varphi_1) \times d\mathrm{P} = 0.$$

Ma la differenza tra parentesi non è altro che la discontinuità che prova grad φ attraverso σ; dunque

$$[\text{grad}\,\varphi] \times dP = 0\,.$$

Poichè ogni dP è normale a $\mathbf{n}$, ne consegue

$$[\text{grad}\,\varphi] = m\,\mathbf{n}\,, \tag{5}$$

essendo m un numero funzione di P. Questo m rappresenta manifestamente la discontinuità della derivata normale di φ (cioè di grad $\varphi \times \mathbf{n}$). Si conclude: *se attraverso σ il gradiente d'una funzione continua è discontinuo, la discontinuità in ogni punto* P *è rappresentata da un vettore parallelo alla normale in* P *e di grandezza e segno uguale alla discontinuità della derivata normale.* Perciò la discontinuità di questa derivata definisce la discontinuità di ogni altra derivata prima in qualsiasi direzione.

2° caso. La φ è discontinua attraverso σ. Allora la (4) dà

$$\begin{aligned} d[\varphi] &= (\text{grad}_\sigma\,\varphi_2 - \text{grad}_\sigma\,\varphi_1) \times dP \\ &= (\text{grad}\;\;\varphi_2 - \text{grad}\;\;\varphi_1) \times dP\,. \end{aligned}$$

Ma ricordando che in questo caso si ha (con manifesto significato dei simboli)

$$\text{grad}\,\varphi_2 = \lim_{M_2=P} \text{grad}_{M_2}\,\varphi \quad , \quad \text{grad}\,\varphi_1 = \lim_{M_1=P} \text{grad}_{M_1}\,\varphi\,,$$

si deduce che la differenza tra parentesi rappresenta la discontinuità di grad φ attraverso σ. Dunque

$$d[\varphi] = [\text{grad}\,\varphi] \times dP\,.$$

D'altra parte

$$d[\varphi] = \text{grad}_\sigma\,[\varphi] \times dP\,;$$

per conseguenza

$$\{[\text{grad}\,\varphi] - \text{grad}_\sigma\,[\varphi]\} \times dP = 0\,.$$

Poichè ogni dP è normale a $\mathbf{n}$, si trae

$$[\text{grad}\,\varphi] = \text{grad}_\sigma\,[\varphi] + m\,\mathbf{n}\,, \tag{6}$$

ove m ha il significato precedente. Si conclude: *Se una funzione è discontinua attraverso σ* (discontinuità variabile con P), *anche il suo gradiente è discontinuo; e la discontinuità è uguale al gradiente superficiale della discontinuità della funzione* (*vettore tangenziale*) *più un vettore normale a σ di grandezza e segno uguale alla discontinuità della derivata normale.* Perciò la discontinuità della funzione e di questa derivata definiscono la discontinuità d'ogni altra prima derivata in qualsiasi direzione.

Inversamente: se la discontinuità del gradiente è del tipo (5); ossia è rappresentata da un vettore parallelo in ogni punto di σ alla normale; la funzione o è continua attraverso σ, o ha una discontinuità costante; se invece è rappresentata da un vettore non parallelo alla normale, la funzione è discontinua attraverso σ, con discontinuità variabile.

3. — COMPORTAMENTO DI $\frac{d\mathbf{u}}{dM}$ ATTRAVERSO σ.

Ragionando sopra $\mathbf{u}$ come già si è fatto con φ, si trova

$$d\mathbf{u}_1 = \left(\frac{d\mathbf{u}_1}{dP}\right)_\sigma dP \quad , \quad d\mathbf{u}_2 = \left(\frac{d\mathbf{u}_2}{dP}\right)_\sigma dP ;$$

da cui

$$d\mathbf{u}_2 - d\mathbf{u}_1 = \left\{ \left(\frac{d\mathbf{u}_2}{dP}\right)_\sigma - \left(\frac{d\mathbf{u}_1}{dP}\right)_\sigma \right\} dP . \tag{7}$$

Se $\mathbf{u}$ è continuo, si vede ora subito che risulta, usando la (2),

$$\left[\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right] dP = 0 \ (^1).$$

Poichè $\mathbf{n} \times dP = 0$; indicando con $\mathbf{v}$ un vettore, si ha

$$(\mathbf{n} \times dP)\, \mathbf{v} = \mathrm{H}(\mathbf{n}, \mathbf{v})\, dP = 0 , \tag{7'}$$

per conseguenza dovrà essere

$$\left[\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right] = \mathrm{H}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) , \tag{8}$$

dove $\mathbf{v}$ è funzione di P [2]. Questo $\mathbf{v}$ rappresenta la discontinuità della derivata normale di $\mathbf{u}$, cioè di $\frac{d\mathbf{u}}{dM}\mathbf{n}$. *Se dunque attraverso σ la derivata d'un vettore continuo* (s'intende rispetto al punto di cui è funzione) *è discontinua, la discontinuità è rappresentata da una diade, i cui due vettori sono, uno quello che definisce la normale, l'altro quello che definisce la discontinuità della derivata normale del vettore.*

Quando $\mathbf{u}$ è discontinuo, la (7) dà, con ragionamenti analoghi a quelli già fatti,

$$d[\mathbf{u}] = \left[\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right] dP .$$

[1] Si dovrebbe scrivere $\left[\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right]_{M=P}$; ma la parentesi quadra avverte essa stessa che si è passati a un punto della superficie.

[2] Un fattore sarebbe inutile, perchè s'unirebbe a $\mathbf{v}$.

Tenendo conto della (7′) e della relazione

$$d[\mathbf{u}] = \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}}\, d\mathrm{P} \qquad \text{(l'indice } \sigma \text{ qui è inutile)}$$

si deduce

$$\left[\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}\right] = \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{H}(\mathbf{n}, \mathbf{v})\,. \tag{9}$$

Se dunque attraverso σ un vettore è discontinuo (con discontinuità variabile), *pure discontinua sarà la sua derivata rispetto al punto* ***di cui*** *è funzione; la discontinuità essendo definita dalla derivata della discontinuità del vettore* (che è pure un vettore) *rispetto ai punti della superficie, più la diade accennata nel teorema precedente*; il quale teorema del resto è corollario di questo.

Ne consegue che la discontinuità del vettore nel caso che sia discontinuo e quella della sua derivata normale in ogni caso definiscono le discontinuità delle derivate in qualsiasi direzione di qualunque componente del vettore.

Le proposizioni inverse sono evidenti.

Matematica. — *Gli hamiltoniani ed i gradienti del prodotto di due funzioni estensive.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1].

Nelle mie Note dal titolo: *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti* ecc. [pubblicate in questi medesimi Rendiconti [2]] che, nel seguito, indicherò complessivamente con *Npg*, conservando poi tutte le notazioni e definizioni in esse adoperate [epperò anche quelle delle Note [3] indicatevi coi simboli N I, N II, *Npr*], occupandomi della forma presa dall'hamiltoniano, e dal gradiente, rispetto ad una medesima formazione Ω, del prodotto di due funzioni estensive U, V, lasciai da parte, per le considerazioni speciali che, a differenza degli altri casi, esso merita, il sotto-caso β) del 3° caso. Ora, è scopo della presente Nota di colmare appunto una tale lacuna.

1. **a**) Il caso di cui si parla è quello nel quale i prodotti

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i}\,\mathrm{V} \mid \mathrm{E}_i \quad ; \quad \mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i} \mid \mathrm{E}_i \tag{1}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

[2] Cfr. fascicoli 7° e 8° precedenti.

[3] NI, NII nei Rend. di Napoli, fasc. luglio-agosto 1916; *Npr* in questi Rendic.

sono *misti*, ed allora può avvenire che sia applicabile a ciascuno di essi un teorema dato da E. Müller nel vol. 48, an. 1897, dei Matematische Annalen [1] sullo spezzamento di un prodotto misto in una certa somma di due altri prodotti analoghi. In tale ipotesi, con adattamento al caso nostro, ai suddetti prodotti è possibile dare la forma [2]

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} V \,|\, E_i &= \lambda \frac{\partial U}{\partial \omega_i} V \,|\, E_i + \lambda \mu U \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \,|\, E_i \,.\, V \\ U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \,|\, E_i &= \lambda' U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \,|\, E_i + \lambda' \mu' U \,|\, E_i \,.\, \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \end{aligned}$$

ove $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ sono delle potenze di (-1); e con una somma da $i=1$ ad $i=m$, per l'hamiltoniano, si avrà:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \nabla_\Omega(UV) = \lambda \Sigma \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \cdot V \,|\, E_i + \lambda' \mu' \Sigma U \,|\, E_i \frac{\partial V}{\partial \omega_i} + \\ + \lambda\mu \nabla_\Omega U \,.\, V + \lambda' U \,.\, \nabla_\Omega V \,. \end{aligned}$$

Ora, circa i prodotti (1), il suddetto teorema è applicabile quando sia:

1°. α) $\tau + \varrho' < n+1 \quad , \quad \sigma + \varrho' < n+1 \quad , \quad \sigma + \tau < n+1$,
nel qual caso si ha come condizione $\sigma + \tau + \varrho' = n+2$; o

β) $\tau + \varrho' > n+1 \quad . \quad \sigma + \varrho' > n+1 \quad , \quad \sigma + \tau > n+1$.
nel qual caso la condizione è $\sigma + \tau + \varrho' = 2n+1$.

2°. α) $\tau + \varrho' < n+1 \quad , \quad \sigma + \varrho' > n+1 \quad , \quad \sigma + \tau < n+1$,
nel qual caso si trova, come condizione, $\tau = 1$; o

β) $\tau + \varrho' > n+1 \quad , \quad \sigma + \varrho' < n+1 \quad , \quad \sigma + \tau > n+1$.
nel qual caso la condizione è $\tau = n$.

3°. α) $\tau + \sigma' > n+1 \quad , \quad \sigma + \varrho' < n+1 \quad , \quad \sigma + \tau < n+1$,
nel qual caso la condizione è $\sigma = 1$; o

β) $\tau + \varrho' < n+1 \quad , \quad \sigma + \varrho' > n+1 \quad , \quad \sigma + \tau > n+1$,
nel qual caso la condizione è $\sigma = n$.

4°. α) $\tau + \varrho' < n+1 \quad , \quad \sigma + \varrho' < n+1 \quad , \quad \sigma + \tau > n+1$,
nel qual caso la condizione è $\varrho' = 1$; o

[1] *Ueber das gemischte Product*, pag. 589 (cfr. spec. formule riassuntive, pp. 593, 594).

[2] Questa forma è diversa da quella che risulterebbe dall'applicazione pura e semplice del teorema del Müller, la quale richiederebbe che ai prlmi membri delle (2) figurassero i primi termini dei secondi membri sprovvisti dei coefficienti λ, λ'; ma con una moltiplicazione per λ, λ' delle due relazioni vien facile vedere come si può ridurre alle (21).

β) $\tau + \varrho' > n + 1$, $\sigma + \varrho' > n + 1$. $\sigma + \tau < n + 1$

nel qual caso è $\varrho' = n$ la condizione da verificarsi.

b) Circa i valori delle $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ che corrispondono ai varî casi messi in rilievo, si ha:

per 1°, α): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\tau}$, $\mu = \mu' = (-1)^{\rho(\tau+1)}$

" β): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\tau'}$. $\mu = \mu' = (-1)^{\rho(\tau'+1)}$

per 2°, α): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\sigma+\rho'-n=\sigma-\rho+1}$, $\mu = \mu' = (-1)^{\sigma+\rho'-n-1=\sigma-\rho}$

" β): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\rho-\sigma+1}$, $\mu = \mu' = (-1)^{\rho'-\sigma}$

per 3°, α): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\rho}$. $\mu = \mu' = (-1)^{\tau'(\rho+1)}$

" β): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\rho'}$, $\mu = \mu' = (-1)^{\tau(\rho'+1)}$

per 4°, α): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\sigma'}$, $\mu = \mu' = (-1)^{\sigma'-1}$

" β): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\sigma'}$. $\mu = \mu' = (-1)^{\tau'-1}$ (1):

dove si rammenta che $\sigma + \sigma' = \tau + \tau' = \varrho + \varrho' = n + 1$.

c) Analogamente, verificandosi le condizioni a cui si riducono le precedenti quando al posto di ϱ' si ponga ϱ, si potrà scrivere:

$$(4) \qquad \begin{aligned} G_\Omega(UV) = \lambda \left(U \,.\, G_\Omega V + \sum \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \cdot V \,|\, E_i \right) + \\ + \lambda\mu \left(G_\Omega U \,.\, V + \sum U\, E_i \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \right), \end{aligned}$$

con i valori per λ, μ che si deducono nei varî casi, da quelli testè dati, quando al posto di ϱ' si ponga ϱ.

2. a) Quando nessuno dei casi considerati in a) ha luogo, converrà, per formare il ∇_Ω ed il G_Ω del prodotto UV, o contentarsi di scrivere d'una maniera generica:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \nabla_\Omega(UV) &= (-1)^{\rho\rho'} \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_i} V + U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \right) \Big| E_i \\ G_\Omega(UV) &= \sum \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_i} V + U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \right) E_i , \end{aligned}$$

o formarsi dapprima la espressione ridotta del prodotto UV, e poi, a seconda del caso, applicare le (22), (22') date nella *Npg*, con quelle che ne sono immediata conseguenza, date nella medesima Nota.

(1) Questa tabella di valori, apparentemente disimmetrica, è stata confrontata con quella che dà il Müller a pp. 593 e 594 della Nota citata.

Seguiamo questa via che, del resto, ci procura altre informazioni, e ci mette in evidenza la portata dei termini additivi che si presentano nelle formule (3) e (4) precedenti quando è applicabile il teorema di E. Müller. Supponiamo che si abbia

$$(6)\qquad \begin{aligned} U &= U_1 . F_1 + U_2 . F_2 + \cdots + U_q . F_q \\ V &= V_1 . G_1 + V_2 . G_2 + \cdots + V_r . G_r , \end{aligned}$$

ove le $F_h , U_h (h = 1 , 2 , \dots , q)$ hanno il significato dato innanzi, e G_h , V_h per $h = 1 , 2 , \dots , r$ significato analogo; vale a dire siano $G_1 , G_2 , \dots , G_r$ le formazioni $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r} \left[i = 1 , 2 , \dots , r = \binom{n+1}{\tau} \right]$ ordinate come le E_h , F_h, e siano $V_1 , V_2 , \dots , V_r$ funzioni scalari delle $\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_m$.

b) Indicando con W il prodotto UV, cioè ponendo

$$(7)\qquad \begin{aligned} W = UV &= (U_1 . F_1 + U_2 . F_2 + \cdots + U_h . F_h)(V_1 . G_1 + V_2 . G_2 + \cdots + V_r . G_r) \\ &= U_1 V_1 . F_1 G_1 + \cdots + U_h V_k . F_h G_k + \cdots + U_q V_r . F_q G_r , \end{aligned}$$

si vede che sono a distinguersi, relativamente ad esso, i casi seguenti:

1° caso: $\sigma + \tau < n + 1$. In tal caso il prodotto generico $F_h G_k$ è nullo se le due permutazioni $h_1 h_2 \dots h_\sigma$, $k_1 k_2 \dots k_\tau$ hanno dei termini comuni; non lo è, e rappresenta una formazione semplice d'ordine $\sigma + \tau$, se sono formate di numeri tutti distinti. Per esaminare quanti prodotti $F_h G_k$ non sono nulli, basterà esaminare in quanti modi si può associare un gruppo σ dei numeri $1 , 2 , \dots , n + 1$ con un gruppo τ dei rimanenti, e ciò dà luogo ad

$$(8)\qquad \binom{n+1}{\sigma}\binom{n+1-\sigma}{\tau} = \binom{n+1}{\tau}\binom{n+1-\tau}{\sigma}$$

modi; ovvero ad esaminare in quanti modi è possibile togliere dal gruppo dei numeri $1 , 2 , \dots , n + 1$, un gruppo di $n + 1 - \sigma - \tau$, ed associarlo con un gruppo dei rimanenti presi τ a τ; e ciò dà luogo ad

$$(9)\qquad \binom{n+1}{\sigma+\tau}\binom{\sigma+\tau}{\tau} = \binom{n+1}{\sigma+\tau}\binom{\sigma+\tau}{\sigma}$$

modi. [Si noti, frattanto, la identità delle espressioni che figurano nelle (8), (9)]. Se osserviamo che vi sono $\binom{\sigma+\tau}{\sigma}$ prodotti del tipo $F_h G_k$ che contengono le medesime unità fondamentali, distribuite nell'ordine medesimo nel quale si trovano in F_h e G_k, ne concludiamo che *il prodotto* UV *contiene*

$$\binom{n+1}{\sigma+\tau}\binom{\sigma+\tau}{\sigma}$$

prodotti parziali non nulli del tipo $U_h V_k . F_h G_k$, *e semplicemente* $\binom{n+1}{\sigma+\tau}$ *prodotti analoghi non nulli, nei quali figurano gruppi di unità diverse.* Adoperando linguaggio geometrico, quest' ultima circostanza era a prevedersi, poichè $\binom{n+1}{\sigma+\tau}$ rappresenta il numero dei $(\sigma+\tau)$-*spigoli della piramide di riferimento.*

Se conveniamo di indicare con $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(\mu)}$, $\mu = \binom{\sigma+\tau}{\sigma}$ tutte le permutazioni principali di classe σ che è possibile fare coi numeri $h_1 h_2 \ldots h_\sigma\ k_1 k_2 \ldots k_\tau$, disposti nell'ordine stesso nel quale questi si seguono, e con $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(\mu)}$ le permutazioni ordinatamente complementari di quelle fra tali $\sigma+\tau$ numeri, e conveniamo altresì che, corrispondentemente agli indici superiori pari, o dispari, stiano le permutazioni con numeri pari, o dispari, di inversioni, noi potremo scrivere il prodotto W nella maniera seguente:

$$W = \sum_{hk} [-U_{h^{(1)}} V_{k^{(1)}} + \cdots + (-1)^\mu U_{h^{(\mu)}} V_{k^{(\mu)}}] L_{hk},$$

ove intendiamo che L_{hk} sia il prodotto delle $\sigma+\tau$ unità fondamentali $e_{h_1} e_{h_2} \ldots e_{h_\sigma} e_{k_1} e_{k_2} \ldots e_{k_\tau}$ seguentisi in modo da formare una permutazione principale di classe $\sigma+\tau$ fra le $e_1 e_2 \ldots e_{n+1}$, ed il $\sum_{hk}$ sia esteso a tutti gli $\binom{n+1}{\sigma+\tau}$ prodotti di tipo siffatto.

Nel caso in esame, abbiamo, per $\nabla_\Omega W$ e $G_\Omega W$, rispettivamente

$$(10)\quad \nabla_\Omega (UV) = \sum_{hk} \sum_{r=1}^{r=\mu} (-1)^r . (-1)^{\rho'\theta} (\nabla_\Omega U_{h^{(r)}} . V_{k^{(r)}} + U_{h^{(r)}} . \nabla_\Omega V_{k^{(r)}}) L_{hk}$$

con $\theta = \sigma+\tau$, $\theta = \rho'$, $\theta = n+1-\sigma-\tau$, secondochè $\rho > \sigma+\tau$, $\rho = \sigma+\tau$, $\rho < \sigma+\tau$ [cfr. formule (17), (18), (19) della *Npr*], e

$$(11)\quad G_\Omega (UV) = \sum_{hk} \sum_{r=1}^{r=\mu} (-1)^r . (-1)^{\gamma\theta} [G_\Omega U_{h^{(r)}} . V_{k^{(r)}} + U_{h^{(r)}} . \nabla_\Omega V_{k^{(r)}}] L_{hk}$$

con $\gamma\theta = \rho(\sigma+\tau)$, $\gamma\theta = \rho\rho'$, $\gamma\theta = \rho'(n+1-\sigma-\tau)$ secondochè $\rho' < \sigma+\tau$, $\rho' = \sigma+\tau$, $\rho' > \sigma+\tau$ [cfr. formule (20), (21), (22) della *Npr*].

2° caso: $\sigma+\tau = n+1$. In questo caso non sono nulli, e sono scalari, quei prodotti del tipo $F_h . G_k$ pei quali le due permutazioni $h_1 h_2 \ldots h_\sigma$, $k_1 k_2 \ldots k_\tau$ sono complementari. Tali prodotti sono in numero di

$$\binom{n+1}{\sigma} = \binom{n+1}{\tau};$$

ed allora, indicando con V_{m-h} la V_k che moltiplica la G_k corrispondente alla $k_1 k_2 \ldots k_\tau$ complementare della $h_1 h_2 \ldots h_\sigma$, possiamo scrivere la W nella forma

$$W = U_1 V_{m-1} + U_2 V_{m-2} + \cdots + U_m V_\sigma ;$$

e quindi:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \nabla_\Omega(UV) &= \sum_{h=1}^{h=m} (\nabla_\Omega U_h . V_{m-h} + U_h . \nabla_\Omega U_{m-h}) \\ G_\Omega(UV) &= \sum_{h=1}^{h=m} (G_\Omega U_h . V_{m-h} + U_h . G_\Omega V_{m-h}) . \end{aligned}$$

3° caso: $\sigma + \tau > n + 1$. In questo caso i prodotti del tipo $F_h . G_k$ nei quali il numero delle unità fondamentali comuni ad F_h e G_k supera la differenza χ fra $\sigma + \tau$ ed $n + 1$ (poniamo $\chi = \sigma + \tau - n - 1$), sono nulli perchè allora le formazioni semplici F_h e G_k appartengono ad una medesima altra formazione semplice di ordine almeno n (sono spazî a $\sigma - 1$ ed a $\tau - 1$ dimensioni contenuti entrambi in uno stesso spazio ad $n - 1$ dimensioni); e sono, invece, prodotti regressivi, non nulli, tutti quelli pei quali le unità comuni ad F_h ed a G_k sono soltanto χ; siffatti prodotti non nulli sono quindi in numero di $\binom{\sigma + \tau}{\chi} = \binom{n + 1 + \chi}{\chi} = \binom{n + 1 + \chi}{n + 1}$, e per formarne uno (ci riferiamo ai soli indici h, k) basta prendere, tra i numeri $1, 2, \ldots, n + 1$, un gruppo di χ, associarlo ad un gruppo di $\sigma - \chi$ preso fra i rimanenti, in guisa che il prodotto totale costituisca una permutazione principale di classe σ, e poi associarlo di nuovo al gruppo dei $\tau - \chi$ numeri residuali, pure in guisa che questo secondo gruppo costituisca una permutazione principale di classe τ dei numeri $1, 2, \ldots, n + 1$.

Questo procedimento mette subito in rilievo che di prodotti $F_h . G_k$ aventi uno stesso gruppo χ di unità fondamentali comuni ve ne sono

$$\mu = \binom{n + 1 - \chi}{\sigma - \chi} = \binom{n + 1 - \chi}{n + 1 - \sigma} = \binom{n + 1 - \chi}{\tau - \chi} ;$$

epperò, se si indicano con $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(\mu)}$ e con $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(\mu)}$ rispettivamente tutte le h e tutte le k corrispondenti a tali gruppi, e semplicemente con hk il gruppo comune, potremo scrivere la W nella forma

$$(13) \qquad W = \sum_{hk} [(-1)^{\eta_1 + \zeta_1} U_{h^{(1)}} V_{k^{(1)}} + \cdots + (-1)^{\eta_\mu + \zeta_\mu} U_{h^{(\mu)}} V_{k^{(\mu)}}] M_{hk}$$

quando con η_s $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$ si indica il numero delle inversioni che vengono a generarsi in $h^{(s)}$ col portare in ultimo posto i numeri del gruppo hk, e con ζ_s $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$ si indichi l'analogo numero generato in $k^{(s)}$ col portare il gruppo hk in primo posto; e quando con M_{ik} si indichi lo χ-spi-

golo $e_{(hk)_1}, e_{(hk)_2}, \dots, e_{(hk)_\chi}$ della piramide di riferimento formato dalle unità (vertici) corrispondenti al gruppo hk, ed il Σ sia esteso a tutti tali χ-spigoli.

Segue che, nel caso in esame,

$$(14) \quad \nabla_\Omega(UV) = \sum_{hk} (-1)^\theta \sum_{s=1}^{s=\mu} (-1)^{\eta_s+\zeta_s} [\nabla_\Omega U_{h^{(s)}} V_{k^{(s)}} + U_{h^{(s)}} \nabla_\Omega V_{k^{(s)}}] M_{ik}$$

con $\theta = \varrho\chi', \varrho\varrho', \varrho'\chi$ secondochè $\varrho' + \chi >, =, < n+1$, e

$$(14) \quad G_\Omega(UV) = \sum_{hk} (-1)^\theta \sum_{s=1}^{s=\mu} (-1)^{\eta_s+\zeta_s} [G_\Omega U_{k^{(s)}} V_k + U_{h^{(s)}} G_\Omega V_{k^{(s)}}] M_{ik},$$

con $\theta = \varrho'\chi', \varrho\varrho', \varrho\chi$ secondochè $\varrho + \chi >, =, < n+1$, per χ' intendendo che sia, come per $\varrho', \sigma', \dots, \chi' = n + 1 - \chi$.

Le formule (10), (11), (12), (14), (15) per $\nabla_\Omega(UV)$, $G_\Omega(UV)$ convengono, evidentemente, per tutti i casi; cioè anche per quelli esaminati in antecedenza, e possono essere applicate quando, avendosi forme particolari di funzioni U, V, si viene a scorgere in anticipazione una semplicità nei calcoli.

3. Circa il ∇_Ω ed il G_Ω del prodotto *interno* $U|V$ di due funzioni U, V, a cui ho accennato in fine della *Npg*, le considerazioni relative si riducono a quelle fatte pel caso dei prodotti progressivi e regressivi, poichè $U|V$ significa appunto $U.|V$ con diversa interpretazione del simbolo $|$. Tuttavia, conveniente sarebbe tenere presente la forma esplicita che prenderebbero le formule date finora, pel caso messo in rilievo.

Meccanica. — *Dimostrazione termodinamica della legge di Avogadro.* Nota di C. Del Lungo, presentata dal Socio A. Ròiti.

La sola dimostrazione diretta e rigorosa che finora si è data della legge di Avogadro, è quella che deriva dall'equipartizione dell'energia, secondo la legge di Maxwell della teoria cinetica dei gas. La via è dunque piuttosto lunga e non facile; e la legge di Maxwell già tanto discussa ha carattere piuttosto matematico che fisico, ed appartiene alla cosiddetta meccanica statistica.

Rimanendo nel campo fisico, della legge di Avogadro, così semplice e di fondamentale importanza, non si possono dare che dimostrazioni indirette e non completamente soddisfacenti. Essa in sostanza resta un'ipotesi, confermata nelle sue deduzioni dalle leggi fisiche sperimentali.

*
* *

La legge di Avogadro è infatti l'ipotesi più semplice e naturale per spiegare le leggi di Dalton, sui rapporti interi di volume nelle combinazioni chimiche dei gas.

Indipendentemente dalle leggi chimiche, si arriva subito alla legge di Avogadro, e questa è la via comunemente seguita, ammettendo che *nei gas aventi la stessa temperatura è eguale l'energia media molecolare.*

Questa proposizione fu prima enunciata da Clausius come un postulato; posteriormente fu dimostrato essere necessaria conseguenza della legge di Maxwell. Da essa si ricava subito non solo la legge di Avogadro, ma altresì quella di Gay-Lussac sulla identità del coefficiente di dilatazione per tutti i gas perfetti.

Il postulato di Clausius, e con esso la legge di Avogadro che ne deriva come corollario, resulta quindi confermato dalle leggi sperimentali di Gay-Lussac e di Dalton. Ma siccome la dimostrazione inversa non si può fare, non si può affermare con tutta sicurezza che il postulato sia necessario e vero: esso rimane un'ipotesi sufficiente e molto probabile.

La sua probabilità diventa ancora più grande se si seguono le considerazioni seguenti, fatte dallo stesso Clausius nel proporla; fondandosi sul fatto che mescolando due gas diversi alla stessa temperatura, non varia la temperatura del miscuglio.

Se l'energia molecolare media del 1° gas, fosse maggiore di quella del 2°, nel miscuglio, per le collisioni fra le molecole delle due specie avverrebbe che le molecole del 1° perderebbero energia, quelle del 2° ne acquisterebbero. Ma dall'energia molecolare dipende la temperatura, e nell'equilibrio del miscuglio si avrebbero queste singolari condizioni: le molecole del 1° gas acquisterebbero una temperatura T_1 più bassa, quelle del 2° una temperatura T_2 più alta di quella iniziale e comune T, che pur sarebbe la temperatura del miscuglio. Si avrebbero in somma due sistemi gassosi sovrapposti aventi ciascuno una temperatura propria.

Tali condizioni appariscono assai strane e improbabili, ma non possono dirsi assolutamente impossibili, perchè la pressione del miscuglio gassoso dalle cui variazioni, a volume costante, misuriamo la temperatura, è proporzionale all'energia cinetica totale, ma è indipendente dalla distribuzione di questa energia fra le molecole.

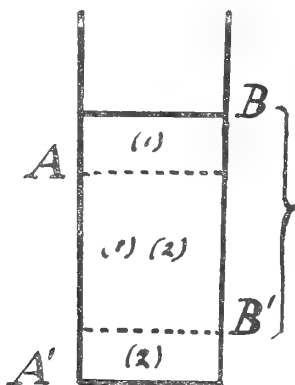
Basta perciò ricordare la legge di Dalton sui miscugli gassosi, per la quale, avendosi due gas con le pressioni p_1 e p_2, nei volumi v_1 e v_2, alle temperature T_1 e T_2, e riunendoli in un volume unico V, essi vi eserciteranno una pressione P data da

$$PV = p_1 v_1 + p_2 v_2$$

la stessa, cioè, che si avrebbe *se ciascuno dei gas conservasse la sua temperatura iniziale*; tantochè per determinare P non occorre conoscere la temperatura intermedia T che prenderà il miscuglio.

Non abbiamo quindi fisicamente nessun argomento di valore assoluto, per escludere che i due gas sovrapposti abbiano temperature diverse da quella indicata dal loro miscuglio. Se lo avessimo, il postulato di Clausius sarebbe dimostrato per assurdo, e con esso la legge di Avogadro.

***

Facciamo vedere che questo argomento, finora desiderato, ce lo fornisce la termodinamica mediante il teorema seguente di Gibbs sulla entropia dei miscugli gassosi.

L'entropia di un miscuglio di gas è la somma delle entropie dei gas componenti, quando ciascuno di essi occupi alla stessa temperatura tutto il volume del miscuglio [1].

La dimostrazione di questa proposizione è fondata sopra la seguente esperienza teoricamente possibile.

Si abbia un cilindro con quattro stantuffi dei quali A e A′ son fissi, B e B′ mobili e la distanza BB′ resti eguale ad AA′. Gli stantuffi A′ e B che formano il fondo e il coperchio del recipiente sono impermeabili, mentre A e B′ sono semipermeabili: A è permeabile per un gas (1), B′ è permeabile per un altro gas (2). Sopra B si suppone mantenuto il vuoto.

Da principio B si trova sopra A, e B′ sopra A′, ed il volume interposto è occupato da un miscuglio dei due gas (1) e (2). Sollevando lo stantuffo B e con esso B′, lentissimamente, il gas (1) passerà nello spazio che si forma fra A e B, mentre il gas (2) passerà nello spazio fra A′ e B′. Quando B′ sarà arrivato a contatto di A, i due gas saranno completamente separati.

[1] Planck, *Leçons de thermodynamique*. Paris, A. Hermann. 1913, cap. IV.

Il lavoro eseguito in questa operazione è nullo, perchè la pressione che il gas (1) esercita sopra B nella direzione del moto è eguale a quella che esso esercita sopra B′ in direzione opposta, e gli spazî percorsi sono eguali. Perciò l'energia del sistema, e quindi la sua temperatura, resta invariata.

Inoltre, essendo l'operazione eseguita con infinita lentezza, il processo è reversibile, e perciò resta invariata anche l'entropia. Ossia, l'entropia dei gas così separati deve essere eguale a quella iniziale del loro miscuglio.

* * *

Questo il teorema di Gibbs. Ma non si cambiano le condizioni dell'esperienza immaginata, se supponiamo ancora che le pareti del cilindro e gli stantuffi siano di materia impenetrabile al calore, ossia privi di conduttività termica, cosicchè le molecole gassose che traversano gli stantuffi semipermeabili conservino la loro energia cinetica, ossia la loro temperatura, e i due gas che vengono separati rimangano termicamente isolati.

In tal caso, i due gas separati si troveranno nelle stesse identiche condizioni in cui si trovavano nel miscuglio; cioè, *se non è vera la proposizione di Clausius*, con le loro temperature T_1 e T_2, l'una superiore, l'altra inferiore alla temperatura T del miscuglio.

Indichiamo con m_1 e m_2 le masse dei due gas, con c_1 e c_2 i loro calorici specifici a volume costante, con R_1 e R_2 le loro costanti caratteristiche, e sia v il volume comune.

Supponiamo che i due gas, inizialmente separati, occupino i due scompartimenti eguali del recipiente di Gibbs, alla stessa temperatura T; e formiamo il miscuglio, abbassando lentamente gli stantuffi B e B′. Come già sappiamo, il lavoro è nullo e il processo è invertibile; quindi la temperatura del miscuglio resta la stessa T, e l'entropia pure invariata. Perciò l'entropia S del miscuglio sarà la somma delle entropie iniziali dei due gas. Avremo dunque

$$S = S_1 + S_2 \qquad \begin{aligned} S_1 &= m_1 (c_1 \log T + R_1 \log v + k_1) \\ S_2 &= m_2 (c_2 \log T + R_2 \log v + k_2) \,. \end{aligned}$$

Facciamo ora l'operazione inversa, cioè la separazione dei gas, già descritta, e supponiamo, *in contradittorio col postulato di Clausius*, che i due gas separandosi vengano ad avere temperature diverse T_1 e T_2, l'una superiore, l'altra inferiore alla loro temperatura iniziale T.

Le loro entropie sarebbero diventate

$$\begin{aligned} S_1' &= m_1(c_1 \log T_1 + R_1 \log v + k_1) \\ S_2' &= m_2(c_2 \log T_2 + R_2 \log v + k_2) \end{aligned}$$

e l'entropia totale del sistema sarebbe eguale alla loro somma, con una variazione

$$(S_1' + S_2') - (S_1 + S_2) = m_1 c_1 \log T_1 + m_2 c_2 \log T_2 - (m_1 c_1 + m_2 c_2) \log T \,,$$

la quale è necessariamente negativa. Perchè la temperatura comune iniziale T è evidentemente quella che si ristabilirebbe fra i due gas mettendoli in equilibrio termico, cioè è data da

$$T = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2};$$

mentre quella che occorrerebbe perchè fosse nulla la variazione dell'entropia, secondo l'eguaglianza precedente, sarebbe data (indicandola con T') da

$$\log T' = \frac{m_1 c_1 \log T_1 + m_2 c_2 \log T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

E si può dimostrare facilmente che $T' < T$.

Dunque l'ipotesi fatta, conduce ad una conclusione inammissibile; che in un processo reversibile si abbia una diminuzione dell'entropia.

***

Ma non c'è bisogno di far calcoli, e neppure occorre parlare dell'entropia, per far vedere che l'ipotesi fatta, contraddicendo cioè al postulato di Clausius, ci porta a resultati che sono in piena contraddizione con la 2ª legge della termodinamica.

Basta considerare che con le due operazioni sopra descritte, sui due gas alla stessa temperatura, saremmo riusciti a far passar calore dall'uno all'altro, senza eseguire lavoro, e senza nessun cambiamento del sistema. Sarebbe dunque violato il postulato di Lord Kelvin, ossia il cilindro di Gibbs costituirebbe un perfetto motore perpetuo di 2ª specie.

Infatti, noi potremmo ora utilizzare la differenza di temperatura dei due gas, inserendo fra essi una macchina termica, per mezzo della quale ristabilendosi l'equilibrio si trasformerebbe in lavoro una parte del calore che passa dal gas più caldo al più freddo. Perciò la temperatura finale di equilibrio non sarebbe più quella iniziale T, dei due gas e del miscuglio, ma una più bassa. Riunendoli ancora e tornando a separarli, potremmo utilizzare ancora la differenza delle loro temperature, ottenere del lavoro, e portarli ad una temperatura ancora più bassa. E così via, continuando, trasformeremmo in lavoro tutto il calore dei due gas, raffreddandoli progressivamente.

È dunque impossibile che due gas diversi, mescolati insieme, abbiano una temperatura propria diversa da quella del miscuglio. E il postulato di Clausius, da cui dipendono direttamente la legge di Avogadro e quella di Gay-Lussac, resta rigorosamente e semplicemente dimostrato.

Chimica. — *Sui borati. - Sistema* Na_2O , B_2O_3 , H_2O a 60° [1]. Nota II di U. SBORGI e F. MECACCI, pres. dal Socio R. NASINI [2].

Riferiamo nella presente Nota la continuazione dello studio del sistema Na_2O , B_2O_3 , H_2O a 60°. In una Nota precedente [3] riportammo i resultati ottenuti per le prime curve, da quella dell'acido borico a quella del diborato pentaidrato: qui riportiamo i resultati che completano lo studio del sistema e vanno dalla curva del diborato a quella della soda caustica. Per quello che riguarda i metodi sperimentali, rimandiamo alla Nota ora citata. Dobbiamo soltanto dire che mentre nella prima parte delle esperienze eseguite, i miscugli posti a reagire impiegavano un tempo assai breve per raggiungere l'equilibrio, nella seconda parte (quella di cui riferiamo ora), e specialmente nella zona dei metaborati, incontrammo maggiori difficoltà e dovemmo, per costruire alcuni tratti di curva, ripetere molti tentativi e molte esperienze. Non possiamo soffermarci partitamente su tutte queste, tanto più che questo lavoro per ragioni superiori è scritto in modo sommario e riassuntivo, ma ci soffermeremo sulle principali difficoltà incontrate quando illustreremo le curve di varî composti. Del resto il diagramma è riuscito completo e senza lacune.

Nella tabella seguente riportiamo i resultati ottenuti. La numerazione delle esperienze riprende da quella della tabella II della Nota già citata ed anzi le due esperienze 53 e 54 sono comuni alle due tabelle per le ragioni che diremo dopo.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1916.

(3) Questi Rendiconti, vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., pag. 443.

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo d'agitaz. in termostato	Soluzione			Resto			Corpo di fondo
			Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	
53 *a*	Soda caustica, acido borico, acqua	12 giorni	22.39	32 85	44.76	—	—	—	
» *b*	» » »	13 »	22.21	32 49	45.30	22.36	45.45	32.19	1-2-5 + 1-1-4
54	» » »	60 »	22.21	32.17	45.62	22.25	40.87	36.88	»
55 *a*	» » »	3 »	20.29	26.65	53.26	—	—	—	
» *b*	» » »	4 »	20.49	26.37	53.23	22.15	27.70	50.15	1-1-4
56 *a*	1-2-10, 1-1-4, acqua	23 »	20.22	24.82	54.96	—	—	—	
» *b*	» » »	30 »	20.30	25.50	54.20	23.74	28.49	47.77	»
57 *a*	1-2-10, 1-1-6, acqua	4 »	19.54	24.17	59.29	—	—	—	
» *b*	» » »	6 »	19.68	24.02	56.30	25.11	30.05	44.84	»
58 *a*	Soda caustica, acido borico, acqua	3 »	18.91	22.38	58.71	—	—	—	
» *b*	» » »	4 »	19.29	22.78	57.93	23.62	27.11	49.27	»
59	1-1-4, acido borico, acqua	3 »	19.07	21.43	59 50	—	—	—	»
60	» » »	3 »	18.89	20.61	60.50	—	—	—	»
61 *a*	Soda caustica, borace, acqua	4 »	18.29	19.14	62.57	—	—	—	
» *b*	» » »	5 »	18.32	19.17	62.51	23.76	25.91	50.33	»
62	Soda caustica, acido borico, acqua	4 »	18.46	18.63	62.91	—	—	—	»
63 *a*	Soda caustica, borace, acqua	1 »	18.45	17.96	63 59	—	—	—	
» *b*	» » »	6 »	18 50	18.90	62.60	22.03	22.85	55.12	»
64 *a*	» » »	2 »	18.65	17.42	63.93	—	—	—	
» *b*	» » »	4 »	18.60	17.57	63.83	19.76	18.74	61.50	
65	» » »	7 »	18.72	17.33	63.95	23.03	23.47	53 50	»
66	Soda caustica, acido borico, acqua	4 »	18.89	17.49	63.62	—	—	—	»
67 *a*	Soda caustica, borace, acqua	5 »	18.62	16.95	64.43	—	—	—	
» *b*	» » »	7 »	18 54	16.95	64 51	23.84	24 79	51.37	»
68	1-1-4, soda caustica, acqua	14 »	19.45	15.81	64.71	—	—	—	
69 *a*	Soda caustica, borace, acqua	1 »	19.12	15.02	65.86	—	—	—	
» *b*	» » »	4 »	19.26	15.33	65 41	22.07	21.22	55.71	»
70	Soda caustica, acido borico, acqua	3 »	19.24	14.58	66.18	—	—	—	»
71	» » »	2 »	19.52	14.53	65.95	—	—	—	»
72	» » »	4 »	19.47	14 82	65.71	24.68	23.75	51.57	»
73 *a*	Soda caustica, borace, acqua	2 »	19 57	14.34	66.09	—	—	—	
» *b*	» » »	4 »	19.69	14.00	66.31	24.55	22.94	52.51	»
74 *a*	» » »	2 »	19 22	13.08	67.70	—	—	—	
» *b*	» » »	4 »	20.12	13.47	66.41	25.86	21.88	52.26	»
75	Soda caustica, acido borico, acqua	2 »	19.80	13.69	66.51	—	—	—	»
76 *a*	» » »	5 »	22.03	10.12	67.85	—	—	—	
» *b*	» » »	7 »	22.06	10.29	67.65	25.95	21.22	52.83	»

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo d'agitaz. in termo-stato	Soluzione			Resto			Corpo di fondo
			Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	
77 *a*	Soda caustica, acido borico, acqua	6 giorni	22.17	9.73	68.10	—	—	—	
» *b*	» » »	10 »	22.24	9.99	67.77	27.12	23.33	49.55	1-1-4
78 *a*	» » »	5 »	29.25	11 22	59.53	—	—	—	
» *b*	» » »	15 »	28.60	6.40	65.00	—	—	—	
» *c*	» » »	20 »	28.64	6.51	64.85	30.13	20.81	49.06	»
79 *a*	» » »	4 »	29 46	6.48	64.06	—	—	—	
» *b*	» » »	7 »	29.40	6.59	64.01	30.70	14.28	55.02	»
80 *a*	» » »	4 »	30.37	11.26	58.37	—	—	—	
» *b*	» » »	68 »	29.61	6.54	63.85	30.34	22.20	47.46	»
81	Soda caustica, borace, acqua	6 »	31.90	7.23	60.87	31.78	17.98	50.24	»
82 *a*	» » »	3 »	32.84	7.56	59.60	—	—	—	
» *b*	» » »	4 »	32.65	7.49	59.86	32.66	10.96	56.38	»
83	Soda caustica, acido borico, acqua	5 »	32.86	7.56	59.58	34.11	19.79	46.10	1-1-4 + 1-1-1
84 *a*	» » »	8 »	32.11	7.10	60.69	—	—	—	
» *b*	» » »	15 »	32.99	7.44	59.57	—	—	—	
» *c*	» » »	18 »	33.12	7.47	59.41	33.75	34.50	31.71	»
85	» » »	4 »	28.02	14.50	57.48	34.42	30.42	35.16	1-1-1 metastabile
86	» » »	2 »	28.07	14.65	57.28	34.14	29.47	36.39	» »
87 *a*	» » »	7 »	28.16	13.50	58.34	—	—	—	
» *b*	» » »	19 »	28.02	14.31	57.67	34.82	31.27	33.91	» »
88	» » »	5 »	29.25	11.22	59.53	v. esperienza n. 78			» »
89	» » »	4 »	30.37	11.26	58.37	v. esperienza n. 80			» »
90	» » »	7 »	29.56	11.83	58.61	37.55	35.41	27.04	» »
91	» » »	3 »	31.88	9.85	58.27	34.11	19.79	46.10	» »
92 *a*	» » »	8 »	34.05	6.71	59 24	—	—	—	
» *b*	» » »	9 »	34.27	6.78	58.95	38.06	28.98	32 96	1-1-1
93	» » »	4 »	34.93	6.80	58.27	38.39	28.54	33.07	»
94 *a*	» » »	29 »	38.03	4.64	57.33	—	—	—	
» *b*	» » »	41 »	37.84	4.75	57.41	—	—	—	
» *c*	» » »	143 »	35.96	5.60	58.44	38.39	35.78	25.83	»
» *d*	» » »	178 »	35.29	5.85	58.86	37.11	34.79	28.10	»
95 *a*	» » »	4 »	35.74	6.35	57.91	—	—	—	
» *b*	» » »	22 »	35.76	6.29	57.95	39.02	29.38	31.60	»
96	» » »	7 »	36.38	6.24	57.38	38.58	28 23	33.19	»
97 *a*	» » »	5 »	36.86	7.40	55.74	—	—	—	
» *b*	» » »	6 »	36.76	6.90	56.34	39.15	25.84	35.01	»
98 *a*	» » »	4 »	38.34	5.80	55.86	—	—	—	

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo d'agitaz. in termostato	Soluzione			Resto			Corpo di fondo
			Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	
98 *b*	Soda caustica, acido borico, acqua	6 giorni	38.69	5.75	55 56	39.98	19.62	40.40	1-1-1
99	» » »	28 »	38.70	5 56	55.74	40 12	26.38	33.50	»
100 *a*	» » »	12 »	39.05	5.61	55.34	—	—	—	
» *b*	» » »	17 »	39.00	5.52	55 48	40.52	28.07	31.41	»
101 *a*	» » »	5 »	40.44	5.53	54.03	—	—	—	
» *b*	» » »	37 »	40 14	5.41	54.45	—	—	—	
» *c*	» » »	41 »	40 11	5.31	54.58	41.67	32 48	25.91	»
102 *a*	» » »	7 »	42.77	5.39	51.84	—	—	—	
» *b*	» » »	8 »	42.75	5.54	51.71	44.40	18.74	36.86	1-1-1 + 2-1-1
103 *a*	» » »	4 »	43.11	5.67	51.22	—	—	—	
» *b*	» » »	5 »	43.14	5 80	51.06	44.92	20.01	35.07	»
104 *a*	» » »	5 »	43 64	5.11	51.25	—	—	—	
» *b*	» » »	10 »	43.30	5.18	51.52	49.52	15.95	34 53	2-1-1
105 *a*	» » »	6 »	43.96	4.08	51.96	—	—	—	
» *b*	» » »	8 »	43.65	4.12	52 23	46.87	9.08	44.05	»
106	» » »	4 »	44 72	3.80	51.48	49.81	15.06	35.13	»
107 *a*	» » »	30 »	44.66	3.69	51.65	—	—	—	
» *b*	» » »	33 »	44.74	3.78	51.48	48.43	9.53	42.04	»
108 *a*	Soda caustica, borace, acqua	6 »	45.10	3.69	51.30	—	—	—	
» *b*	» » »	7 »	44 93	3.45	51.62	47 28	7.12	54 40	»
109 *a*	Soda caustica, acido borico, acqua	3 »	45.51	4.09	50.40	—	—	—	
» *b*	» » »	5 »	45.21	3.81	50.98	53 73	16 70	29.57	»
110 *a*	» » »	12 »	45.57	2.79	51.64	—	—	—	
» *b*	» » »	16 »	45.62	2.84	51.54	—	—	—	
111 *a*	» » »	7 »	45.96	2.62	51.42	52 59	16.42	30.99	»
» *b*	» » »	10 »	45.82	2.61	51.57	52.46	16.19	31.55	»
112 *a*	» » »	8 »	47.81	2.30	49.89	—	—	—	
» *b*	» » »	10 »	47.38	2.24	50.38	53.57	17.29	29.14	»
113 *a*	» » »	3 »	48.51	1.81	49.68	—	—	—	
» *b*	» » »	5 »	48.58	1.91	49.51	49.94	4.52	45.54	»
114 *a*	» » »	7 »	49.33	1.60	49.07	—	—	—	
» *b*	» » »	8 »	49.15	1.61	49.24	52.71	5.03	42.26	2-1-1 + 1-0-3
115	» » »	6 »	49.22	1.57	49.21	52.00	5.33	42.67	»
116 *a*	» » »	10 »	49.21	1.56	49.23	—	—	—	
» *b*	» » »	11 »	49.41	1.45	49.14	52.14	5.24	42.62	»
117 *a*	» » »	8 »	48.98	1.71	49.31	—	—	—	
» *b*	» » »	11 »	49.10	1.64	49.26	55.36	1.62	43.02	1-0-3

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo d'agitaz. in termostato	Soluzione			Resto			Corpo di fondo
			Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	
118 *a*	Soda caustica, acido borico, acqua	49 giorni	48.91	1 28	49.81	—	—	—	1-0-3
" *b*	" " "	52 "	48.87	1.24	49.89	—	—	—	"
119 *a*	" " "	105 "	48.66	0 90	50.44	—	—	—	
" *b*	" " "	109 "	48.44	0.81	50.75	51.75	0.63	47.62	"
120 *a*	Soda caustica, borace, acqua	3 "	48 97	0.44	50.59	—	—	—	
" *b*	" " "	5 "	48.82	0.50	50.68	50.93	0.46	48.61	"
121 *a*	Soda caustica, acido borico, acqua	4 "	48.84	0.19	50.97	—	—	—	
" *b*	" " "	10 "	48.69	0.19	51.12	—	—	—	"
122 *a*	Soda caustica, acqua	1 "	49 02	—	50.98	—	—	—	
" *b*	" "	5 "	49.51	—	50.49	—	—	—	
" *c*	" "	6 "	49.25	—	50.75	—	—	—	"

Nella seconda colonna della tabella abbiamo indicato le sostanze poste a reagire. Come già nello studio degli altri sistemi, anche qui cercavamo di individuare i punti delle varie curve partendo dai miscugli più svariati e cioè base, acido, acqua, oppure un sale preformato e un eccesso di acido o di base e acqua ecc. ecc.: tutto questo allo scopo di raggiungere l'equilibrio da diverse parti. Ma assai spesso ci è avvenuto nel corso dell'esperienza di dover molto modificare le condizioni iniziali: talvolta — specialmente dove si hanno composti metastabili — dopo l'estrazione di un campione della soluzione o di due campioni, tutto il resto solidificava o assumeva la consistenza di uno sciroppo densissimo: allora facevamo opportune aggiunte di acido o di base e riprendevamo l'esperienza: molti dei resultati così ottenuti non li riportiamo per semplicità, ma essi ci hanno molte volte messo sulla strada per arrivare ai resultati finali sopra riportati.

Abbiamo detto che le esperienze 53 e 54 sono inserite anche nella tabella della Nota precedente. Là però come corpo di fondo si è notato l'**1-2-5**. Infatti il punto rappresentativo della soluzione delle due esperienze ora dette, si trova sulla curva di solubilità dell'**1-2-5**: ma procedendo nello studio del sistema e passando alla curva seguente, abbiamo visto che quel punto è l'invariante tra l'**1-2-5** e l'**1-1-4**. Le linee di coniugazione sono molto vicine alle linee del fascio che converge nel punto **1-2-5**, ma sono già divergenti. Perciò il corpo di fondo delle esperienze 53 e 54 è un miscuglio di **1-2-5** e **1-1-4**. Abbiamo tentato di ottenere altre divergenti più alte, ma non ci è stato possibile condurre in fondo le esperienze tentate: mischiando le sostanze poste a reagire in quantità calcolate per ottenere come corpi di

fondo il diborato e il metaborato, ottenevamo campioni di soluzione, la composizione dei quali era quella delle esperienze 53 e 54 (il che confermava trattarsi del punto invariante), ma — dopo estratto il campione — il liquido solidificava o diveniva una poltiglia uniforme di consistenza sciropposa. Questo avveniva non appena si doveva avere una quantità un po' alta di metaborato, condizione che noi cercavamo, appunto per avere una divergente alta. Tutto l'insieme delle esperienze, l'andamento delle curve ecc. ci ha permesso tuttavia di individuare il punto invariante: del resto, come abbiamo detto, le linee di coniugazione delle esperienze 53 e 54 sono divergenti. Difficoltà consimili le abbiamo trovate tra l'1-5-10 e l'1-2-5; dicemmo già nella Nota precedente di queste difficoltà e dicemmo che continuavamo esperienze in proposito. Dei risultati che ottenemmo in queste nuove esperienze, alcuni presentavano molte anomalie, ma è opportuno tener presente che secondo esperienze di van 't Hoff e Blasdale [1], a 60° si ha il punto di trasformazione del diborato decaidrato nel diborato pentaidrato: questo fatto può evidentemente avere la sua influenza, ed è notevole che noi trovavamo assai spesso spostato il punto rappresentativo della soluzione, mentre la linea di coniugazione era la divergente cercata tra il pentaborato e il diborato. Comunque, è da ritenersi come punto invariante quello indicato nella precedente Nota.

In base alle esperienze riportate si può costruire il diagramma che, per ragioni di spazio, pubblicheremo in una prossima Nota.

Chimica fisiologica. — *Sul metabolismo del glicosio in organi sopravviventi.* Due Note del dott. U. LOMBROSO e di C. ARTOM, presentate dal Socio L. LUCIANI.

Chimica fisiologica. — *Sugli elementi che condizionano l'attività degli enzimi glicolitici.* Tre Note del dott. U. LOMBROSO e di C. ARTOM, presentate dal Socio LUCIANI.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Ber. Berl. Akad., 1905, pag. 1086.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA dà il triste annuncio delle perdite fatte dalla Classe nelle persone dei Soci stranieri: ELIA METSCHNIKOFF, Sir WILLIAM RAMSAY ed OSKAR BACKLUND, che saranno a suo tempo commemorati

La Classe approva l'invio di un telegramma di felicitazioni e d'augurî a S. E. il senatore e Socio nazionale PASQUALE VILLARI, essendo occorso il suo novantesimo anno di sua età.

Altro telegramma viene inviato al senatore e Socio nazionale ISIDORO DEL LUNGO, per festeggiare le sue nozze d'oro appena occorse.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

G. LEVI. *Connessioni e strutture degli elementi nervosi, sviluppati fuori dell'organismo*. Pres. dal Socio B. GRASSI.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH, nel presentare le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia, richiama l'attenzione dei Soci su quelle dei colleghi TARAMELLI, SILVESTRI, S. FERRARI e LEONARDI CATTOLICA. Quest'ultimo presenta l'opera, in comune col capitano del genio militare A. LURIA, *Fari e segnali marittimi* in due volumi.

Lo stesso Segretario Accademico ricorda una Commemorazione del defunto Socio FRANCESCO BASSANI, dettata dal prof. G. D'ERASMO; l'opuscolo del prof. ANTONIO FAVARO: *Amici e Corrispondenti di Galileo Galilei*; XXXVII. — *Mario Guiducci*; — *A history of the University of Chicago* di T. WAKEFIELD GOODSPEED; tre pubblicazioni riguardanti le nostre Colonie, cioè: A. TROTTER. *Flora Economica della Libia*; F. PROVENZALE. *L'allevamento del bestiame nella nostra Somalia*; Missione STEFANINI-PAOLI. *Ricerche idrogeologiche, botaniche ed entomologiche fatte nella Somalia italiana meridionale*; e finalmente gli opuscoli da 3 ad 11 dell'Opera in corso di pubblicazione, *L'Italia moderna*, curata dal prof. MICHELE ROSI.

Il Socio Volterra presenta a nome del prof. Ernesto Lebon un opuscolo su proprietà dei numeri che l'autore ha pubblicato nei « Comptes Rendus » dell'Accademia di Francia, e di cui fa omaggio all'Accademia.

Il Socio Reina presenta in omaggio all'Accademia il volume degli *Atti* dell'ultimo Congresso della Società italiana delle Scienze, tenuto in Roma, e ne parla.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente Blaserna annuncia alla Classe che è presente alla seduta l'illustre professore Lévy dell'Accademia delle scienze di Parigi, e gli porge il saluto dei Colleghi.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA
presentate nella seduta del 5 novembre 1916.

ANDIAN F. I. — La cuadratura del circulo y de la eliptica. San José de Costa Rica, 1916. 4°, fol., pp. 1-72.

Atti della Società italiana per il progresso delle Scienze, vol. VIII, Roma, 1916. 8°, pp. 1-54, 1-733.

BERLESE A. — Centuria prima di Acari nuovi (Estr. dal « Redia », vol. XII, fasc. 1°, pp. 19-67). Firenze, 1916. 8°.

BERLESE A. — « Scutellista Gigantea » Berl., n. sp. (Estr. dal « Redia », vol. XII, fasc. 1°). Firenze, 1916. 8°, fol.

BIADEGO G. — Il lapicida Alberto di Antonio da Milano. (Estr. da « Madonna Verona », vol. III, fasc. 27). Verona, 1913. 8°, pp. 1-8.

BIADEGO G. — Medici veronesi e una libreria medica del sec. XIV. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », vol. LXXV, pp. 565-585). Venezia, 1916. 8°.

BOLDI M. AURELIO. — L'argomento principe in tema di « invenzione » della Ora legale. - Sulla industrializzazione di Roma. - La manomissione del monumento del dogma della Immacolata Concezione, in piazza di Spagna, in Roma. Roma, 1916. 4°, pp. 1-7.

CAVASINA A. - La frequenza nelle repliche del grande terremoto nella Marsica-Valle del Liri, del 13 gennaio 1915. (Estr. dal « Bollettino della Società sismologica ital. », vol XIX, fasc, 5-6). Modena. 1915. 8°, pp. 1-75.

CAVAZZA F. — Seconda serie di esperienze intorno all'influenza di alcuni agenti chimici sul Bambysc Mori. (Estr. dal « Redia », vol. XII, fasc. 1°, pp. 69-108). Firenze, 1916. 8°.

CHIAPUSSO VOLI I. — *La « Flora Segusiensis » 1805*, e l'opera « escursoria » del botanico Giovanni Francesco Re nelle valli e convalli di Susa. Roma, 1916. 8°, pp. 1-72.

CATTOLICA LEONARDI P. e LAURIA A. — Fari e segnali marittimi, parte I e II. Torino. 1916. 8°, pp. I-XVIII, 1-286; 1-419.

DE ANGELIS D'OSSAT G. — Applicazioni della geologia. XX. Esperimenti sul rigonfiamento e sull'energia dell'argilla per l'assorbimento d'acqua. (Estr. dagli « Annali d'ingegneria e d'architettura ». an. 1916). Roma, 1916. 4°, pp. 1-18.

DE ANGELIS D'OSSAT G. — Applicazioni della geologia. XXI. Materiali naturali da costruzione nel Viterbese. (Estr. dalla « Rivista di ingegneria sanitaria e di edilizia moderna », an. XII). Biella, 1916. 4°, pp. 1-7.

D' ERASMO G. — Commemorazione di Francesco Bassani. (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XXXV, pp. 49-76). Roma, 1916. 8°.

DE TONI G. — Alcune considerazioni sulla flora marsica. (Estr. dalla « Nuova Notarisia », ser. XXVII). Padova, 1916. 8°, pp. 1-47.

DISPENSA F. — Sopra la insussistenza del numero π. Palermo, 1916. 8°, pp. 1-16.

FERRARI S. — Intorno ai libri astronomici di Pietro D'Abano. (Estr. dalla « Rivista ligure di scienze, lettere ed arti »). Genova, 1916. 8°, pp. 1-15.

FAVARO A. — Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », vol. LXXV, pp. 1367-1418). Venezia, 1916. 8°.

FISCHER E. — Linee segnalatrici della possibilità climatica di Napoli e loro applicazione idraulica ad un lago artificiale irpino. (Estr. dagli « Annali di ingegneria e d'architettura », an. 1916). Roma, 1916. 8°, pp. 1-16.

GIGLIOLI I. — Contro l'allettamento del frumento. Proposta di sperimentazione cooperativa. (Estr. dal « Bollettino della Società degli agricoltori italiani », an. XXI, n. 9). Roma, 1916. 8°, pp. 1-12.

GIOVANNOZZI G. — La versione Borelliana dei conigi di Apollonio. (Estr. dalle « Memorie della pontificia Accademia romana dei Nuovi Lincei », serie II, vol. II). Roma, 1916. 4°, pp. 1-31, 1-16.

GOODSPEED W. F. — A. History of the university of Chicago, 1891-1916. Chicago, 1916. 8°, pp. 1-522.

LAURIA A. e CATTOLICA LEONARDI P. — Fari e segnali marittimi, parte I e II. Torino, 1916. 8°, pp. I-XVIII, 1-286; 1-419.

LAWRENCE M. LAMBE. — Ganoid Fisches from near Bauff, Alberta. (From the « Transactions of the royal Society of Canada », series III, vol. X, pp. 35-44). Ottawa, 1916. 8°.

LEBON E. — Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres. (Extr. des « Comptes-rendu des séances de l'Académie des sciences », t. 163, pp. 259-61). Paris, 1916. 8°.

MALENOTTI E. — Sulle pretese varietà del « Chrysopholus dictyaspermi » (Morg. Leon. (Estr. dal « Redia », vol. XII, pp. 109-123). Firenze, 1916. 8°.

MALENOTTI E. — « Signiphora Merceti » Malen. n. sp. (Estr. dal « Redia », vol. XII, fasc. 1°). Firenze, 1916, 8° fol

MALENOTTI E. — Nuovi Diaspiti. (Estr. dal « Redia », vol. XII, fasc. 1°, pp. 183-194). Firenze, 1916. 8°.

MASSALONGO C. — Le « Marchantiaceae » della flora europea. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti », vol. LXXV, parte 2ª, pp. 669-816). Venezia, 191ä. 8°.

MELI R. — Cenno sui fossili continentali rinvenuti nei tufi vulcanici della valle del Sacco. (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XXXV, pp. 42-44). Roma, 1916. 8°.

MELI R. — Arenaria con monete di rame estratta dall'alveo urbano del Tevere poco a valle di Ponte Sisto. (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XXXV, pp. 37-41). Roma 1916. 8°.

PECORARO N. — Metodo di ricerche sperimentali con modelli intorno alle qualità evolutive delle navi. (Estr. dagli « Atti del Collegio degli ingegneri navali e meccanici in Italia », an. XIX, vol. XIII). Genova, 1916. 8°, pp. 1-42.

PROVENZALE F. — L'allevamento del bestiame nella nostra Somalia. (Governo della Somalia italiana). Roma, 1914. 8°, pp. 1-458.

RONCHETTI V. — Normale formazione di agglutinine specifiche nel siero di sangue di una leucemica affetta da enterecolite paratifica B. (Estr. dal « Pensiero medico », n. 35). Milano, 1916. 8°, pp. 1-16.

RONCHETTI V. — Nuovi casi di infestione da Taenia nana. (Estr. dal « Pensiero medico », n. 32). Milano, 1916. 8°, pp. 1-12.

RONCHETTI V. — Caso di endocardite metapneumonica maligna delle sigmoidi della polmonale. (Estr. da « Rivista critica di clinica medica », an. XII, n. 8). Firenze, 1911. 8°, pp. 1-16.

SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza del genere *Poropoea Förster* (*Hymenoptera, Chalcidiae*). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura », vol. XI, pp. 120-135). Portici, 1916. 8°.

SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza degli *Stemminloidea* (*Diplopoda*). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. X, pp. 287-317). Portici, 1916. 8°.

SILVESTRI F. — Descrizione di alcuni Imenotteri Braconidi parassiti di Ditteri Tripancidi nell'India. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XI, pp. 160-169). Portici, 1916. 8°.

SILVESTRI F. — Sulle specie di *Trypaneidae* (*Diptera*) del genere *Carpamyia* dannose ai frutti di *Zizyphus*. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d' agricoltura in Portici », vol. XI, pp. 170-182). Portici, 1916. 8°.

SPREGA A. — Progetto di riordinamento generale dei servizi della nettezza urbana (Comune di Roma). Roma, 1916. 4°, pp. 1-107.

STEFANINI G. e PAOLI G. — Ricerche idrogeologiche, botaniche ed entomologiche fatte nella Somalia italiana meridionale (Relazioni e monografie agrario-coloniali, n. 7). Firenze, 1916. 8°, pp. 1-255.

TARAMELLI T. — Di alcuni problemi geologici riguardanti il Trentino. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. XLIX, fasc. 13, pp. 435-446). Milano, 1916. 8°.

TODARO F. Per il miglioramento della coltivazione dei cereali nell'agro romano. (Ministero per l'agricoltura). Roma, 1916 4°, pp. 1-64.

TROTTER A. — Flora economica della Libia (Manuali coloniali). Roma, 1915. 8°, pp. 1-375.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 9°. Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 13.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 novembre 1916.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

COMUNICAZIONI VARIE

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 10.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 *novembre* 1916.

Volume XXV.° — Fascicolo 10°

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

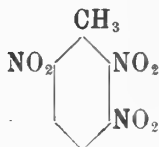
Seduta del 19 novembre 1916.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Il sesto trinitro-toluene* (η) *e prodotti dinitro-alogeno sostituiti corrispondenti.* Nota del Socio G. Körner e del dott. A. Contardi.

A completare la serie dei trinitrotolueni teoricamente possibili mancava ancora il termine rispondente alla formula:

CH_3
NO_2 NO_2
NO_2

Oggetto della presente Nota, già da qualche tempo annunciata (1), è lo studio di questa nuova sostanza e di alcuni dinitro-alogeni-tolueni corrispondenti.

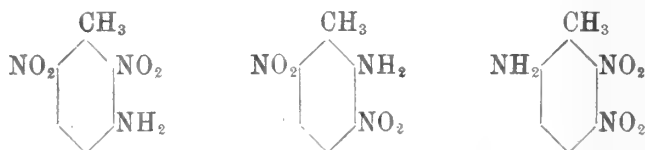
Siccome per giungere alla preparazione di questo nuovo trinitro-toluene non si poteva ricorrere alla nitrazione diretta (2), abbiamo anche in questo caso, come nei due precedenti (3), applicata la sostituzione del gruppo ami-

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 9; seduta del 2 maggio 1915.

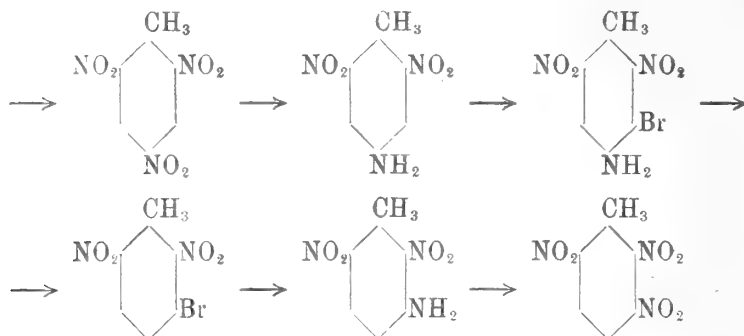
(2) Will. Berichte d. deutsche Chem. Ges., 47, pag. 704 (1914).

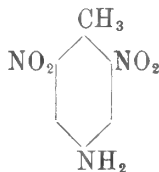
(3) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, serie 5ª, 2° sem., pag. 466; ibidem, vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., pag. 888.

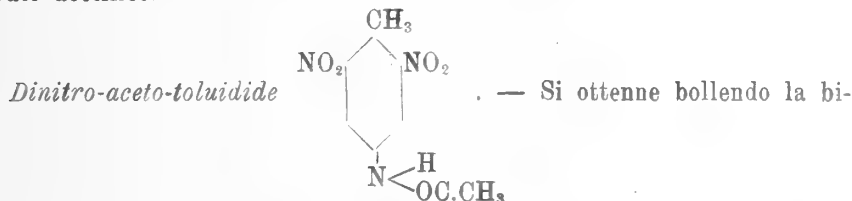
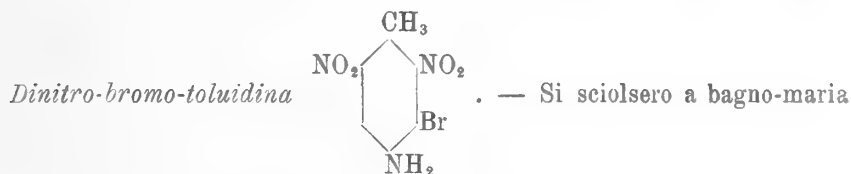
dico con un nitrossile in una conveniente dinitro-toluidina. Le dinitro-toluidine che per tale sostituzione potevano condurre al trinitro-toluene cercato erano le tre seguenti:

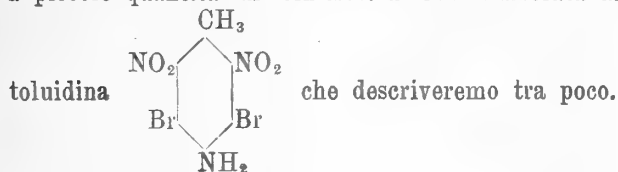
CH_3 ; NO_2 NO_2 ; NH_2 — CH_3 ; NO_2 NH_2 ; NO_2 — CH_3 ; NH_2 NO_2 ; NO_2

Dalle considerazioni fatte nelle precedenti Note risulta evidente che la prima di queste toluidine doveva essere alle altre preferita come materiale di partenza, in quanto che essa ha i gruppi nitrossilici in posizione orto e para rispetto al gruppo amidico, mentre nelle altre due uno dei gruppi nitrici occupa il posto meta, ciò che, come abbiamo visto, ostacola la nostra reazione. Per raggiungere lo scopo che ci eravamo prefissi, noi siamo partiti da trinitro-toluene ordinario (α) fondente a 80°,6 e gli abbiamo fatto subire le trasformazioni seguenti:

$\longrightarrow$ CH_3 ; NO_2 NO_2 ; NO_2 $\longrightarrow$ CH_3 ; NO_2 NO_2 ; NH_2 $\longrightarrow$ CH_3 ; NO_2 NO_2 ; Br ; NH_2 $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ CH_3 ; NO_2 NO_2 ; Br $\longrightarrow$ CH_3 ; NO_2 NO_2 ; NH_2 $\longrightarrow$ CH_3 ; NO_2 NO_2 ; NO_2

Molti autori si erano precedentemente occupati della riduzione parziale del trinitro-toluene ordinario, ma nessuno era riuscito ad ottenere la dinitro-toluidina

CH_3 ; NO_2 NO_2 ; NH_2

in quantità superiore al 20 % del prodotto impiegato. Dopo una serie di tentativi fatti in condizioni diverse noi siamo riusciti ad avere il prodotto nelle proporzioni di circa il 60 % del materiale impiegato. Su questo metodo di preparazione e sopra i prodotti accessorî che si formano nella riduzione noi ritorneremo diffusamente in altra Nota.

La dinitro-toluidina da noi impiegata allo stato di chimica purezza fondeva a 171°. Cristallizzata da alcool bollente (nel quale si scioglie nel rapporto di 1 a 10) per raffreddamento si presenta in aghi sottili rosso-arancio o in prismi tozzi, più chiari, con leggeri riflessi bluastri; cristallizzata da etere invece, si ottiene in aghi piatti giallo-chiari. Non siamo ricorsi per la purificazione del prodotto all'acido acetico diluito al 40 %, come fece l' Hollcmann, perchè durante la concentrazione delle acque madri, anche fatta nel vuoto, una parte della toluidina si trasforma nel corrispondente derivato acetilico.

Dinitro-aceto-toluidide $C_6H(CH_3)(NO_2)_2 \cdot N{<}^{H}_{OC.CH_3}$. — Si ottenne bollendo la binitro-toluidina sopra descritta con anidride acetica, molecola a molecola. Dall'alcool (di 94 %) bollente in cui è poco solubile, cristallizza per raffreddamento in aghi bianchi sottili fusibili a 223°. Per lenta evaporazione di una soluzione satura a freddo in alcool ed etere si hanno aghi lunghi splendenti. L'acido cloridrico concentrato e bollente saponifica facilmente questo acetil derivato, e la soluzione cloridrica, saturata con ammoniaca, ridà la binitro-toluidina.

Dinitro-bromo-toluidina $C_6(CH_3)(NO_2)_2(Br)(NH_2)$. — Si sciolsero a bagno-maria grammi 80 di acetato sodico cristallizzato in grammi 800 di acido acetico glaciale, indi alla soluzione si aggiunsero grammi 99 (mezza molecola) di dinitro-toluidina fondente a 171°. A soluzione completa, d'un tratto, si introdussero gr. 85 di bromo, agitando fortemente. Per raffreddamento buona parte del prodotto bromurato si separa (gr. 85). Raccolti i cristalli sopra rete di platino, e aspirati, si lavarono prima con acido acetico del 40 %, poi con alcool. Il prodotto venne in seguito ulteriormente purificato cristallizzandolo da alcool bollente in cui si scioglie nelle proporzioni di 1 a 5. Per raffreddamento della soluzione alcoolica si separano aghi tozzi o prismi giallo-chiari splendenti, fusibili a 174°.

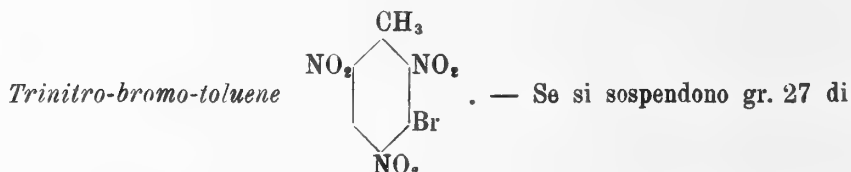
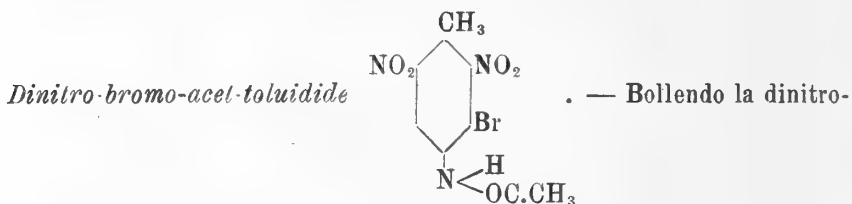
Le acque madri acetiche primitive, diluite con acqua separano insieme a piccole quantità di binitrotoluidina inalterata anche la bibromo-binitro-toluidina $C_6(CH_3)(NO_2)_2(Br)_2(NH_2)$ che descriveremo tra poco.

Se si bromura la sostanza senza l'aggiunta dell'acetato sodico, si ha la contemporanea formazione dei derivati acetilici ed aumenta la quantità del prodotto bibromurato, il che complica oltremodo la purificazione della sostanza cercata e ne abbassa assai la resa.

La dinitro-bromo-toluidina sottoposta alla determinazione di azoto ha dato:

Sostanza gr. 0,181.

Azoto cc. 14,5 a $t = 10°$ $h = 752$.

» trovato % = 15,19.

» calcolato per $C_7 H_6 N_3 O_4 Br = 15{,}21$ %

Trinitro-bromo-toluene (CH₃; NO₂, NO₂; Br; NO₂) . — Se si sospendono gr. 27 di questa dinitro-bromo-toluidina finamente polverizzata in 60 grammi di acido nitrico della densità 1,4 ed a 0°, si introduce una corrente di vapori nitrosi fino a completa soluzione, si ottiene il nitrato del diazo composto. Scacciato l'eccesso degli ossidi di azoto, e versato il tutto sopra ghiaccio finamente diviso (circa 3 chilogrammi) si trattò con una soluzione di gr. 80 di nitrito sodico in un litro di acqua. Immediatamente si separa una sostanza solida leggermente giallognola, che dopo riposo di circa dodici ore, venne raccolta su filtro e lavata. Cristallizzata da alcool bollente, nel quale si scioglie nel rapporto di 1 a 25, per raffreddamento si separa in aghi sottili bianchi fusibili a 144°. A freddo nell'alcool è pochissimo solubile, 1 parte in 970,8. Questo prodotto è in tutto identico al trinitro-bromo-toluene ottenuto già da tempo [1], nitrando con la miscela nitrico-solforica il meta-bromo-toluene.

Dinitro-bromo-acet-toluidide (CH₃; NO₂, NO₂; Br; N<H, OC.CH₃) . — Bollendo la dinitro-bromo-toluidina fondente a 174° con anidride acetica, molecola a molecola, si ottiene l'acetil derivato corrispondente. Dall'alcool cristallizza in tavole splendenti quasi incolore, fusibili a 151°.

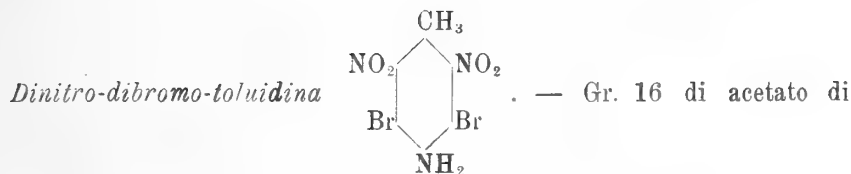
Sottoposti alla determinazione di azoto si ebbe:

Sostaza gr. 0,201.

Azoto cc. 22,60 a $t = 5$ $h = 748$.

» trovato % = 13,20.

» calcolato per $C_9 H_8 N_3 O_5 Br = 13{,}18$.

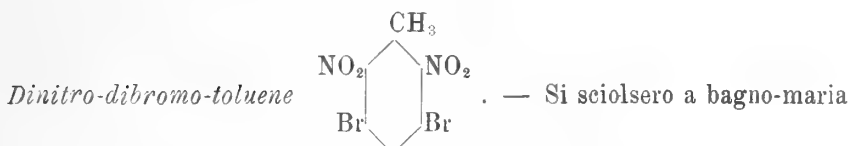
[1] Bentley, Warren Am., n. 12, pag. 4.

Dinitro-dibromo-toluidina (formula di struttura: anello benzenico con CH_3; NO_2, NO_2; Br, Br; NH_2). — Gr. 16 di acetato di sodio cristallizzato vennero sciolti a bagno maria in 275 grammi di acido acetico glaciale, indi si aggiunsero gr. 28 di mono bromo dinitro toluidina fondente a 174°. A soluzione completa si introdussero gr. 18 di bromo in una sol volta. Per raffreddamento cristallizza buona parte del prodotto. Raccolti i cristalli, lavati con poco acido acetico freddo, si sciolsero in dieci volte il peso di alcool bollente. Per raffreddamento si ottennero prismi splendenti giallo chiari fusibili a 177°. Da soluzioni alcooliche sature a freddo si ebbero per lenta evaporazione tavole e grossi prismi splendentissimi. Alla temperatura di 18° gr. 100 di alcool sciolgono gr. 1,34 di sostanza.

Sottoposta la sostanza all'analisi si ebbe:

Sostanza gr. 0,1882.

Azoto cc. 18,8 $t = 10$ $h = 752$.

" trovato °/₀ 11.84.

" calcolato per $C_7H_5O_4N_3Br_2$ °/₀ = 11,83.

Dinitro-dibromo-toluene (formula di struttura: anello benzenico con CH_3; NO_2, NO_2; Br, Br). — Si sciolsero a bagno-maria gr. 35 di dibromo dinitro toluidina, sopra descritta, in 500 grammi di alcool assoluto, indi si aggiunsero 75 cc. di nitrito di etile sotto la pressione di circa mezza atmosfera in più della normale.

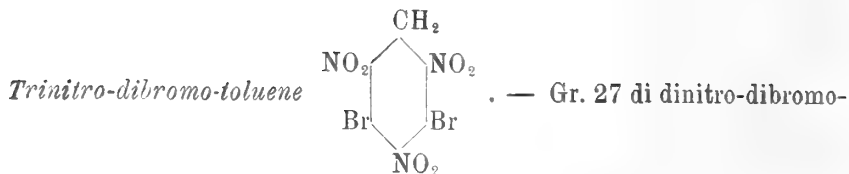
Cessato lo sviluppo di azoto, venne distillato via completamente il solvente, ed il residuo si sottopose a distillazione in corrente di vapore acqueo. Il prodotto è pochissimo volatile ma in compenso si ottiene subito assai puro. Ricristallizzato dall'alcool bollente si ottiene in aghi bianchi schiacciati splendenti, fusibili a 120°, dall'etere acetico in tavole piatte quasi incolore.

Sottoposta la sostanza all'analisi si ebbe:

Sostanza gr. 0,211.

Azoto cc. 14.9 $t = 11$ $h = 754$.

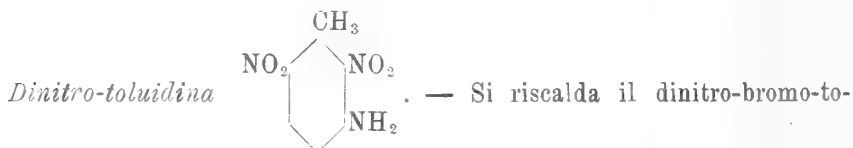
" trovato °/₀ 8.29.

" calcolato per $C_7H_4O_4N_2Br_2$ = 8,23.

Trinitro-dibromo-toluene (CH_2; NO_2, NO_2; Br, Br; NO_2). — Gr. 27 di dinitro-dibromo-toluidina fondente a 177° finamente polverizzati furono sospesi in gr. 50 di acido nitrico della densità 1,4, e sulla poltiglia così ottenuta e raffreddata a 0° si fece arrivare una corrente di vapori nitrosi.

A soluzione completa del prodotto, si scacciò mediante una corrente di aria l'eccesso di acido nitroso, ed il prodotto della reazione venne versato su ghiaccio finamente diviso, e trattato con 70 grammi di nitrito-sodico sciolti in un litro di acqua.

Immediatamente si separa una sostanza quasi bianca, che lavata ed essicata, si cristallizza da alcool bollente in cui è pochissimo solubile (1 parte in 56).

Per raffreddamento si hanno aghi bianchi piatti fusibili a 240°. Il composto è quasi insolubile nell'alcool a freddo (1 parte si scioglie in 446 di detto solvente).

È in tutte le proprietà identico al trinitro-bibromo-toluene che si ottiene nitrando colla miscela nitrico-solforica il meta-bibromo-toluene. La sostanza era già da tempo preparata da Palmer [1], ma descritta come fondente a 229-230° e di color giallognola, mentre allo stato di chimica purezza è assolutamente bianca.

Dinitro-toluidina (CH_3; NO_2, NO_2; NH_2). — Si riscalda il dinitro-bromo-toluene, descritto più avanti, fusibile a 86° (gr. 11) con ammoniaca alcoolica del 10 % a 145° per parecchie ore. Si forma bromuro d'ammonio, e si genera la binitro-toluidina corrispondente. Evaporato l'eccesso di ammoniaca alcoolica, lavato il residuo con acqua, venne cristallizzato dall'alcool bollente in cui si scioglie nella proporzione di 1 a 5. Per raffreddamento si ottengono prismi ad aghi giallo carico, splendenti, fusibili a 133°8.

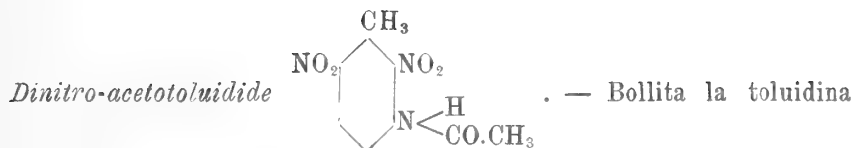
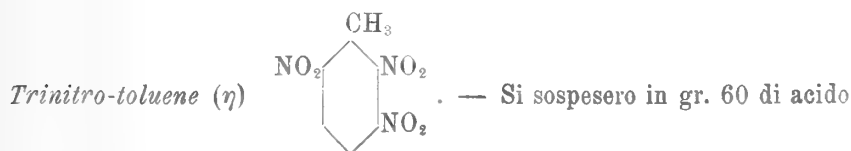
Analizzata la sostanza si ebbe:

Sostanza gr. 0,132.

Azoto cc. 24 a $t = 12$ $h = 752$.

Azoto trovato % 21,34.

Azoto calcolato per $C_7H_7N_3O_4$ 21.31 %.

[1] Chem. Gesellsch. Berlin XXI, pag. 3501.

Dinitro-acetotoluidide $C_6H_2(CH_3)(NO_2)_2N<^{H}_{CO.CH_3}$. — Bollita la toluidina ora descritta, con anidride acetica, si trasforma nel corrispondente acetil derivato. Dall'alcool bollente cristallizza in aghi bianchi; è discretamente solubile in questo solvente a caldo, e i cristalli aciculari ottenuti per raffreddamento della soluzione calda, si trasformano, sotto il solvente, in sottili tavole incolore splendenti o in grossi prismi fusibili a 166°.

Trinitro-toluene (η) $C_6H_2(CH_3)(NO_2)_3$. — Si sospesero in gr. 60 di acido nitrico della densità 1,40, gr. 30 di binitro-toluidina $C_6H_2(CH_2)(NO_2)_2NH_2$ fondente a 133°8 e la poltiglia fu sottoposta alla corrente di acido nitroso a 0° fino a completa soluzione. Scacciato mediante una rapida corrente d'aria l'eccesso dei vapori nitrosi si versò la soluzione del nitrato del diazo-composto sopra ghiaccio finamente diviso (Kgr. 2), indi si aggiunsero gr. 70 di nitrito sodico sciolti in un litro di acqua. Si svolge azoto e si separa immediatamente una sostanza solida leggermente giallognola. Dopo riposo di 12 ore a temperatura ordinaria, il precipitato venne raccolto sul filtro, lavato e trattato a bagno maria con sei volte il suo peso di acido nitrico della densità 1,4 finchè non si svolgevano più vapori rossi. Con questo trattamento le piccole quantità dei prodotti secondarî formatisi durante la diazotazione vengono distrutti. Per raffreddamento della soluzione nitrica si separa il nuovo trinitro-toluene cristallizzato (gr. 31). Il prodotto viene in seguito ulteriormente purificato cristallizzandolo ripetutamente dall'alcool bollente, nel quale solvente si discioglie nelle proporzioni di 1 a 9. Va notato che le sostanze coloranti vengono trascinate dai primi cristalli che si separano. Cristallizza in aghi splendenti bianchi ben terminati da faccie, fusibili a 111°. Esso si scioglie nell'alcool alla temperatura di 14°4 nella proporzione di 1 a 11,11.

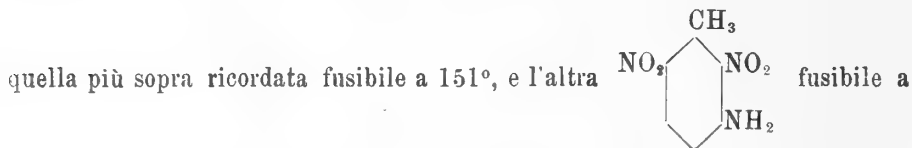
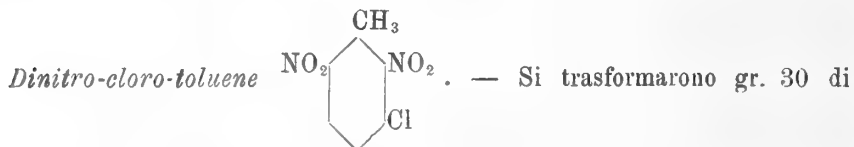
L'analisi ha dato:
Sostanza gr. 0,181.
Azoto cc. 29 a $t=15$ $h=755$.
" trovato °/₀ 18,55.
" calcolato per $C_7H_5O_6N_3$ °/₀ 18,5.

I dati cristallografici fornitici dal prof. Artini sono i seguenti:
Sistema monoclino classe prismatica:

$$a:b:c = 1,8362:1:0,3493;\ \beta = 56^\circ 39\,^1/_2{}'$$

(110) (010) = 33° 6″;
(011) (0011) = 16° 16′;
(110) (001) = 72° 32.
Forme osservate: {010}, {001}, {110}, {210}, {011}, {$\bar{4}$01}.

Cristalli allungati, spesso anzi sottilmente aciculari secondo l'asse verticale. Sfaldatura distinta non fu osservata. Piano degli assi ottici parallelo al piano di simmetria. Dalla {001} esce obliquamente la bisettrice acuta negativa. Debolissima dispersione delle bisettrici. Sensibile dispersione degli assi ottici $\varrho > v$.

Trattata la sostanza con ammoniaca alcoolica in tubo chiuso da principio imbrunisce, se poi si riscalda a 110-120°, dà luogo alla formazione di sostanze assai interessanti: dal prodotto di reazione si può, per cristallizzazione da alcool, separare una binitro-toluidina fusibile costantemente a 151° ed alla quale, come vedremo in altra Nota, spetta la formula di costituzione [anello benzenico: CH_3; NO_2, NH_2; NO_2], indi dalle acque madri cristallizza una sostanza in lunghi aghi giallo-arancio, piatti, pieghevoli, plastici come la cera, fusibili a 128° e che per ripetute cristallizzazioni non cambiano più nè l'aspetto nè il punto di fusione; il contenuto in azoto dimostrerebbe essere una binitro-toluidina, epperò altre ricerche di cui riferiremo più dettagliatamente in altra occasione, dimostrano essere una miscela di almeno due binitro-toluidine, cioè quella più sopra ricordata fusibile a 151°, e l'altra [anello benzenico: CH_3; NO_2, NO_2; NH_2] fusibile a 133°,8 dalla quale si era partiti per giungere al noto trinitro-toluene.

Dinitro-cloro-toluene [anello benzenico: CH_3; NO_2, NO_2; Cl]. — Si trasformarono gr. 30 di dinitro-toluidina fondente a 133,8 nel corrispondente nitrato di diazocomposto seguendo il modo sopra descritto. Versata la soluzione nitrica sopra ghiaccio finamente diviso, si trattò con cento grammi di cloruro *ramico*. Dopo 12 ore, raccolto il precipitato su filtro, lavato ed essicato, pesava gr. 31. Cioè si ebbe una resa di 94,5 % del calcolato teorico. Distillato in cor-

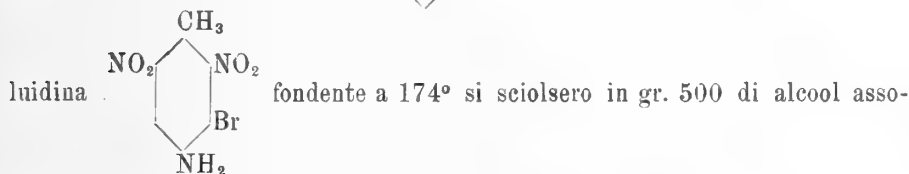
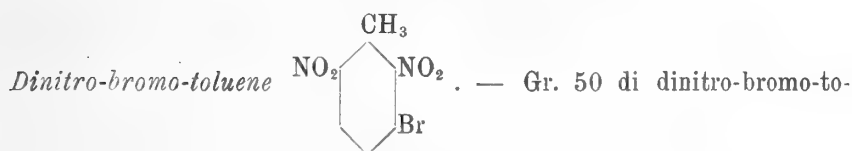
rente di vapore in cui è facilmente volatile e cristallizzato da alcool per lenta evaporazione della soluzione satura si ottiene in bellissimi prismi grossi splendenti quasi incolori fusibili a 75°.

Sottoposti alla determinazione di azoto si ebbe:

Sostanza gr. 0,230.

Azoto cc. 24,8 a $t = 8$ $h = 758$.

" trovato °/₀ = 13.

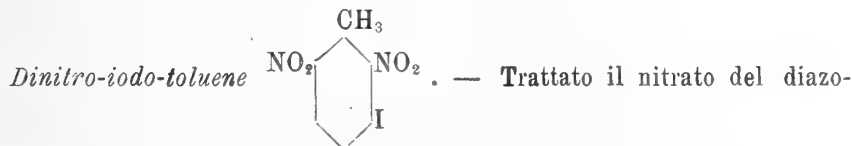
" calcolato per $C_7 H_5 O_4 N_2 Cl = 12,93$.

Dinitro-bromo-toluene (CH₃; NO₂, NO₂; Br). — Gr. 50 di dinitro-bromo-toluidina (CH₃; NO₂, NO₂; Br; NH₂) fondente a 174° si sciolsero in gr. 500 di alcool assoluto a bagno-maria ad una pressione di mezza atmosfera circa sopra la normale, indi si aggiunsero poco a poco cc. 75 di nitrito di etile. Cessato lo svolgimento di azoto, venne distillato il solvente, e il residuo si sottopose a distillazione in corrente di vapor acqueo. Il prodotto distillato, raccolto su filtro, venne purificato sciogliendolo in otto parti di alcool bollente. Per raffreddamento della soluzione alcoolica cristallizza in aghi sottili, bianchi che fondono a 86°,2. Da soluzioni sature a freddo etereo alcooliche si ottengono per lenta evaporazione grandi prismi ben sviluppati quasi bianchi.

Analizzato il prodotto si ebbe;

Sostanza gr. 0,211.

Azoto cc. 19,8 a $t = 18$ $h = 756$.

" trovato 10,8

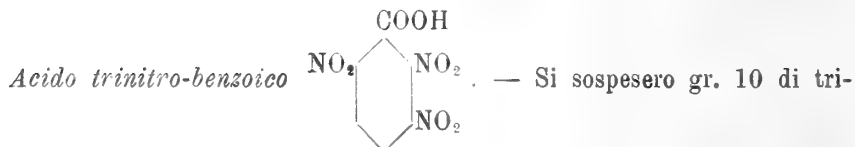
" calcolato per $C_7 H_5 O_4 N_2 Br$ °/₀ 10,72.

Dinitro-iodo-toluene (CH₃; NO₂, NO₂; I). — Trattato il nitrato del diazocomposto ottenuto nel modo sopradescritto con un eccesso di ioduro potassico in soluzione acquosa, si ottiene il dinitro-iodo-toluene corrispondente. La purificazione del prodotto si fa distillandolo in corrente di vapore. Nell'alcool caldo è assai solubile e cristallizza per lenta evaporazione in grossi prismi o, se la temperatura di cristallizzazione è un po' elevata, in grossi cristalli costituiti dall'unione di piccole tavole splendenti incolore fusibili a 90°.

La determinazione dell'azoto ha dato:

Sostanza gr. 0,184.

Azoto cc. 14,3 a $t = 10$ $h = 752$.

" trovato °/₀ 9,22

" calcolato per $C_7H_5O_4N_2I$ °/₀ 9,12.

Acido trinitro-benzoico $C_6H_2(COOH)(NO_2)_3$. — Si sospesero gr. 10 di tri-nitro-toluene (η) in gr. 250 di acido solforico della densità 1,8, si riscalda il tutto a 60°, indi a poco a poco si aggiunsero gr. 18 di acido cromico evitando che durante l'aggiunta la temperatura si elevasse al di là degli 80°. Quando tutto l'acido cromico era scomparso si versò il prodotto in molto ghiaccio finamente diviso evitando ogni riscaldamento. Si filtrò il liquido risultante per separare la massima parte del trinitro-toluene inalterato, indi la soluzione si estrasse con etere solforico. Per evaporazione cauta del solvente si ottiene una massa liquida che per raffreddamento si solidifica.

Si estrasse questa con acqua a 60°, si filtrò e per raffreddamento della soluzione si ottennero sottili aghi bianchi che, ricristallizzati colle stesse cautele dall'acqua, sono assolutamente puri e fondono a 55°.

Essicati nel vuoto sotto anidride fosforica perdono il loro splendore e si trasformano in una polvere bianca, poichè perdono l'acqua di cristallizzazione (due molecole); gr. 1,617 di sostanza, dopo 48 ore nel vuoto sotto anidride fosforica perdettero gr. 0,195 cioè il 12,05 °/₀, mentre il calcolato teorico porterebbe ad una perdita in peso corrispondente al 12,29 °/₀. L'acido privo delle sue molecole d'acqua di cristallizzazione fonde a 160°. Appena al disopra di questa temperatura svolge anidride carbonica. Anche se si riscalda per parecchio tempo l'acido cristallizzato dall'acqua a 100° in corrente d'aria si svolge CO_2 e si ha formazione del trinitrobenzolo 1, 2, 4,. Intorno alle altre proprietà chimiche di questo acido torneremo in una prossima Nota.

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni. Al prof. E. Almansi.* Nota del Socio C. Somigliana.

Questa Nota sarà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci degli animali omeotermi. IX: Azione dei gas della respirazione sui muscoli lisci* (parte 1ª) (¹). Nota del Corrispondente FILIPPO BOTTAZZI.

I. Notizie storiche

Non poche ricerche sono state finora fatte circa l'influenza che su varî organi muscolari lisci esercitano il difetto di ossigeno e la presenza in eccesso di acido carbonico; ma uno studio sistematico dell'argomento merita ancora che sia fatto, nella speranza che esso dia risultati più concordi di quelli già ottenuti.

Riassumo brevemente i principali fatti finora osservati.

1. *Apparato cardio-vascolare.* — Il primo ad osservare che l'acido carbonico produce dilatazione e l'ossigeno costrizione dei capillari sanguigni fu Severini (²). Quasi nello stesso tempo, Gaskell (³) dimostrò che l'acido lattico deprime il tono dei vasi sanguigni, e formulò l'ipotesi che gli stessi cataboliti prodotti dall'attività funzionale degli organi determinino automaticamente in questi la vasodilatazione. Più tardi, Bayliss (⁴) confermò la influenza vasodilatatrice dell'acido carbonico, e Mac William (⁵) potè constatare che le arterie dei mammiferi, separate dal corpo e messe in presenza di grande quantità di ossigeno, entrano presto in uno stato di cospicua contrattura, mentre l'acido carbonico ne provoca la distensione. Non bisogna però dimenticare, che osservazioni simili sui vasi mesenterici della rana erano state già fatte dal Severini (loc. cit.). Le recenti ricerche di Hooker (⁶) hanno

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Napoli.

(²) L. Severini, *Ricerche sulla innervazione dei vasi sanguigni.* Perugia, 1878. Idem, *La contrattilità dei capillari in relazione ai due gas dello scambio materiale.* Nuove ricerche. Perugia, 1881.

(³) W. H. Gaskell, *On the tonicity of the heart and blood vessels.* Journ. of Physiol., III, pp. 48-74 (1880).

(⁴) W. M. Bayliss, *The action of carbon dioxide on blood vessels.* Journ. of Physiol., XXVI, pag. XXXII (1901).

(⁵) J. A. Mac William, *On the properties of the arterial and venous walls.* Proc. Roy. Soc. (B) LXX, pp. 109-153 (1902).

(⁶) D. R. Hooker, *The chemical regulation of vascular tone as studied upon the perfused blood vessels of the frog.* Amer. Journ. of Physiol., XXVIII, pp. 361-367 (1911); Idem, *The effect of carbon dioxide and of oxygen upon muscular tone in the blood vessels and alimentary canal.* Ibidem, XXXI, pp. 47-58 (1912).

confermato ed esteso i risultati di Gaskell e di Bayliss. Infatti egli ha osservato, che l'ossigeno e i calcioioni elevano il tono vascolare, mentre l'acido carbonico, i sodioni e i potassioni lo deprimono. Inoltre, Schwarz e Lemberger [1], avendo constatato una cospicua dilatazione dei vasi della ghiandola sottomascellare in seguito a iniezione nell'arteria succlavia sinistra di 1 cm^3 di soluzione 0,001 mol di acido cloridrico e di altri acidi, e osservato che essa non corrisponde alla concentrazione in idrogenioni delle rispettive soluzioni, hanno concluso che l'effetto sarebbe dovuto all'acido carbonico che quegli acidi spostano dai bicarbonati del sangue. Acidi più deboli del carbonico, quali la glicocolla e l'alanina, non producono alcun effetto. L'acido carbonico deprime fortemente anche il tono dell'atrio cardiaco di *Emys europaea* [2], abolendone le oscillazioni, mentre l'ossigeno ripristina le oscillazioni del tono ed eleva il tono generale del preparato. Sotto l'azione dell'acido carbonico, le contrazioni sistoliche dell'atrio cessano prima delle oscillazioni del tono, e prima di queste riappariscono quando poi si somministra di nuovo ossigeno al preparato. Un fatto nuovo e importante ha osservato recentemente Loening [3], cioè che l'ossigeno esercita azione tonica sulla parete vasale principalmente in presenza di plasma o siero del sangue, mentre in Ringer puro essa non si manifesta quasi punto; e che in assenza di ossigeno, l'azione costrittrice del siero è meno forte e diminuisce più rapidamente.

Per quanto riguarda particolarmente il cuore, Oehrwall [4] e Straub [5] osservarono che l'acido carbonico dapprima ne aumenta l'eccitabilità; ma poi questa diminuisce e l'influenza nociva delle forti dosi di CO_2 si manifesta. L'azione benefica di piccole dosi di CO_2 (per es. mescolato all'ossigeno nella proporzione del 7 $^0/_0$) è stata inoltre ammessa dal Göthlin [6], negata dal Gross [7]. Ma dalle molteplici ricerche di Yandell Henderson [8], di Hassel-

[1] C. Schwarz und Fr. Lemberger, *Ueber die Wirkung Kleinster Säuremengen auf die Blutgefässe.* Pflüger's Arch., CXLI, pp. 149-170 (1911).

[2] Fil. Bottazzi, *Ricerche sulla musculatura cardiale dell'Emys europaea.* Zeit. f. allg. Physiol., VI, pag. 140 (1906). (Ved. particolarmente a pag. 166 e la tavola 8ª).

[3] Fr. Loening, *Beobachtungen über die vasotonisierenden Eigenschaften des Blutserums unter besonderer Berücksichtigung der Sanerstoffwirkung.* Zeit. f. Biol., LXII, pag. 54 (1913).

[4] Hj. Oehrwall, *Ueber die periodische Funktion des Herzens.* Skand. Arch. f. Physiol., VIII, pag. 1 (1898).

[5] W. Straub, *Ueber die Wirkung der Kohlensäure am ausgeschnittenen suspendierten Froschherzen.* Arch. f. exp. Path. u. Pharm., XLV, pag. 380 (1901).

[6] G. F. Göthlin, *Ueber die chemischen Bedingungen für die Aktivität des überlebenden Froschherzen.* Skand. Arch. f. Physiol., XII, pag. 1 (1901).

[7] E. Gross, *Die Bedeutung der Salze der Ringer'schen Lösung für das isolierte Säugethierherz.* Pflüger's Arch., XCIV, pag. 264 (1903).

[8] Jandell Henderson, *Acapnia and Shock.* I-VIII. Amer. Journ. of Physiol., XXI-XXVIII (1908-1911).

bach e Lundsgaard (1), mie (2) e di Jerusalem e Starling (3) risulta, non solo che una certa tensione parziale dell'acido carbonico nel sangue è necessaria per il normale svolgimento di varie funzioni in generale, ma che, in particolare, la pressione del sangue e le pulsazioni cardiache ne dipendono evidentemente. Secondo Yandell Henderson, anche una piccola riduzione del contenuto in acido carbonico del sangue arterioso produce notevole aumento di frequenza dei battiti del cuore, mentre una riduzione maggiore è causa di estrema tachicardia e di uno stato quasi tetanico del cuore, che praticamente ne rende inefficace l'attività. Analogamente, Jerusalem e Starling hanno potuto constatare che la presenza di CO_2 (2-8 °/₀ di un'atmosfera) aumenta il volume di sangue che i ventricoli espellono a ogni sistole, cioè favorisce la funzione del cuore. Infatti, l'acido carbonico, provocando rilassamento delle pareti cardiache, permette la penetrazione nel cuore di maggior quantità di sangue; mentre la totale mancanza di esso produce l'effetto opposto, cioè contrattura del cuore e diminuzione del volume di sangue che i ventricoli ricevono durante la diastole ed espellono nella sistole.

2. *Apparato digerente.* — Lasciando da parte le osservazioni fatte sull'intestino *in situ*, perchè in tali condizioni è impossibile distinguere gli effetti dovuti all'azione dell'asfissia sui centri nervosi da quelli che essa produce nell'organo stesso, rammenterò che Magnus (4), sospendendo il gorgogliamento dell'ossigeno per il liquido di Ringer, in cui era sospeso il preparato intestinale, osservò che mentre la muscolatura circolare entra in contrattura e le sue contrazioni ritmiche diminuiscono gradatamente di ampiezza per poi cessare del tutto, la muscolatura longitudinale invece presenta un graduale abbassamento del tono con cessazione delle contrazioni ritmiche quando il preparato raggiunge il massimo allungamento; onde egli trasse la conclusione, non abbastanza giustificata, che l'asfissia agisce, non sugli elementi muscolari, ma sugli apparati gangliari contenuti nella parete intestinale. Laqueur (5) ha ripetuto gli esperimenti di Magnus, e ha osservato che bastano piccolissime quantità di CO_2 per produrre forte abbassamento del

(1) K. A. Hasselbach und Chr. Lundsgaard, *Blutreaktion und Lungenventilation.* Skand. Arch. f. Physiol., XXVII, pp. 13-31 (1912); K. A. Hasselbach, *Neutralitäsregulation und Reizbarkeit des Atemzentrums in ihren Wirkungen auf die Kohlensäure - Spannung des Blutes.* Bioch. Zeit,, XLVI, pp. 403-439 (1912).

(2) Fil. Bottazzi, *Nuove ricerche sui muscoli lisci.* Zeit. f. allg. Physiol., IX, pag. 368 (1909).

(3) E. Jerusalem and E. H. Starling, *On the significance of carbon dioxide for the heart beat.* Journ. of Physiol., XL, pp. 279-294 (1910).

(4) R. Magnus, *Versuche am überlebenden Dünndarm von Säugethieren.* I. Mitt. Pflüger's Arch., CII, pag. 123 (1904).

(5) E. Laqueur, *Wirkung von Gasen auf den überlebenden Darm; zur Analyse der Erstickung.* Verhandlungen 1912, II, 2e Hälfte, pag. 386.

tono nel preparato intestinale e cessazione delle contrazioni ritmiche. Importa rammentare, per la discussione teorica che faremo in seguito, che secondo l'A. l'effetto non dipende dalla concentrazione degli idrogenioni, perchè dosi relativamente grandi di altri acidi non lo producono, e perchè la depressione del tono si può ottenere facendo gorgogliare per il liquido di Ringer un miscuglio di CO_2 e O_2, in cui l'O_2, invece di rappresentare il 100 %, rappresenti il 95-98 % di un'atmosfera. Si tratterebbe quindi, secondo l'A., di un'azione specifica sia dell'acido carbonico non dissociato, come anche degl'ioni HCO_3', come ammettono in generale anche Laqueur e Verzár [1], Herlitzka [2] ed altri.

Sull'ingluvie di *Aplysia depilans* e di *A. limacina*, piccolissime quantità di CO_2 producono arresto dei moti ritmici e inibizione del tono, mentre l'ossigeno produce l'effetto opposto. Per quanto riguarda l'esofago di pulcino, io stesso [3] ebbi ad osservare, che « se il preparato esofageo funziona vigorosamente e si trova in uno stato di considerevole tonicità, l'effetto immediato più cospicuo (dell'acido carbonico) è un forte abbassamento del tono accompagnato da arresto delle contrazioni ritmiche. L'arresto può essere interrotto da qualche contrazione spontanea, o da qualche contrazione provocata mediante stimoli tensorii ». Somministrando di nuovo l'ossigeno, le contrazioni ritmiche si ripristinano, e sono più gagliarde di prima, come se durante l'arresto l'organo avesse risparmiato materiale energetico. « Se il preparato esofageo non ha un tono molto elevato, l'acido carbonico può produrre fin dal principio aumento dell'altezza delle contrazioni ritmiche e diminuzione di frequenza di esse ». Gli effetti migliori ottenni, quando feci gorgogliare un miscuglio di molto ossigeno con poco acido carbonico. Conclusi, « che piccole dosi di acido carbonico, non che essere nocive, agevolano l'attività contrattile dell'organo ».

Anche sull'intestino, secondo Loening (loc. cit.), l'ossigeno provoca una forte contrattura principalmente in presenza di siero del sangue.

3. *M. retractor penis di cane.* — Il Sertoli [4] osservò, che se si sospende per un certo tempo la respirazione artificiale negli animali curarizzati, il muscolo si contrae; mentre ripristinando la respirazione, il muscolo si allunga

(1) E. Laqueur und F. Verzár, *Ueber die spezifische Wirkung der Kohlensäure auf das Atemzentrum.* Pflüger's Arch., CXLIII, pag. 395 (1911).

(2) A. Herlitzka, *Sui liquidi atti a conservare la funzione dei tessuti sopravviventi.* Nota VI. Arch. di Fisiol., X, pag. 261 (1912).

(3) Fil. Bottazzi, *Nuove ricerche sui muscoli lisci.* Zeit. f. allg. Physiol., IX, pag. 368 (1909).

(4) E. Sertoli, *Contribution à la physiologie générale des muscles lisses.* Arch. ital. de Biol., III, pag. 78 (1883).

rapidamente. Più tardi A. Mosso [1] fece anche lui esperimenti sul m. retrattore del pene del cavallo, e osservò « che l'anidride carbonica produce una contrazione del muscolo liscio, anche dopo ventiquattro ore che il muscolo venne estirpato dal corpo », mentre, rimesso il muscolo nell'aria, succede un rapido allungamento. Risultati del tutto opposti io ottenni recentemente [2]; essi sono stati confermati ed ampliati dalle presenti ricerche, come si vedrà.

Presentandosene in seguito l'occasione, non tralascerò di rammentare altre ricerche, riguardanti lo stesso argomento, oltre quelle citate, sugli stessi o sopra altri organi muscolari lisci.

II. Esperimenti.

1. *M. retractor penis di cane.* — Le mie nuove ricerche hanno confermato pienamente i pochi risultati descritti nella Memoria sopra citata.

L'acido carbonico, fatto gorgogliare anche per breve tempo attraverso il liquido di Ringer, in cui è immerso il preparato, arresta le contrazioni ritmiche di questo e ne deprime enormemente il tono (figg, 1 e 3). L'effetto è lo stesso, anche se, invece di acido carbonico puro, si fa gorgogliare un miscuglio di 4 volumi di ossigeno e 1 volume di acido carbonico (fig. 2). Somministrando di nuovo l'ossigeno, solo dopo un tempo considerevole si ripresentano le contrazioni ritmiche e il tono torna ad elevarsi. Qualche volta si ripristinano le contrazioni ritmiche, mentre il tono continua ad essere estremamente basso (figg. 1 e 2); qualche altra volta, torna ad elevarsi prima il tono, e poi si ripresentano le contrazioni ritmiche. Il tracciato della fig. 1 (B), verso l'estremità destra, dimostra che sul preparato sottoposto ripetutamente all'azione dell'acido carbonico l'istamina non esercita azione contrattoria, mentre l'adrenalina è capace di provocare una contrattura fortissima.

L'effetto opposto osservato dal Sertoli potrebbe forse spiegarsi pensando che questi fece le sue ricerche sul muscolo *in situ.*

Ma il Mosso sperimentò sul muscolo separato dal corpo, eppure ottenne risultati simili a quelli del Sertoli, e perciò diversi da quelli ottenuti da me. Basta però guardare i tracciati riprodotti nella Memoria del Mosso e leggere la descrizione della tecnica da lui adottata, per convincersi che le sue osservazioni furono fatte in condizioni sperimentali notevolmente diverse

[1] A. Mosso, *Contributo alla fisiologia dei muscoli lisci.* Memoria della R. Accad. d. Lincei (5), VI, 3 decembre 1905.

[2] Fil. Bottazzi, *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci degli animali omeotermi.* Seconda memoria: *Ricerche sul M. retractor penis (e su altri preparati muscolari lisci).* Mem. R. Accad. Lincei (5), XI, pag. 43 (1915).

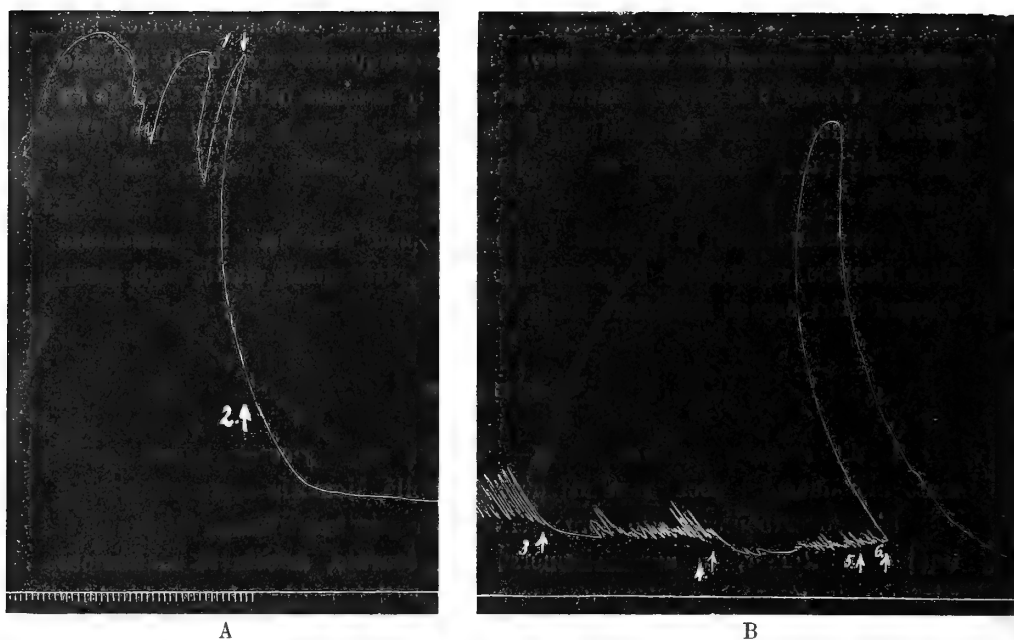



Fig. 1. — *M. retractor penis* di cane giovane, immerso in liquido di Ringer ossigenato. Temper.: 32°C. Peso gr. 4. Tempo: 1'. (16 giugno 1915). Fino a 1. contrattura spontanea, vorosimilmente dovuta alla temperatura bassa del bagno. Da 1. a 2. gorgoglia CO_2 invece di O_2 per il liquido di Ringer. Somministrato di nuovo l'ossigeno (da 2. in poi), il muscolo torna dopo parecchio tempo (fra il tracciato A e il tracciato B passa un tempo di circa $^1/_2$ ora) a fare contrazioni ritmiche, ma il tono rimane depresso. In 3. e 4. l'acido carbonico arresta le contrazioni ritmiche senza potere ulteriormente deprimere il tono. — In 5. si versano nel liquido poche gocce di soluzione 1 $^0/_{00}$ di istamina; in 6., un numero eguale di gocce di adrenalina (Clin).

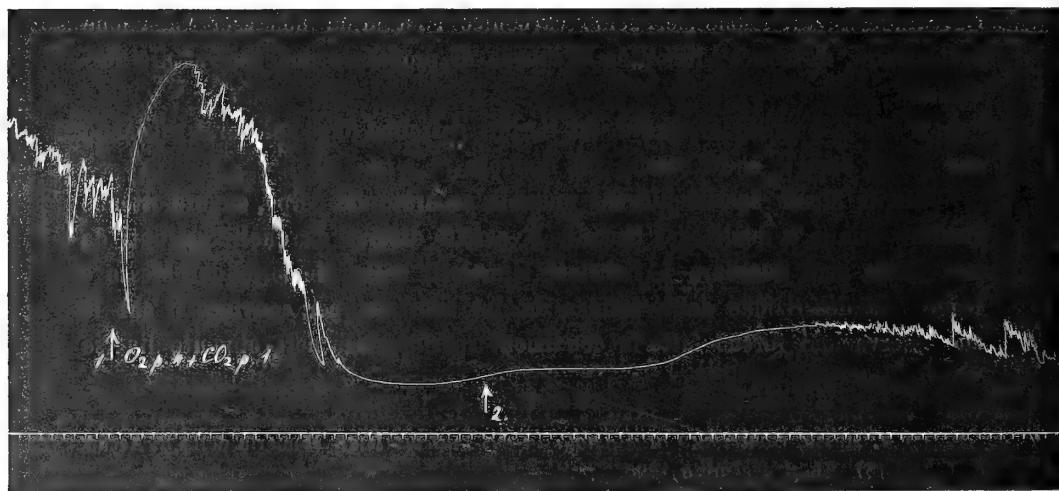



Fig. 2. — *M. rectractor penis* di cane, in liquido di Ringer ossigenato. Temper: 30°C. Peso: gr. 3. Tempo: 1'. (18 marzo 1916). In 1. si fa gorgogliare per il liquido un miscuglio di 4 parti di O_2 con 1 parte di CO_2. In 2. si fa gorgogliare solo ossigeno.

da quelle in cui sono state fatte le mie: il che potrebbe forse render conto della differenza dei risultati.

A B

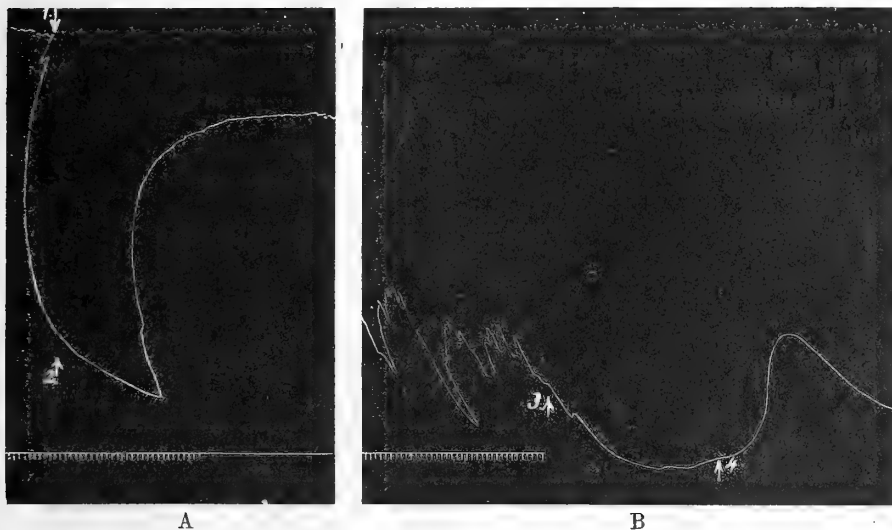



Fig. 3. — *M. rectractor penis* di canino giovanissimo, in liquido di Ringer ossigenato. Temper.: 30-32° C. Peso: gr. 3. Tempo: 1'. (15 giugno 1915). Da 1. a 2. gorgoglia CO_2; da 2, a 3., O_2; da 3. a 4, di nuovo CO_2; finalmente da 4. in poi, os-sigeno.

Fig. 4. — *M. retractor penis* di cane, in 70 cm³ di liquido di Ringer. Temper.: 32°C. Peso: gr. 3. (7 luglio 1915). In 1. si fa gorgogliare azoto, invece di ossigeno.

Ma non solo la somministrazione di acido carbonico, bensì anche la semplice espulsione dell'ossigeno dal liquido di Ringer, mediante una corrente

di azoto, è capace di produrre un forte abbassamento del tono del *m. retractro penis*, insieme con diminuzione o totale arresto delle contrazioni ritmiche (figg. 4, 5, 6). La presenza dell'ossigeno è dunque indispensabile al mantenimento del tono e alla produzione nel muscolo degli eccitamenti automatici che si manifestano con contrazioni ritmiche più o meno frequenti alte e durature.

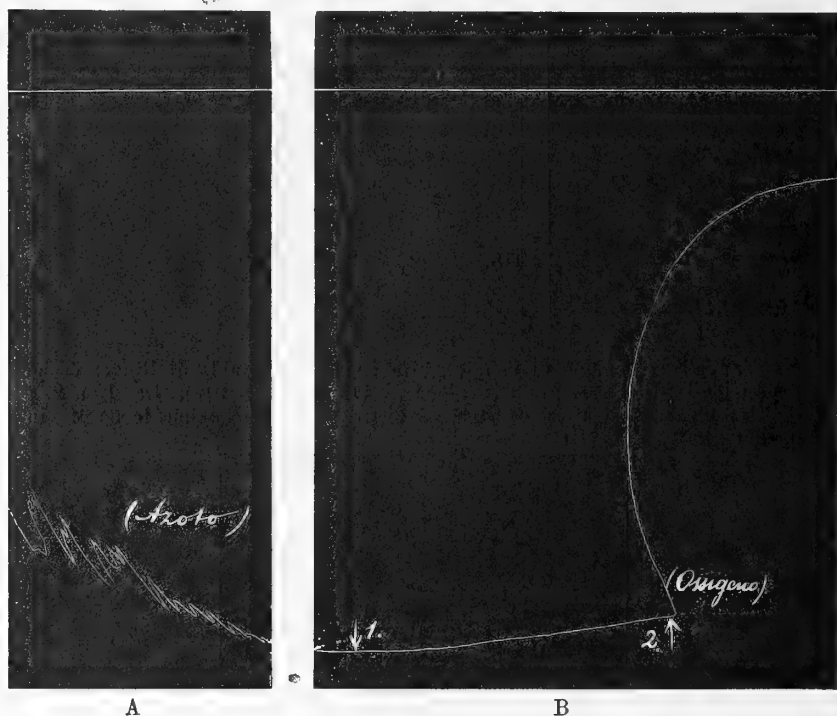



Fig. 5. — *M. retractor penis* di cane, in liquido di Ringer disossigenato mediante una corrente di azoto gorgogliante continuamente. Il tono del preparato è assai depresso, le contrazioni ritmiche (in A) piccolissime. In 1. si sostituiscono 40 cm³ di liquido di Ringer con 40 cm³ di siero di sangue dello stesso animale, anch'esso disossigenato e riscaldato a 32°C. In 2. si fa gorgogliare ossigeno, invece di azoto. Temper.: 32°C. Peso: gr. 4 (8 luglio 1915).

Data l'estrema sensibilità di questo preparato muscolare liscio per il difetto di ossigeno e per l'acido carbonico, è difficile però stabilire, se la presenza di una piccolissima quantità di acido carbonico o una lieve diminuzione della tensione parziale dell'ossigeno siano atte a produrre effetti opposti a quelli descritti, cioè, in generale, un aumento della eccitabilità del preparato. Certo è che, anche dopo l'azione prolungata di CO_2, l'adrenalina in presenza di ossigeno provoca nel muscolo una fortissima contrattura, il che dimostra che la sua eccitabilità per quella sostanza non è notevolmente

diminuita, nemmeno quando il tono del preparato, già depresso dall'acido carbonico, continua a rimanere assai basso non ostante la presenza dell'ossigeno.

I tracciati delle figg. 1, 2 e 3 dimostrano che quando si torna a somministrare ossigeno in grande quantità, dopo l'azione dell'acido carbonico, il muscolo non torna ad accorciarsi subito, ma dopo qualche tempo, talora con molto ritardo, e qualche volta non si accorcia più affatto (almeno finchè dura

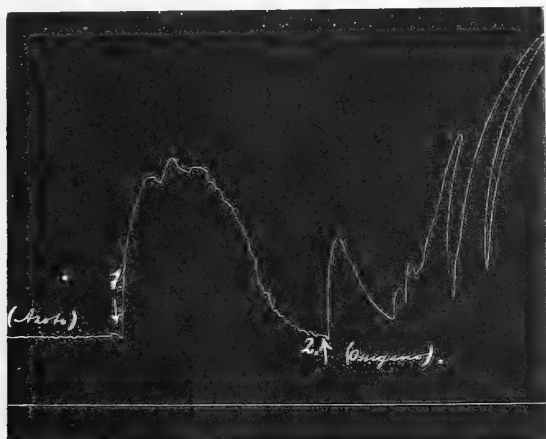



Fig. 6. — *M. retractor penis* di cane, immerso in liquido di Ringer privato di ossigeno mediante una forte corrente di azoto. Il tono del preparato è molto depresso; le sue contrazioni ritmiche sono quasi del tutto abolite. In 1. si sostituiscono 27 cm³ di liquido di Ringer (60 cm³) con 27 cm³ di siero di sangue dello stesso animale, disossigenato, ma non riscaldato. In 2. si fa gorgogliare ossigeno, invece di azoto. Temper.: 32°C. Peso: gr. 3.

l'esperimento). Dai tracciati delle figg. 5, 6, 7 e 8 invece risulta evidentemente, che quando il muscolo si trova immerso, non in solo liquido di Ringer, ma in un miscuglio di questo liquido e di siero dal sangue (o sangue defibrinato) dello stesso animale, non appena si fa gorgogliare l'ossigeno, il muscolo entra quasi immediatamente in contrattura, che talora è estremamente forte e duratura. Per osservare questo effetto, basta espellere l'ossigeno dal liquido mediante una corrente di azoto, e poi, quando l'abbassamento del tono che si ottiene è cospicuo, far gorgogliare di nuovo ossigeno Il siero per sè stesso non provoca, in assenza di ossigeno, contrazione del preparato muscolare, come dimostra la fig. 5. È necessario, però, come ammonì il Loenig (coi risultati del quale, sopra citati, concordano questi miei, sebbene ottenuti sopra un organo muscolare liscio diverso), che il siero che si adopera, sia del tutto privato dell'ossigeno che ordinariamente contiene in soluzione (per quanto poco esso sia). Ed è necessario, ancora, che esso sia

riscaldato alla temperatura alla quale già si trova esposto il muscolo, prima d'essere mescolato col liquido di Ringer, essendo noto quanto sensibile alle variazioni termiche sia il m. retrattore del pene. Nel tracciato della fig. 6, infatti, si può constatare che l'aggiunta del siero produsse una cospicua contrattura, sebbene esso fosse stato disossigenato, solo perchè esso non era stato riscaldato. Sul tracciato della fig. 5, invece, l'aggiunta del siero non è segnalata dalla minima variazione del tono.

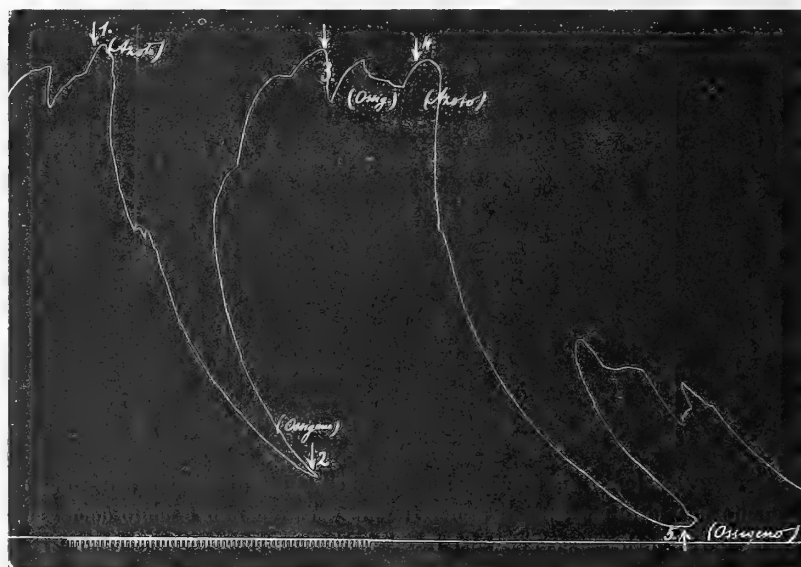



Fig. 7. — *M. retractor penis* di cane, immerso in un miscuglio di 30 cm³ di siero di sangue dello stesso animale e 40 cm³ di liquido di Ringer, abbondantemente ossigenato. Il tono del preparato è molto alto. In 1. si sostituisce all'ossigeno l'azoto. In 2. si sostituisce all'azoto l'ossigeno. In 3. si toglie il miscuglio sopra detto, si lava il preparato con liquido di Ringer riscaldato a 32° e lo si lascia poi immerso in questo liquido, mentre continua a gorgogliare l'ossigeno. In 4. si fa gorgogliare azoto, invece di ossigeno, e in 5 finalmemte si torna a somministrare ossigeno. Temper.: 32°C. Peso: gr. 3. Tempo 1'.

Si osservi, inoltre, il tracciato della fig. 7. Mentre l'ossigeno produsse una fortissima contrattura del muscolo, quando questo si trovava immerso in un miscuglio di siero e di liquido di Ringer, dopo che a tale miscuglio fu sostituito liquido di Ringer puro, l'accorciamento che l'ossigeno provocò fu assai più debole. Ma pure lo produsse e in breve tempo. Ciò fa pensare che, non ostante si fosse lavato ripetutamente col liquido di Ringer il muscolo, in questo fosse rimasta traccia di quella sostanza o di quelle sostanze contenute nel siero, alle quali Loening suppone che sia dovuta l'azione contrattoria che esse esercitano in presenza di ossigeno, e che corrispondereb-

bero alle « vasocostrittine », di cui ho avuto occasione di occuparmi nella

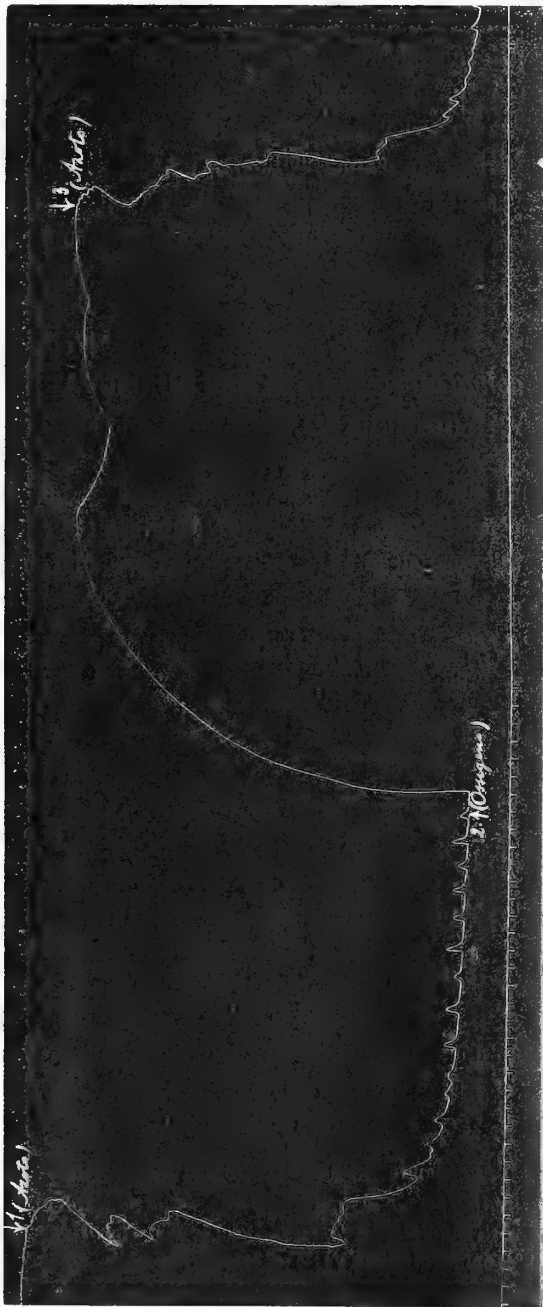



Fig. 8. — *M. retractor penis* di cane, immerso in un miscuglio di 43 cm³ di liquido di Ringer e 27 cm³ di siero del sangue dello stesso animale. Fino ad 1. per il liquido gorgoglia ossigeno: il tono del muscolo è estremamente elevato. In 1. si fa gorgogliare azoto: il tono del preparato rapidamente si abbassa. In 2. si sostituisce all'azoto l'ossigeno: il tono torna subito ad elevarsi. In 3. si sostituisce all'ossigeno di nuovo l'azoto: il tono del preparato rapidamente si abbassa. Temper.: 33°C. Peso: gr. 4. Tempo 1'. (8 luglio 1915).

mia seconda Memoria (v. s.). Di che natura siano quelle sostanze, non siamo in grado di dire. Senza dubbio, però, questa azione tonica sugli organi mu-

scolari lisci, che il sangue eserciterebbe principalmente quando è ossigenato, a qualunque dei suoi componenti essa sia dovuta, costituisce un fatto di grandissima importanza, che merita di essere sperimentalmente analizzato. Essa sembra appartenere alla categoria delle azioni stimolanti di natura chimica (umorale), e quindi differisce dall'influenza tonica che la presenza dell'ossigeno esercita in generale, verosimilmente, almeno in parte, in quanto accelera negli organi il loro metabolismo, e particolarmente i processi di ossidazione, influenza tonica che, in accordo con questa interpretazione, si manifesta assai più lentamente, come gli esperimenti hanno dimostrato.

Matematica — *Sulla risoluzione di certe equazioni di composizione di seconda specie.* Nota I di Giulio Andreoli, presentata dal Socio V. Volterra [1].

1. Il problema che tratteremo in questa Nota, è una generalizzazione d'un problema già trattato dal Lalesco [2] e dal Daniele [3]: esso consiste nel determinare la soluzione generale dell'equazione di composizione [4] seguente:

$$\overset{\times\times}{f}\,(\overset{\times\times}{n}) = a_1 n + a_2 \overset{\times\times}{n_2} + \cdots + a_m \overset{\times\times}{n^m} = 0\,, \tag{1}$$

ove le a sono delle costanti.

Si ponga intanto:

$$n(x\,y) = \sum_i \alpha_i \left(\sum_h \varphi_h(x)\, \psi_h(y) \right), \tag{2}$$

ove le α sono radici dell'equazione:

$$f(\xi) = a_1\,\xi + a_2\,\xi^2 + \cdots a_m\,\xi^m = 0, \tag{3}$$

e le φ, ψ formano un sistema di funzioni biortogonali. Si vede che tale funzione soddisfa effettivamente la (1).

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

(2) T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, pag. 38.

(3) E. Daniele, *Sui nuclei che si riproducono per iterazione*, Rend. Circ. matem. di Palermo, 1914 (2° sem., vol. XXXVIII).

(4) La chiameremo equazione di composizione di seconda specie seguendo la terminologia del Volterra: cfr. *Leçons sur les fonctions de Ligne*, Cap. XII, e *Leçons sur les équations intégrales*; Cfr. anche, per un problema analogo di cui si assegnano delle soluzioni, V. Volterra, *Sopra le funzioni permutabili di seconda specie e le equazioni integrali*, Rend. Accad. Lincei, ser. 3ª, vol. XX, 1° sem. 1911.

Infatti, per le condizioni di biortogonalità

$$\int_0^1 \varphi_r(t)\,\psi_s(t) = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$$

si trae

$$n\,(xy) = \sum_i \alpha_i \left(\sum_h \varphi_h(x)\,\psi_h(y)\right)$$

$$\overset{\times\times}{n^2}\,(xy) = \sum_i \alpha_i^2 \left(\sum_h \varphi_h(x)\,\psi_h(y)\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\overset{\times\times}{n^m}(xy) = \sum_i \alpha_i^m \left(\sum_h \varphi_h(x)\,\psi_h(y)\right)\,;$$

e moltiplicando queste equazioni rispettivamente per $a_1, a_2, \dots a_m$, e sommando, si ha

$$\overset{\times\times}{f}\,(\overset{\times\times}{n}) = \sum_i f(\alpha_i)\cdot\left(\sum_h \varphi_h(x)\,\psi_h(y)\right) = 0\,,$$

poichè $f(\alpha_i) = 0$.

Noi, in questa Nota, dimostreremo che solamente le funzioni della forma (2) soddisfano all'equazione scritta, nel caso che l'equazione algebrica (3) sia a radici distinte (e che quindi $a_1 \neq 0$).

Nel caso che la (3) abbia radici coincidenti, la (2) non è più la forma generale della soluzione.

Incidentalmente avremo un teorema sui determinanti.

Per $a_1 = -1$, $a_m = 1$, $a_2 \cdots = a_{m-1} = 0$ si ritrova l'equazione del Daniele, che a sua volta, per $m = 2$ diventa quella trattata da Lalesco.

La (1) rientra come caso particolare della

$$b_0(\overset{\times\times}{b_1} + a_1)\overset{\times\times}{n} + (\overset{\times\times}{b_2} + a_2)\overset{\times\times}{n^2} + \cdots + (\overset{\times\times}{b_m} + a_m)\overset{\times\times}{n^m} = 0\,,$$

in cui le b sieno permutabili fra loro. In altre Note ci occuperemo dapprima del caso che le radici della (3) non sieno tutte distinte, e poi del caso più generale. Il metodo che seguiremo mi sembra completamente nuovo.

2. Notiamo che la (1) si può scrivere anche, nell'ipotesi che $a_m = 1$,

$$\overset{\times\times}{f}\,(\overset{\times\times}{n}) = \overset{\times\times}{n}\,(\overset{\times\times}{n} - \alpha)\,(\overset{\times\times}{n} - \beta)\dots(\overset{\times\times}{n} - \mu)\,, \tag{4}$$

ove le $\alpha, \beta, \dots \mu$ sono le radici dell'equazione algebrica (3).

Ora, poichè possiamo porre:

$$\overset{\times\times}{f}\,(\overset{\times\times}{n}) = 0 = (\overset{\times\times}{n} - \alpha)\left\{\overset{\times\times}{n}\,[(\overset{\times\times}{n} - \beta)\,(\overset{\times\times}{n} - \gamma)\dots]\right\}$$

risulta subito che possiamo scrivere:

$$\overset{\times\times}{n}[\overset{\times\times}{n}(\overset{\times\times}{n}-\beta)(\overset{\times\times}{n}-\gamma)\dots]=\alpha[\overset{\times\times}{n}(\overset{\times\times}{n}-\beta)(\overset{\times\times}{n}-\gamma)\dots];$$

e ponendo:

$$\overset{\times\times}{n}(\overset{\times\times}{n}-\beta)(\overset{\times\times}{n}-\gamma)\cdots=\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}),$$

avremo:

$$\overset{\times\times}{n}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=\alpha\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}), \tag{5}$$

da cui risulta:

$$(5^{bis})\quad\left\{\begin{aligned}\overset{\times\times}{n}{}^2\,\overset{\times\times}{f_1}(n) &= \alpha\,\overset{\times\times}{n}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) &&= \alpha^2\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\\ \overset{\times\times}{n}{}^3\,\overset{\times\times}{f_1}(n) &= \alpha\,\overset{\times\times}{n}{}^2\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) &&= \alpha^3\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \overset{\times\times}{n}{}^{m-1}\,f_1(\overset{\times\times}{n}) &= \alpha\,\overset{\times\times}{n}{}^{m-2}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) &&= \alpha^{m-1}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}).\end{aligned}\right.$$

Se noi ora scriviamo $\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})$ sotto forma di polinomio:

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=a'_1\,\overset{\times\times}{n}+a'_2\,\overset{\times\times}{n}{}^2+\cdots a'_{m-1}\,\overset{\times\times}{n}{}^{m-1}\qquad(a'_{m-1}=1) \tag{6}$$

possiamo osservare facilmente, che da

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n})=(\overset{\times\times}{n}-\alpha)\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})$$

si trae essere le a' i coefficienti di $f_1(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-\alpha}$.

Se poi moltiplichiamo la (5) per a'_1, e tutte le equazioni (5^{bis}) rispettivamente per $a'_2, a'_3, \dots a'_{m-1}=1$, e sommiamo, otterremo precisamente

$$\{a'_1\overset{\times\times}{n}+a'_2\overset{\times\times}{n}{}^2+\cdots+a'_{m-1}\overset{\times\times}{n}{}^{m-1}\}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=\{a'_1\alpha+\cdots+a'_{m-1}\alpha^{m-1}\}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}),$$

cioè della (6)

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=f_1(\alpha)\cdot\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}). \tag{7}$$

Ora $f_1(\alpha)$ è data da

$$\lim_{\xi=\alpha}\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=f'(\alpha)=\mathrm{A}$$

che è differente da zero, essendo $\alpha, \beta, \dots$ tutte distinte.

Quindi risulta:

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\cdot\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=\mathrm{A}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}).$$

Epperò, posto $\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) = Ag_1$, da essa si trae subito

$$A^2 \overset{\times\times}{g_1^2} = A^2 g_1 ,$$

cioè

$$\overset{\times\times}{g_1^2} = g_1 .$$

Questa è l'equazione di Lalesco, di cui la soluzione è data da:

$$g_1 = \Sigma \varphi_r(x)\, \psi_r(y) , \tag{8}$$

con φ, ψ formanti sistema biortogonale.

3. In un modo del tutto analogo, partendo da

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) = (\overset{\times\times}{n} - \beta)\,[\overset{\times\times}{n}(\overset{\times\times}{n} - \alpha)(\overset{\times\times}{n} - \gamma \cdots] = (\overset{\times\times}{n} - \beta)\, \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n})$$

si trae:

$$\left\{\begin{array}{ll} \overset{\times\times}{n}\; \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) & = \beta\, \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) \\ \overset{\times\times}{n^2}\; \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) & = \beta^2\, \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) \\ \cdots & \cdots \\ \overset{\times\times}{n^{m-1}}\; \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) & = \beta^{m-1}\, \overset{\times\times}{f}\;(\overset{\times\times}{n}) \end{array}\right. \tag{9}$$

e quindi, detti a_1'', a_2'', a_3'', ... $a_{m-1}'' = 1$, i coefficienti delle potenze di ξ nel polinomio:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - \beta} ,$$

avremo, dopo moltiplicato per le a'' e sommato:

$$\overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = f_2(\beta) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) :$$

ove

$$f_2(\beta) = f'(\beta) = B .$$

E quindi, ritrarremo:

$$\overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = Bg_2 ,$$

ove

$$\overset{\times\times}{g_2^2} = g_2 .$$

4. D'altra parte però, se noi moltiplichiamo la prima delle (9) per a_1', la seconda per a_2', ... e sommiamo, avremo ovviamente

$$(a_1' n + a_2' \overset{\times\times}{n^2} + \cdots + a_{m-1}' \overset{\times\times}{n^{m-1}}) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = (a_1' \beta + \cdots + a_{m-1}' \beta^{m-1})\, \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n})$$

cioè,

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = f_1(\beta) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n})\,;$$

e reciprocamente, moltiplicando le (5) per le a'', avremo:

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = f_2(\alpha)\, \overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\,,$$

ma, si vede che:

$$f_1(\beta) = f_2(\alpha) = 0\,;$$

quindi, avremo:

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = 0\,,$$

oppure anche:

$$\overset{\times\times}{g_1} \cdot \overset{\times\times}{g_2} = 0 = \overset{\times\times}{g_2}\, \overset{\times\times}{g_1}\,;$$

cioè i nuclei $g_2\, g_1$ devono essere ortogonali, pur essendo ciascuno di essi della forma (9); il che è possibile solo se, avendo posto:

$$g_1 = \Sigma\, \varphi'_s(x)\, \psi'_s(y)$$
$$g_2 = \Sigma\, \varphi''_s(x)\, \psi''_s(y)\,,$$

sieno le φ'' ortogonali a tutte le ψ'_1 e le φ' tutte le ortogonali alle ψ''. Ossia le φ', φ''; ψ', ψ'' formano ancora due sistemi biortogonali.

In modo identico, si otterrebbero le equazioni;

$$(10) \qquad \overset{\times\times}{f_3}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_3}(\overset{\times\times}{n}) = C\, \overset{\times\times}{f_3}(\overset{\times\times}{n})\,, \ldots \overset{\times\times}{f_{m-1}}(\overset{\times\times}{n})\, \overset{\times\times}{f_{m-1}}(\overset{\times\times}{n}) = M\, \overset{\times\times}{f_{m-1}}(\overset{\times\times}{n})$$
$$\overset{\times\times}{f_r}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_s}(\overset{\times\times}{n}) = 0 \qquad (r \neq s)\,.$$

Si deduce quindi che, dette $\varphi_1 \ldots ; \psi_1 \ldots$ le funzioni di due sistemi biortogonali, avremo:

$$(11) \quad \begin{cases} \overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) = a'_1\, n + a'_2\, \overset{\times\times}{n^2} + \cdots + a'_{m-1}\, \overset{\times\times}{n^{m-1}} = A \cdot \sum_1^p \varphi_i(x)\, \psi_i(y) \\ \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = a''_1\, n + a''_2\, \overset{\times\times}{n^2} + \cdots + a''_{m-1}\, \overset{\times\times}{n^{m-1}} = B \cdot \sum_{p+1}^q \varphi_i(x)\, \psi_s(y) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{\times\times}{f_{m-1}}(\overset{\times\times}{n}) = a_1^{(m-1)}\, n + \cdots + a_{m-1}^{(m-1)}\, \overset{\times\times}{n^{m-1}} = M \sum_{t+1}^u \varphi_p(x)\, \psi_p(y)\,. \end{cases}$$

Epperò avremo:

$$n = \sum_i [\varphi_i(x)\, \psi_i(y)] \cdot \alpha_i = \frac{AA'_1}{\Delta} \sum_1^p \varphi_i(x)\, \psi_i(y) + \frac{BA''_1}{\Delta} \sum_{p+1}^q \varphi_i(x)\, \psi_j(y) + \cdots$$

ove Δ è il determinante delle $a'_1, \ldots$; ed $A_1^{(r)}$ sono i complementi algebrici degli elementi della prima colonna.

E, senza calcoli, si vede subito che le α_i, devono necessariamente coincidere con una delle radici della (2); poichè sarà

$$\overset{\times\times}{n^2} = \Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y)\, \alpha_i^2 ; \ldots ; \overset{\times\times}{n^m} = \Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y)\, \alpha_i^m ,$$

e quindi, moltiplicando rispettivamente per le a e sommando:

$$\overset{\times\times}{f}\,(\overset{\times\times}{n}) = 0 = \Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y)\, f(\alpha_i)$$

che non può essere soddisfatta altrimenti che ponendo

$$f(\alpha_i) = 0 . \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

5. Quindi riassumendo:

La soluzione generale dell'equazione

$$\overset{\times\times}{f}\,(\overset{\times\times}{n}) = a_1\, n + a_2\, \overset{\times\times}{n^2} + \cdots + a_m\, \overset{\times\times}{n^m} = 0 ,$$

nell'ipotesi che l'equazione algebrica

$$f(\xi) = a_1\, \xi + a_2\, \xi^2 + \cdots + a_m\, \xi^m = 0$$

abbia tutte le radici semplici, è data da

$$n = \sum_h \left(\sum_i \varphi_i(x)\, \psi_i(y) \right) \alpha_h ,$$

ove le φ, ψ, *formano un sistema di funzioni biortogonali, e le* α_h *sono radici della equazione algebrica scritta* (che chiameremo equazione caratteristica).

6. Notiamo infine che per risolvere il sistema (11) si poteva usare il seguente artificio. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} a_1'\, \xi + a_2'\, \xi^2 + \cdots + a_{m-1}'\, \xi^{m-1} = \mathrm{A} \\ a_1''\, \xi + \cdots\cdots\cdots + a_{m-1}''\, \xi^{m-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

il quale è soddisfatto da $\xi = \alpha$, poichè i membri sinistri sono rispettivamente

$$\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} ; \frac{f(\xi)}{\xi - \beta} ; \ldots$$

ed inoltre

$$\mathrm{A} = f'(\alpha) = \lim_{\xi = \alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} .$$

Scrivendo la formola di soluzione, si ottiene:

$$\alpha = \frac{AA'_1}{\Delta}.$$

In modo del tutto analogo, dal sistema

$$\begin{cases} a'_1 \xi + \cdots + a'_{m-1} \xi^{m-1} = 0 \\ a''_1 \xi + \cdots + a''_{m-1} \xi^{m-1} = B \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0 \end{cases}$$

soddisfatto da $\xi = \beta$, si trae senz'altro $\beta = \frac{BA''_1}{\Delta}$ e così via; come dovevamo trovare.

Il che ci permette, passando anche ai complementi algebrici delle altre colonne, di scrivere più generalmente:

$$\alpha^r = \frac{AA'_r}{\Delta}\,;\ \beta^r = \frac{BA''_r}{\Delta}\,;\ldots \mu^r = \frac{MA_r^{(m-1)}}{\Delta}.$$

Quindi possiamo anche enunciare il seguente teorema sui determinanti:

Dato un polinomio $h(x)$ a radici semplici (fra cui vi sia lo zero): se noi scriviamo ordinatamente in una matrice quadrata i coefficienti dei quozienti $\frac{h(x)}{x-\alpha}$, α essendo radice diversa da zero del polinomio dato, ponendovi in linea quelli appartenenti allo stesso quoziente, allora il complemento algebrico d'un elemento di questo determinante, appartenente alla linea r-sima ed alla colonna s-sima, ha per valore

$$A_r^{(s)} = \frac{\Delta}{h'(\alpha_r)}\,\alpha_r^{s-1}.$$

Per dimostrarlo, basta porre in tutto il ragionamento precedente

$$f(x) = h(x),$$

Matematica. — *Proprietà caratteristiche della configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una superficie del terzo ordine.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio E. BERTINI [1].

Nel presente lavoro, che si collega con un altro di recente inserito in questi Rendiconti [2], mi propongo d'invertire alcune note proprietà di cui godono le 27 rette e i 45 piani tritangenti di una superficie del terz'ordine, dimostrando il teorema seguente:

Si abbia una configurazione di x rette (di cui tre qualunque non concorrenti in un punto) ed y piani, tali che per ognuna delle rette passino k dei piani e su ognuno dei piani giacciano tre delle rette. E si suppongano soddisfatte le altre due condizioni:

(I) *se due delle x rette s'incontrano, il loro piano sia uno degli y considerati, epperò contenga un'altra di quelle rette;*

(II) *se una delle x rette ed uno degli y piani non si appartengono, il loro punto d'incontro giaccia sopra una delle tre rette poste sul piano.*

Allora (per $k > 2$) la configurazione o consta delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie cubica, o consta delle 15 rette di una superficie cubica, che rimangono togliendo le rette di una bissestupla, e dei 15 piani che le contengono a tre a tre.

Per semplicità, la dimostrazione sarà esposta in forma indipendente dalla cognizione della Nota citata.

1. Anzitutto si ha ovviamente

$$kx = 3y.$$

Inoltre, per la proprietà (I), ciascuna delle x rette ne taglia altre $2k$, poste a due a due nei k piani passanti per la retta. Fissando quindi uno qualunque degli y piani, e considerando le rette che si appoggiano all'una o all'altra o alla terza delle rette in esso contenute, per la proprietà (II) si ha

$$2 \cdot 3(k-1) + 3 = x,$$

epperò

$$x = 3(2k-1), \tag{1}$$

$$y = k(2k-1). \tag{2}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1916.

[2] *Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani,* questo vol., pag. 258.

Per $k=1$ la configurazione si riduce ad un unico piano ed a tre sue rette; per $k=2$ essa consta di due terne di piani e delle nove rette in cui i piani dell'una terna incontrano i piani dell'altra.

Nel seguito potremo dunque supporre

$$k \geq 3\,, \quad \text{epperò} \quad x \geq 15\,,\ y \geq 15\,. \tag{3}$$

2. Ciò posto, se a_1, a_2, a_3 sono tre delle x rette situate in un piano α, per ciascuna di esse passano altri $k-1$ degli y piani, cosicchè, compreso α, si hanno in tutto $3(k-1)+1$, ossia $3k-2$ piani. Questo numero, certamente non superiore ad y, non è neanche eguale ad y, altrimenti per la (2) avremmo l'assurdo $(k-1)^2 \leq 0$.

Pertanto, fissato il piano α, esiste nella configurazione qualche altro piano che non lo incontra in nessuna delle sue tre rette. Sia β un tal piano, e siano b_1, b_2, b_3 le sue tre rette. Per la proprietà (II), la retta b_1 incontra α in un punto che si può supporre appartenere ad a_1. La retta b_2 incontra similmente α in un punto di una delle sue tre rette; ma non può incontrare a_1, altrimenti α e β avrebbero in comune a_1: possiamo supporre che b_2 tagli a_2; e allora b_3 taglierà a_3.

Siano c_1, c_2, c_3 le rette poste ulteriormente nei piani $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$: dico che sono distinte dalle sei rette precedenti e distinte tra loro, e che si tagliano a due a due.

Anzitutto, se c_1 coincidesse per es. con a_2, la retta a_3 coinciderebbe con b_1, sicchè α e β si taglierebbero in una delle x rette.

In secondo luogo, se ad es. c_2 coincidesse con c_1, questa, secando a_1 e a_2, coinciderebbe con a_3, e secando b_1 e b_2, coinciderebbe con b_3, donde l'assurdo di poc'anzi.

Per dimostrare infine che ad es. c_1 taglia c_2, basta osservare che c_1 taglia il piano $a_2 b_2 c_2$ in un punto di una di queste tre rette. Ma non taglia a_2, altrimenti, tagliando già a_1, coinciderebbe con a_3, e non taglia b_2, perchè, tagliando già b_1, coinciderebbe con b_3.

Le tre nuove rette c_1, c_2, c_3 stanno quindi in un medesimo piano; cosicchè, formando il quadro

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\,, \tag{4}$$

si ha la proprietà che *due delle nove rette si tagliano quando e soltanto quando figurano in una stessa linea orizzontale o verticale.*

È chiaro che, se il quadro (4) si considera come la matrice di un determinante, *ogni altra retta della configurazione incontra tre delle nove rette del quadro, appartenenti ad un termine del determinante.*

3. Siano $b_2^{(1)} b_3^{(1)}, b_2^{(2)} b_3^{(2)}, \ldots, b_2^{(k-2)} b_3^{(k-2)}$ le coppie di rette [tutte distinte tra loro e dalle nove del quadro (4)] contenute nei $k-2$ piani della configurazione che, oltre ai piani $a_1 b_1 c_1$ e $b_1 b_2 b_3$, passano per b_1. Considerando i due piani $a_1 a_2 a_3$ e $b_1 b_2^{(i)} b_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-2)$, poichè a_1 seca b_1, possiamo supporre ad es. che a_2 tagli $b_2^{(i)}$, e quindi che a_3 tagli $b_3^{(i)}$. Se la terza retta della configurazione posta sul piano $a_2 b_2^{(i)}$ si denota con $c_2^{(i)}$, e la terza contenuta nel piano $a_3 b_3^{(i)}$ con $c_3^{(i)}$, con gli stessi ragionamenti del num. precedente si dimostra che le rette $c_2^{(i)}$ e $c_3^{(i)}$ sono tutte diverse tra loro e dalle precedenti, e inoltre che $c_1, c_2^{(i)}$ e $c_3^{(i)}$ sono in un piano.

Risulta così lo schema

$$
(5) \qquad \left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ c_1 & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} \end{matrix} \left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2^{(2)} & b_3^{(2)} \\ c_1 & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} \end{matrix}\right| \cdots \left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2^{(k-2)} & b_3^{(k-2)} \\ c_1 & c_2^{(k-2)} & c_3^{(k-2)} \end{matrix}\right| ,
$$

dove tre rette, che in uno qualunque dei quadri parziali stiano in una medesima orizzontale o verticale, appartengono ad uno stesso piano.

Si ottengono tutte le x rette della configurazione aggiungendo alle precedenti le $k-2$ coppie

$$
(6) \qquad f_1 g_1, f_2 g_2, \ldots, f_{k-2} g_{k-2}
$$

che, oltre ad $a_2 a_3$ e $b_1 c_1$, stanno in piani passanti per a_1.

4. Delle rette del piano $c_1 c_2 c_3$, la $b_2^{(i)}$ non taglia c_1; e neanche taglia c_2, altrimenti, tagliando già a_2, coinciderebbe con b_2. Dunque $b_2^{(i)}$ taglia c_3. Poichè a_1 non seca nè c_3 nè $b_2^{(i)}$, la terza retta della configurazione esistente sul piano $c_3 b_2^{(i)}$ si appoggierà ad a_1, epperò sarà una delle rette (6). Ma se si considerano due di tali piani, $c_3 b_2^{(i)}$ e $c_3 b_2^{(j)}$, le terze rette in essi contenute sono distinte e non s'incontrano; si può quindi supporre che nel piano $c_3 b_2^{(i)}$ la terza retta sia f_i. Risultano così i $k-2$ piani

$$
(7) \qquad c_3 b_2^{(1)} f_1, c_3 b_2^{(2)} f_2, \ldots, c_3 b_2^{(k-2)} f_{k-2}.
$$

Considerando di nuovo il piano $c_1 c_2 c_3$, si riconosce in modo analogo che $b_3^{(i)}$ seca c_2; e ancora la terza retta del piano $c_2 b_3^{(i)}$ dev'essere una delle (6). Ma poichè nei piani $c_3 b_2^{(i)} f_i$ e $c_2 b_3^{(i)}$ si tagliano le rette c_3 e c_2, come pure le $b_2^{(i)}$ e $b_3^{(i)}$, la f_i taglierà la terza retta del piano $c_2 b_3^{(i)}$, la quale sarà dunque g_i. Si hanno così gli altri $k-2$ piani

$$
(8) \qquad c_2 b_3^{(1)} g_1, c_2 b_3^{(2)} g_2, \ldots, c_2 b_3^{(k-2)} g_{k-2}.
$$

Similmente, con la considerazione del piano $b_1 b_2 b_3$, si prova l'esistenza dei piani

$$
(9) \qquad b_3 c_2^{(1)} g_1, b_3 c_2^{(2)} g_2, \ldots, b_3 c_2^{(k-2)} g_{k-2},
$$

e quella dei piani

(10) $$b_2\, c_3^{(1)} f_1\ ,\ b_2\, c_3^{(2)} f_2\ ,\ \ldots\ ,\ b_2\, c_3^{(k-2)} f_{k-2}\ .$$

5. Avendo supposto $k \geq 3$, lo schema (5) consta almeno dei due primi quadri parziali, e consta soltanto di questi quando sia $k = 3$, epperò $x = y = 15$.

Suppongasi invece $k > 3$. Allora lo schema (5) si compone almeno dei tre primi quadri parziali, e certamente esiste il piano $a_3\, b_3^{(2)}\, c_3^{(2)}$. Delle rette di questo piano, la $b_2^{(1)}$ non taglia a_3; e neppure taglia $b_3^{(2)}$, altrimenti, tagliando già b_1, coinciderebbe con $b_2^{(2)}$. Dunque $b_2^{(1)}$ taglia $c_3^{(2)}$.

La retta a_1, non secando nè $b_2^{(1)}$ nè $c_3^{(2)}$, incontrerà la terza retta del piano da esse determinato, sicchè questa terza retta sarà una delle (6). Ma non può essere nè g_1 nè g_2 nè alcuna delle $f_1, f_2, \ldots, f_{k-2}$. Non g_1, altrimenti il piano $b_2^{(1)}\, c_3^{(2)}\, g_1$ e il primo dei piani (8), cioè $c_2\, b_3^{(1)}\, g_1$, pur passando per la stessa retta g_1, conterrebbero le due rette incidenti $b_2^{(1)}$ e $b_3^{(1)}$. Non g_2, chè il piano $b_2^{(1)}\, c_3^{(2)}\, g_2$ e il secondo dei piani (9), ossia $b_3\, c_2^{(2)}\, g_2$, avrebbero in comune la retta g_2, mentre le loro rette $c_3^{(2)}$ e $c_2^{(2)}$ s'incontrano. Non, finalmente, alcuna delle $f_1, f_2, \ldots, f_{k-2}$. Poichè, se fosse f_1, dall'esistenza del primo dei piani (7) seguirebbe che c_3 coincide con $c_3^{(2)}$. Se invece fosse una delle $f_2, f_3, \ldots, f_{k-2}$, diciamo f_i, il piano $b_2^{(1)}\, c_3^{(2)} f_i$ e l'i^{mo} dei piani (7), cioè $c_3\, b_2^{(i)} f_i$, avrebbero in comune la retta f_i, mentre le loro rette $b_2^{(1)}$ e c_3 s'incontrano, come risulta dall'esistenza del primo dei piani (7).

La terza retta del piano $b_2^{(1)}\, c_3^{(2)}$ è dunque una delle $g_3, g_4, \ldots, g_{k-2}$, cosichè resta intanto provato essere $k \geq 5$. Ma si può aggiungere che è precisamente $k = 5$, e per ciò basta dimostrare che quella terza retta è una qualunque delle $g_3, g_4, \ldots, g_{k-2}$, ossia che queste incontrano tutte sia $b_2^{(1)}$ che $c_3^{(2)}$.

A tal fine consideriamo uno qualunque dei piani (9) successivi al primo, e sia

$$b_3\, c_2^{(i)}\, g_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, k-2).$$

Delle sue tre rette, la $b_2^{(1)}$ non seca b_3, poichè, secando già b_1, coinciderebbe con b_2; e neppure seca $c_2^{(i)}$, poichè, secando già a_2, coinciderebbe con $b_2^{(i)}$. Dunque $b_2^{(1)}$ seca $g_2, g_3, \ldots, g_{k-2}$.

Si consideri in secondo luogo uno qualunque dei piani (8) successivi ai due primi, e sia

$$c_2\, b_3^{(i)}\, g_i \qquad (i = 3, 4, \ldots, k-2).$$

Delle rette in esso contenute, la $c_3^{(2)}$ non taglia c_2, altrimenti, tagliando già c_1, coinciderebbe con c_3, e neppure taglia $b_3^{(i)}$, poichè, incontrando già a_3, coinciderebbe con $c_3^{(i)}$. Dunque $c_3^{(2)}$ incontra $g_3, g_4, \ldots, g_{k-2}$.

6. Riassumendo, abbiamo dimostrato che nelle ipotesi ammesse sono possibili due soli casi:

$$k=3\,,\quad \text{epperò}\quad x=15\;,\;y=15\;;$$
$$k=5\,,\quad \text{epperò}\quad x=27\;,\;y=45\,.$$

Nell'uno e nell'altro, le x rette della configurazione appartengono ad una (sola) superficie del terzo ordine, irriducibile e non rigata. Infatti le nove rette del quadro (4) formano la base di un fascio di superficie cubiche, determinato dalle due terne di piani contenenti le rette delle righe orizzontali e verticali del quadro stesso. Poichè $b_2^{(1)}$ si appoggia a tre delle nove rette, esiste nel fascio una superficie F, ed una sola, che contiene $b_2^{(1)}$, e ad F appartengono anche tutte le rimanenti rette della configurazione, poichè ciascuna ha con F più di tre punti comuni. Che F sia irriducibile e non rigata, è evidente.

7. È facile, nel primo caso, trovare le rimanenti dodici rette di F, e riconoscere che costituiscono una bissestupla.

Intanto osserviamo che i cinque piani della configurazione diversi dai dieci compresi nello schema (5), il quale si riduce ora ai soli due primi quadri, sono i seguenti:

$$a_1 f_1 g_1 \quad,\quad c_3 b_2^{(1)} f_1 \quad,\quad c_2 b_3^{(1)} g_1 \quad,\quad b_3 c_2^{(1)} g_1 \quad,\quad b_2 c_3^{(1)} f_1\,,$$

di cui gli ultimi quattro figurano nei gruppi (7), (8), (9) e (10).

Ora consideriamo ad es. le due terne di rette

$$b_2^{(1)} c_3^{(1)} g_1 \quad,\quad c_2^{(1)} b_3^{(1)} f_1\,, \tag{11}$$

le quali sono generatrici d'uno stesso iperboloide, appartenenti a schiere diverse. Com'è noto [1], esistono su F due, e due sole, bissestuple

$$\begin{matrix} b_2^{(1)} & c_3^{(1)} & g_1 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & c_2^{(1)} & b_3^{(1)} & f_1 \end{matrix}\quad,\quad \begin{matrix} b_2^{(1)} & c_3^{(1)} & g_1 & p_1' & p_2' & p_3' \\ q_1' & q_2' & q_3' & c_2^{(1)} & b_3^{(1)} & f_1 \end{matrix}$$

contenenti le sei rette (11). Le dodici rette $p_i\,,q_i\,,p_i'\,,q_i'$, evidentemente distinte dalle (11), sono anche distinte da quelle del quadro (4), poichè non incontrano alcuna retta dell'una o dell'altra delle due terne (11). Ora si sa [2] che le sei rette della prima bissestupla non comuni alla seconda, e

[1] H. Schröter, *Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung*, Giorn. di Crelle, Bd. 62 (1863), pag. 277; R. Sturm, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Leipzig 1867, pag. 55.

[2] Cremona, *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal*, Mem. della R. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. I (1877), pag. 854 (n. 43); *Opere mat.*, tomo III, Milano 1917, pag. 422.

le sei rette della seconda non comuni alla prima, costituiscono insieme una nuova bissestupla

$$\begin{matrix} p_1\, p_2\, p_3 & q'_1\, q'_2\, q'_3 \\ p'_1\, p'_2\, p'_3 & q_1\, q_2\, q_3\,. \end{matrix}$$

8. Un semplice corollario del teorema stabilito è la nota proprietà che *una configurazione di 15 rette* (*tre qualunque delle quali non passanti per uno stesso punto*), *situate a tre a tre su 15 piani, consta necessariamente delle rette di una superficie cubica escluse da una bissestupla.* È chiaro infatti che per una tale configurazione sono soddisfatte tutte le ipotesi da cui siamo partiti in questa Nota.

Matematica. — *Sulle discontinuità delle funzioni e delle loro derivate attraverso una superficie.* Nota di P. Burgatti, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

4. — Discontinuità dei potenziali newtoniani.

Ricordando che l'invariante primo di $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ è $div\,\mathbf{u}$, e quello d'una diade è il prodotto scalare dei due vettori che la caratterizzano, si ha, nel caso della (8),

$$[\mathrm{div}\,\mathbf{u}] = \mathbf{n} \times \mathbf{v}\,, \tag{8'}$$

e in quello della (9)

$$[\mathrm{div}\,\mathbf{u}] = \mathrm{div}\,[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \times \mathbf{v}\,, \tag{9'}$$

le quali definiscono la discontinuità della divergenza di $\mathbf{u}$.

Analogamente, rammentando che il vettore di $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ è $rot\,\mathbf{u}$, e quello d'una diade è il prodotto vettoriale dei suoi due vettori, risulta chiaramente dalle (8) e (9), secondo che $\mathbf{u}$ è continuo o discontinuo,

$$[\mathrm{rot}\,\mathbf{u}] = \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} \quad , \quad [\mathrm{rot}\,\mathbf{u}] = \mathrm{rot}\,[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}\,. \tag{10}$$

Nel caso in cui sia $\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$, in virtù delle (5), (6), (8) e (9), si ha in generale

$$\left[\frac{d\,\mathrm{grad}\,\varphi}{d\mathrm{M}}\right] = \frac{d\,\mathrm{grad}\,[\varphi]}{d\mathrm{P}} + \frac{d\,(m\mathbf{n})}{d\mathrm{P}} + \mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{v})\,; \tag{11}$$

[1] Questa Nota fa seguito alla precedente negli stessi Rendiconti. Per chiarezza, a quella si collegano progressivamente i numeri dei paragrafi e delle formule.

ritenendo $[\varphi]=0$ quando φ è continua. Ne consegue che la discontinuità attraverso σ della derivata di $\operatorname{grad}\varphi$ rispetto a M, e perciò di tutte le derivate seconde in qualsiasi direzione, è definita dalle discontinuità della funzione e delle derivate normali della funzione e del suo gradiente.

Infine, ricordando che l'operatore di Laplace per le grandezze scalari è

$$\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}\,,$$

dalla considerazione degl' invarianti primi d'ambo i membri della (11) si deduce

$$[\Delta\varphi]=\Delta[\varphi]+m\operatorname{div}\mathbf{n}+\mathbf{n}\times\mathbf{v}\,,$$

con $[\varphi]=0$ quando φ è continua attraverso σ (¹).

Sia φ un potenziale newtoniano d' uno strato di materia distribuita su σ con densità μ. Per cose note, si ha in questo caso

$$[\varphi]=0\quad,\quad m=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]=-4\pi\mu\quad,\quad[\Delta\varphi]=0\,;$$

perciò

$$-4\pi\mu\operatorname{div}\mathbf{n}+\mathbf{n}\times\mathbf{v}=0$$

ossia

$$\mathbf{v}=4\pi\,\{\mathbf{a}+(\mu\operatorname{div}\mathbf{n})\,\mathbf{n}\}$$

essendo $\mathbf{a}$ un vettore tangenziale. Ne consegue per la (11)

$$\left[\frac{d\operatorname{grad}\varphi}{d\mathrm{M}}\right]=-4\pi\,\frac{d(\mu\mathbf{n})}{d\mathrm{P}}+4\pi\,\mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{a}+(\mu\operatorname{div}\mathbf{n})\,\mathbf{n})\,,$$

che *definisce la natura delle discontinuità di tutte le derivate di secondo ordine in qualsiasi direzione.*

In modo analogo, se φ è un potenziale di doppio strato, essendo per cose note

$$[\varphi]=4\pi\mu\qquad m=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]=0\qquad[\Delta\varphi]=0\,,$$

risulta

$$\left[\frac{d\operatorname{grad}\varphi}{d\mathrm{M}}\right]=4\pi\,\frac{d\operatorname{grad}\mu}{d\mathrm{P}}+4\pi\,\mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{a}-\Delta\mu\,\mathbf{n})\,.$$

(¹) $\operatorname{div}(m\mathbf{n})=m\operatorname{div}\mathbf{n}+\operatorname{grad}m\times\mathbf{n}$; ma $\operatorname{grad}m\times\mathbf{n}=\operatorname{grad}_\sigma m\times\mathbf{n}=0$ perchè m è definita soltanto su σ. Si noti che *div* $\mathbf{n}$ rappresenta la *curvatura media* di σ; perchè, in coordinate cartesiane ad esempio, risulta

$$\operatorname{div}\mathbf{n}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\,,$$

estendo X Y Z i coseni di direzione di $\mathbf{n}$.

5. — Discontinuità nella deformazione dei corpi elastici.

Supponiamo che $\mathbf{u}(\mathrm{M})$ definisca lo spostamento di M in una deformazione infinitesima d'un solido elastico. Se l'omografia $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ della deformazione è discontinua attraverso σ (e lo sarà certamente se $\mathbf{u}$ ha discontinuità variabile), la sua discontinuità sarà del tipo (9). Ma potrebbe essere discontinua la dilatazione $\mathrm{D}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ (che definisce la pura deformazione) e continuo il vettore $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$; oppure, continua la dilatazione e discontinua la rotazione di $\mathbf{u}$. Affinchè accada il primo caso occorre che risulti

$$[\mathrm{rot}\,\mathbf{u}] = \mathrm{rot}[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} = 0\,.$$

Ponendo $\mathbf{v} = c\mathbf{n} + \mathbf{v}_\sigma$, ove $\mathbf{v}_\sigma$ è un vettore tangenziale; indi, moltiplicando prima scalarmente e poi vettorialmente per $\mathbf{n}$, si deduce

$$(12)\qquad \mathrm{rot}[\mathbf{u}] \times \mathbf{n} = 0 \qquad (12')\quad \mathbf{v} = c\mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \mathrm{rot}[\mathbf{u}]\,.$$

Concludiamo: *Se le discontinuità attraverso σ dello spostamento e della sua derivata normale soddisfano alle* (12) *e* (12'), *allora, e allora soltanto, sarà continua la rotazione e discontinua la pura deformazione, con discontinuità definita da*

$$\left[\mathrm{D}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}\right] = \mathrm{D}\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{DH}(\mathbf{n}\,,\,c\mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \mathrm{rot}[\mathbf{u}])\,.$$

In particolare, se $\mathbf{u}$ è continuo, le precedenti condizioni si riducono a $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$. Il lettore potrà verificare, per esempio, che le (12) e (12') sono soddisfatte per $\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$, essendo φ un potenziale di semplice strato relativo a σ.

Affinchè accada il secondo caso accennato di sopra, occorre che sia [1]

$$2\mathrm{D}\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{H}(\mathbf{n}\,.\,\mathbf{v}) + \mathrm{H}(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{n}) = 0$$

Prendendo l'invariante primo si trae intanto

$$\mathrm{div}[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0\,.$$

Inoltre, notando che

$$2\mathrm{D}\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}}\mathbf{n} = 2\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}}\mathbf{n} - \mathrm{rot}[\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n} = -\mathrm{rot}[\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n}\,,$$

[1] Il doppio della dilatazione d'una diade è uguale alla diade stessa più la sua coniugata, che si ottiene scambiando l'ordine dei vettori.

si deduce ancora

$$-\operatorname{rot}[\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n} + \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{n})\,\mathbf{n} = 0\,;$$

la quale, moltiplicata scalarmente per $\mathbf{n}$, dà $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$. Dunque

$$(13)\quad \operatorname{div}[\mathbf{u}] = 0 \qquad\qquad (14)\quad \mathbf{v} = \operatorname{rot}[\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n}\,.$$

Dopo ciò la condizione precedente diventa

$$(13')\qquad \mathrm{D}\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{DH}(\mathbf{n}\,,\ \operatorname{rot}[\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n}) = 0.$$

Concludiamo pertanto: *Se la discontinuità dello spostamento soddisfa le* (13) *e* (13′) *e quella della sua derivata normale è definita dalla* (14), *allora, e soltanto allora, sarà continua la dilatazione e discontinuo il vettore.*

Quando $\mathbf{u}$ è continuo, le condizioni precedenti son soddisfatte; ma risultando $\mathbf{v} = 0$, la (8) dà $\left[\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{M}}\right] = 0$; perciò la continuità dello spostamento e della pura deformazione portano di conseguenza anche la continuità della rotazione.

Vogliasi ora che sia continua l'omografia (dilatazione)

$$\beta = -\,a \operatorname{div}\mathbf{u} - b\,\mathrm{D}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{M}} \qquad\qquad (a \text{ e } b \text{ costanti}),$$

che è quella delle tensioni elastiche, nel caso dei corpi isotropi [1]. Dovrà risultare

$$a\,[\operatorname{div}\mathbf{u}] + b\left[\mathrm{D}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{M}}\right] = 0\,;$$

ossia per le (9) e (9′)

$$a\,(\operatorname{div}[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \times \mathbf{v}) + b\left(\mathrm{D}\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{DH}\,(\mathbf{n}\,,\mathbf{v})\right) = 0\,.$$

Prendendo l'invariante primo risulta [2]

$$\operatorname{div}[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0\,;$$

e però

$$\left(\mathrm{D}\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{DH}\,(\mathbf{n}\,,\mathbf{v})\right) = \left[\mathrm{D}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{M}}\right] = 0\,.$$

[1] An. Vect. Gen., T. II, pag. 29.
[2] L'invariante primo d'uno scalare e tre volte lo scalare.

Dunque sarà continua anche la pura deformazione; onde si ricade sul teorema precedente.

Parecchi altri problemi si possono trattare con questi principî. Per brevità ne considereremo un altro soltanto utile nella teoria dell'elasticità.

Insieme alla discontinuità dello spostamento **u**, poniamo la condizione che sia continuo il vettore

$$a \operatorname{div} \mathbf{u} \,.\, \mathbf{n} + b \, \mathrm{D} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}} \mathbf{n}$$

nei punti $\mathrm{M} = \mathrm{P}$ di σ; vettore che definisce le pressioni sugli elementi di σ. Per le cose viste di sopra dovrà risultare

$$a \left(\operatorname{div} [u] \,.\, n + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \, \mathbf{n} \right) + b \left(\mathrm{D} \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} + \mathrm{DH} (\mathbf{n} \,.\, \mathbf{v}) \, \mathbf{n} \right) = 0;$$

ossia, sviluppando e semplificando,

$$a \operatorname{div} [\mathbf{u}] \,.\, \mathbf{n} + (a + b) (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \, \mathbf{n} + b \, \mathbf{v} + b \, \mathrm{D} \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} = 0 .$$

La moltiplicazione scalare per **n** dà [1]

$$(a + 2b) (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = - a \operatorname{div} [\mathbf{u}] ;$$

e quella vettoriale

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{v} = \mathrm{D} \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = - \tfrac{1}{2} (\operatorname{rot} [\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} =$$
$$= - \tfrac{1}{2} (\operatorname{rot} [\mathbf{u}] \times \mathbf{n}) \, \mathbf{n} + \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} [\mathbf{u}] .$$

Da queste due si trae **v**, e precisamente

$$\mathbf{v} = - \frac{a}{a + 2b} \operatorname{div} [\mathbf{u}] \,.\, \mathbf{n} + \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} [\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n} .$$

Così, per la (9), la discontinuità di $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ resta definita; e però anche quelle separatamente della pura deformazione e della rotazione.

[1] Si ricordi che

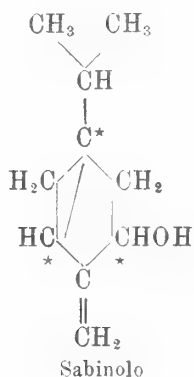
$$\mathrm{D} \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} = \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} - \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} [\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} = 0 .$$

Chimica. — *Sabinoli isomeri* [1]. Nota del dott. VINCENZO PAOLINI e di GIOVANNI REBORA, presentata dal Corrispondente A. PERATONER.

Col nome di Sabinolo si indica l'alcool secondario non saturo, $C_{10}H_{16}O$, dell'essenza di Sabina, la quale si ricava con la distillazione al vapor d'acqua delle foglie e dei giovani rami della Sabina officinalis Garcke (*Iuniperus Sabina* L). Il Sabinolo si trova nell'essenza sia allo stato libero (10 %), sia combinato con l'acido acetico (40 %); dall'essenza saponificata, mediante ripetute distillazioni frazionate, si ricava l'alcool privo di Terpeni e di Sesquiterpeni.

I numeri ricordati dai diversi autori per le costanti fisiche del Sabinolo non sono concordanti; così per esempio oscilla il punto di ebolizione fra 208° e 213° e la densità a 20° fra 0,9432 e 0,950.

Una discrepanza maggiore si osserva per la deviazione ottica, avendosi per il potere rotatorio del Sabinolo valori oscillanti da un minimo [2] $[\alpha]_D = +6°.0'0$ ad un massimo [3] $[\alpha]_D = +17°,04'$. Ora poichè il Sabinolo contiene ben tre atomi di carbonio asimmetrici, la teoria lascia prevedere l'esistenza di otto modificazioni attive isomere. Tuttavia nella letteratura del Sabinolo non si trova riportato alcun tentativo diretto alla separazione

```
     CH3  CH3
        \/
        CH
        |
        C*
      / | \
  H2C   |   CH2
   |    |    |
  HC    |   CHOH
   * \  |  / *
        C
        ||
       CH2
```

Sabinolo

dei diversi stereoisomeri, e la ragione di ciò va ricercata nel fatto che per il Sabinolo mancano derivati solidi facilmente cristallizzabili, dai quali, dopo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico Farmaceutico della R. Università di Roma.
(2) F. Elze, Chemiker Zeitung, 34, 1910, pag. 767.
(3) Agnewe e R. Croad, Schimmel, Bulletin, octobre 1912, pag. 105.

opportuni frazionamenti, si possa rimettere in libertà l'alcool allo stato puro.

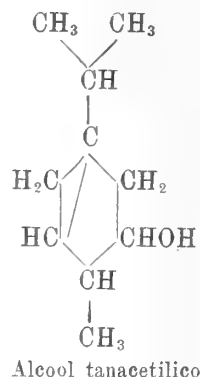
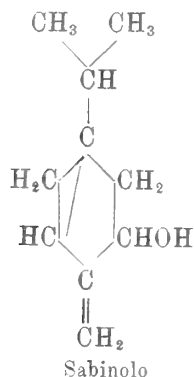
Come è noto dalle esperienze di Arth [1] col Mentolo e da quelle di Stephan [2] col Geraniolo, un metodo particolarmente adatto alla depurazione degli alcool terpenici, è quello che si vale della loro eterificazione con anidride ftalica; dai ftalati acidi, per saponificazione, si ricavano gli alcool puri. Ora malgrado si legga nel trattato del Semmler [3] che gli eteri composti del Sabinolo sono sconosciuti, e che per conseguenza si imporrebbe la necessità di andare in cerca di un derivato solido, dal quale ottenere l'alcool puro, esperienze dirette a questo scopo mancarono fino ad oggi.

La costituzione del Sabinolo fu stabilita dal Fromm e dal Semmler, studiandone i prodotti di ossidazione e di riduzione [4]. Per riduzione con sodio ed alcool amilico il Sabinolo dà alcool tanacetilico, mentre all'ossidazione permanganica fornisce acido tanaceton-dicarbonico, fusibile a 142°. Queste reazioni, che servono a caratterizzare il Sabinolo, mostrano la stretta relazione fra Sabinolo ed alcool tanacetilico.

CH_3 CH_3 / CH / C / H_2C CH_2 / HC $CHOH$ / C / CH_2

Sabinolo

CH_3 CH_3 / CH / C / H_2C CH_2 / HC $CHOH$ / CH / CH_3

Alcool tanacetilico

Già per l'alcool tanacetilico lo stesso Semmler aveva osservato che il riscaldamento con anidride ftalica non dava buoni risultati; si verificano qui reazioni secondarie, in quanto che gli agenti acidi provocano rottura del nucleo con facile eliminazione di acqua, e il prodotto della reazione è una massa fluida, appiccicaticcia che non si presta alla cristallizzazione [5].

Lo stesso inconveniente abbiamo potuto verificare nel riscaldamento del Sabinolo con anidride ftalica. Ma l'osservazione già fatta da Paolini in pre-

(1) Ann. Ch. Phys. VI, 7, 483.
(2) Journ. f. prakt. Ch. II, 60, 248.
(3) W. Semmler, Die Aetherischen Oele. Band. III, pag. 207.
(4) Berichte 31, 2025 (1898).
(5) Die Aetherischen Oele, Bd. III, pp. 134-137.

cedenti ricerche [1] « Sopra gli alcool tanacetilici isomeri » e la modalità di esperienza ivi adottata, che consiste nel far reagire a freddo una soluzione (in benzina petrolica) del sale sodico dell'alcool, da purificare, con anidride ftalica, ci ha condotti anche nel caso del Sabinolo, e senza troppe difficoltà, alla preparazione di un etere ftalico acido, ben cristallizzato, fusibile a 95°, con $[\alpha]_D = -14°,63'$ che nella sua composizione risponde alla formula $COOH . C_6H_4 . COOC_{10}H_{15}$.

E questo etere deve considerarsi come una sostanza unica, giacchè comunque ricristallizzato non muta affatto il suo punto di fusione, nè il suo potere rotatorio specifico.

Per saponificazione dell'etere acido con potassa alcoolica abbiamo ricavato un Sabinolo con $\alpha_D = + 7°,20'$ e che possiede i caratteri d'una sostanza chimica unica: da esso difatti, per trattamento con anidride ftalica, si perviene, senza formazione di prodotti secondarî, direttamente allo ftalato acido suddetto fusibile a 95° con $[\alpha]_D = - 14°63'$.

Questo procedimento da noi seguìto, si presta assai bene non solo per isolare Sabinolo puro, ma ci ha permesso di stabilire che nell'essenza di Sabina non esistono altri Sabinoli isomeri. Difatti eliminando tutto il solvente delle acque madri di cristallizzazione, riunite, dello ftalato acido suddetto, abbiamo ottenuto uno sciroppo non più cristallizzabile, ma che si lascia facilmente salificare con stricnina. Dal sale di stricnina purificato per successive cristallizzazioni dall'alcool, si perviene, per trattamento con acido cloridrico diluito e freddo, unicamente ad uno ftalato acido che presenta tutti i caratteri di quello sopra descritto, lo stesso punto di fusione, lo stesso potere rotatorio specifico.

Aggiùngiamo finalmente che le modalità del metodo descritte, le quali conducono a prodotti perfettamente puri, se applicate ad essenze di altra provenienza, potranno fornire il mezzo di differenziare il Sabinolo studiato da eventuali isomeri, che pur non discostandosene nelle altre costanti fisiche, dovrebbero però mostrare un potere rotatorio notevolmente diverso. Ed a questo proposito conviene rilevare che anche in altre Conifere, ad es. nel *Cupressus Sempervirens* [2], è stata segnalata, ma come dubbia, la presenza del Sabinolo, quistione questa che senza difficoltà potrà essere risolta

Esperienze. — L'essenza di Sabina [3] veniva saponificata (indice di saponificazione) con potassa alcoolica, quindi sottoposta alla distillazione in corrente di vapore. Dopo accurato disseccamento con carbonato potassico, si distillava frazionatamente, raccogliendo a parte le frazioni che bollivano

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XX, serie 5ª, fasc. 10, 1911.

(2) Gildemeister e Hoffmann, Die Aeterischen Oele, II, Auflage von E. Gildemeister Band. II, pag. 162.

(3) Della Casa Schimmel e C., Leipzig.

fra 200° e 215°, molto ricche in alcool e che venivano adoperate per la preparazione dello ftalato acido del Sabinolo.

Ftalato acido di Sabinolo. — Gr. 25 di essenza sciolti in 60-70 cc. di etere di petrolio (p. eb. 60°-70°) si lasciano reagire alla temperatura ambiente per 6-8 ore con un eccesso di sodio metallico in nastri; dopo questo tempo la soluzione limpida del sale sodico dell'alcool, decantata dall'eccesso di metallo, si fa gocciolare sulla quantità di anidride ftalica corrispondente al sodio consumato, e sospesa in 200-300 cc. di etere di petrolio. Si agita continuamente finchè l'aggiunta è completa, e si lascia quindi in riposo. Dopo 40 ore si tratta il prodotto della reazione con 300-400 cc. di acqua alcalina per idrato sodico, con che passa in soluzione nell'acqua, sotto forma di sale sodico, la massima parte dell'etere ftalico acido, mentre le piccole quantità di terpeni rimangono disciolte nell'etere di petrolio.

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}\right\rangle O + C_{10}H_{15}ONa = C_6H_4\left\langle\begin{matrix}COONa\\COOC_{10}H_{15}\end{matrix}\right.$$

Il liquido alcalino si lava pertanto da prima agitando con nuovo etere di petrolio, e successivamente si acidifica con acido solforico diluito. Ben presto si separa una sostanza oleosa giallognola che dopo riposo sott'acqua indurisce senza solidificare. Per la purificazione viene disciolta in una soluzione diluita di carbonato sodico, e dalla soluzione alcalina limpida, si precipita di nuovo l'etere acido per aggiunta di acido solforico diluito. Ripetendo due o tre volte questo trattamento si arriva ad un prodotto che indurisce rapidamente, e che, dopo disseccamento completo sull'acido solforico, si lascia cristallizzare con facilità dalla benzina di petrolio (70°-80°) all'ebollizione. Lo ftalato acido del Sabinolo cristallizza dalla benzina in aghi bianchi setacei, riuniti a ciuffetti che fondono costantemente a 94°-95°. La sua purezza fu dimostrata con l'analisi:

gr. 0,800 di sostanza consumano CC. 25,5 di Na OH $\frac{N}{10}$ mentre un acido monobasico C_6H_4 COOH $COOC_{10}H_{15}$ richiede cc. 25,6 di alcali $\frac{N}{10}$.

Una soluzione contenente gr. 7,382 di etere acido in cc. 100 di alcool metilico, diede in tubo lungo 20 cm.

$$\alpha_D = -2°,10' \text{ onde } [\alpha]_D = -14°,63'.$$

Sabinolo. — Gr. 20 di puro ftalato acido fusibile a 95°, vengono disciolti in 70 cc. di potassa alcoolica doppio normale, e riscaldati per 20 minuti a bagno maria. Il prodotto della reazione, diluito con acqua, viene distillato in corrente di vapore; lo strato galleggiante di Sabinolo viene di-

sciolto in etere, e questa soluzione disseccata con carbonato potassico: per evaporazione del solvente rimane il Sabinolo che bolle a 208°.

Il Sabinolo è un liquido incoloro, denso, di odore debolmente aromatico, gradevole, che ricorda più quello dell'alcool tanacetilico anzichè quello penetrante disgustoso del tanacetone [1]; è destrogiro.

$$D^{15°} = 0,9518$$
$$N_D 18° = 1,4895$$
$$\alpha_D \text{ (in tubo da 1 dm.)} = + 7°,20' \text{ onde } [\alpha]_D = + 7°,56'$$

Combustione:

$$C_{10}H_{16}O = 152 \begin{cases} \text{trovato} & C = 78,68 \quad H = 10,75 \\ \text{calcolato} & \text{»} = 78,94 \quad \text{»} = 10,52 . \end{cases}$$

Confrontando queste costanti fisiche con quelle dell'alcool tanacetilico, studiato dal Paolini, si ha:

	Sabinolo $C_{10}H_{16}O$	Alcool tanacetilico $C_{10}H_{18}O$
p. eb.	208°	210°
$D^{15°}$	0,9518	0,925
$N_D 18°$	1,4895	1,4635
$[\alpha]_D =$	$+ 7°,56'$	$+ 115°,00$

Ftalato di Sabinolo e stricnina. — La benzina, dalla quale fu separato l'etere ftalico acido fusibile a 95°, non dà ulteriore prodotto cristallino, ma lascia per evaporazione un residuo ormai incristallizzabile, del quale non è più possibile spingere oltre il frazionamento.

Pur nondimeno è possibile di ricavare da questo denso sciroppo ancora lo stesso etere ftalico fusibile a 95°, qualora si passi per il sale di stricnina. Infatti mescolando una soluzione alcoolica concentrata del residuo sciropposo, con la quantità equivalente di stricnina finamente polverizzata, la stricnina si scioglie, prontamente e a freddo, nel liquido acido, e per evaporazione del solvente rimane una massa bianca cristallina che viene purificata per successive cristallizzazioni dall'alcool etilico. Lo ftalato di Sabinolo e stricnina cristallizzata in aghi bianchi splendenti, fusibili a 200°-201°, poco solubili in alcool freddo.

Analisi:

$$C_{39}H_{40}N_2O_6 = 634 \begin{cases} \text{trovato} & C = 73,70 \quad H = 6,32 \\ \text{calcolato} & \text{»} = 73,81 \quad \text{»} = 6,62 . \end{cases}$$

Una soluzione alcoolica del sale, satura a freddo, viene trattata con la quantità necessaria di acido cloridrico diluito per trasformare tutta la stricnina in cloridrato; per aggiunta successiva di molta acqua precipita lo ftalato acido di Sabinolo che raccolto su filtro, lavato con acqua e disseccato, viene ricristallizzato dalla benzina di petrolio, dopo che fonde a 95°.

[1] Die Aetherischen Oele, Bd. III, pag. 205.

Patologia. — *Quinto tumore trapiantabile, essiccabile, e filtrabile dei polli* [1]. Nota di F. PENTIMALLI, presentata dal Corrispondente G. GALEOTTI.

Per le ricerche di Fujinami e di Rous, fatte contemporaneamente. ma indipendentemente, l'uno dall'altro, l'oncologia sperimentale ha acquistato un campo di studio assai vasto, e, probabilmente, assai più ricco di resultati dei precedenti. In Giappone, come in America, furono trovati alcuni speciali tumori dei polli, che presentano la proprietà di poter essere trapiantati, anche dopo completo essiccamento del materiale, o dopo filtrazione attraverso candela Berkefeld.

Occupato, da lungo tempo, con questi studî, che furono oggetto di varie pubblicazioni, riferisco ora brevemente di aver trovato in Italia un tumore dei polli, dello stesso tipo di quelli osservati in America e in Giappone, ciò che può stare a significare come tali neoformazioni siano diffuse più di quel che comunemente si creda.

Tumore originario. — Nei primi di maggio dello scorso anno, è capitata alla mia osservazione una gallina, la quale presentava sulla regione ventrale, in corrispondenza della parte sinistra dell'estremo inferiore della cresta sternale, un tumore, della grandezza di un piccolo mandarino. La cute, al di sopra, era sprovvista di penne, ed alla palpazione il tumore stesso era poco spostabile in tutti i sensi. All'operazione di estirpazione del tumore, eseguita il 5 maggio 1915, si può constatare che esso è compreso nello spessore della parete muscolare; si presenta necrotico nel centro, ma alla periferia vi è uno strato di tessuto, ben conservato, che ha aspetto sarcomatoso. L'estirpazione si fa completa, asportando con cucchiaio tagliente anche le più piccole particelle di tumore, e tagliando perfino le porzioni di tessuto muscolare intorno. Con la massa di tumore estirpato si fa un estratto, in liquido di Ringer, che si inocula, in quantità di 5 cc., nei muscoli della gamba destra e sinistra della stessa gallina, e nei muscoli pettorali destri e sinistri di quattro altri polli.

Istologicamente il tumore offre un quadro molto simile a certe specie di sarcomi, essendo costituito da tessuto connettivale assai ricco di cellule, per lo più a forma affusata, tra le quali si può osservare una sostanza intercellulare mucosa. Le cellule fusiformi hanno un diverso aggruppamento nei varî punti del tumore; ora si presentano riunite a fasci, con poca sostanza intercellulare, ora sono più diradate, lasciando maggior posto alla

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale di Napoli.

sostanza mucosa. Nelle parti più vecchie del tumore la forma delle cellule non è così tipicamente affusata come nelle parti più giovani, poichè si osservano più frequentemente cellule con lunghi e fini prolungamenti, i quali possono prendere anche una disposizione stellata. Forme cellulari di divisione mitotica ed amitotica sono frequenti ad incontrarsi. Tra i fasci cellulari decorrono piccoli vasi sanguigni, nella maggior parte dei quali la parete propria difficilmente si lascia riconoscere dal circostante tessuto del tumore. Qualche volta accumuli leucocitari e linfocitari accompagnano i vasi sanguigni, specialmente nelle porzioni più vecchie di tessuto; elementi eosinofili non sono rari a trovarsi in tutte le porzioni del tumore. Il comportamento del tumore di fronte al tessuto muscolare su cui si è sviluppato caratterizza la sua natura, poichè esso penetra nelle singole fibre e le distrugge, ovvero con la moltiplicazione dei suoi elementi determina la necrosi degli elementi istologici viciniori.

Il 12 maggio 1915, otto giorni dopo l'operazione, la gallina muore. In questo breve tempo, non soltanto si erano riformati nuovi noduli di tumore, lungo tutta la periferia del posto dove si era estirpato il tumore originario, ma anche l'emulsione di tessuto inoculata nei muscoli delle gambe, aveva già determinato lo sviluppo di un tumore della grandezza di una piccola noce. Alla sezione dell'animale, si trova una grande neoformazione occupante la parte superiore del petto, estendentesi, in alto, fino allo sterno, in basso fino al fegato. Il tumore ha letteralmente invaso polmoni, pleura, pericardio, ed avvolge, come in un manicotto, tutto il cuore, il quale è separato dal tumore da poco liquido giallastro, in parte coagulato. Il fegato presenta qua e là punti emorragici di varia grandezza; i rimanenti organi macroscopicamente non offrono nulla di particolare. Istologicamente queste masse di tumore trovate all'autopsia, presentavano caratteri perfettamente eguali a quelli del tumore estirpato con l'operazione.

Trapianti successivi. Iª generazione. — I quattro polli inoculati nei muscoli pettorali destri e in quelli sinistri con 5 cc. di emulsione del tumore estirpato con l'operazione, furono uccisi dopo tre settimane dall'inoculazione. In tre di essi si è trovato, nel punto di inoculazione, un tumore che aveva invaso quasi tutto il muscolo pettorale; nel quarto, l'inoculazione ebbe esito negativo. Queste neoformazioni macroscopicamente e microscopicamente erano perfettamente simili al tumore originario.

IIª generazione. — Con una emulsione di tumore della Iª generazione vengono inoculati tre polli nel muscolo pettorale. Di nuovo si ha un pollo con esito negativo, mentre nei due rimanenti lo sviluppo del tumore si mostra rigoglioso e con caratteri spiccatamente emorragici. In uno di questi due polli si osservano nel fegato punti e chiazze emorragiche, che all'esame microscopico si addimostrano essere metastasi iniziali.

III^a generazione. — Cinque polli sono inoculati nel muscolo pettorale con una emulsione di tumore della II^a generazione. Gli animali morirono tutti tra la quarta e la quinta settimana, ed alla sezione si è trovato assai sviluppato il tumore nel punto d'inoculazione. Due di essi presentavano piccoli noduli metastatici nel fegato, nel quale si notavano anche focolai emorragici. All'esame microscopicoo, il carattere del tessuto del tumore nei varî animali si dimostrò uguale al tumore originario.

Resistenza all'essiccamento. — I. Il tumore proveniente da un pollo della III^a generazione, è sminuzzato con forbici sterili, e la poltiglia è fatta rapidamente essiccare, nel vuoto, sopra acido solforico. Dopo parecchi giorni dall'essiccamento completo, il tessuto, che si presenta ora a scaglie, è finamente triturato in un mortaio di porcellana sterile e ridotto in polvere. A questa è aggiunta, poco a poco, soluzione di Ringer sterile, e la sospensione ottenuta si inocula, per mezzo di una comune siringa ad ago grosso, nei muscoli pettorali destri e sinistri di tre polli, in quantità di 5 cc. per ciascuno.

Gli animali vengono uccisi alla fine della 3^a settimana. Due di essi presentano, alla sezione, abbastanza sviluppate il tumore da entrambi i lati, con gli stessi caratteri macroscopici del tumore originario, senza metastasi negli organi interni. Il terzo pollo presentava, nel muscolo pettorale destro, un tumore della grandezza di una noce; nel muscolo pettorale sinistro, invece, non si notava che una circoscritta alterazione del muscolo nel punto d'inoculazione, come se l'inoculazione avesse avuto esito negativo. Tuttavia, il taglio longitudinale del muscolo in questo punto, faceva vedere che l'alterazione si approfondiva sino a raggiungere i muscoli intercostali, dove l'alterazione stessa si mostrava più estesa. Aperta la gabbia toracica in questo punto, si è trovata la cavità pleurale sinistra occupata da masse tumorali mixosarcomatose, le quali avevano invaso anche il pericardio, e i foglietti peritoneali di rivestimento del fegato, che si trova compreso in una spessa fodera di tumore. Il mesentere delle anse intestinali non appare però ispessito, come pure non pare che macroscopicamente vi siano metastasi negli organi interni, neanche nel fegato. L'esame microscopico di questa estesa neoformazione, fatto in parecchi pezzi, ha dimostrato che il tumore era per struttura perfettamente simile a quello originario ben noto, per cui la sede di esso può facilmente spiegarsi col fatto che l'ago della siringa, durante l'inoculazione, aveva oltrepassato il limite del muscolo pettorale, e, penetrato nella cavità toracica, aveva deposto in essa la sospensione di tumore.

II. La polvere di tessuto di tumore ottenuta come sopra, conservata in tubo sterile, chiuso alla lampada, ed in ghiacciaia, si è dimostrata attiva anche dopo 11 mesi dalla sua preparazione, riproducendo negli animali in cui fu inoculata, il tumore a carattere sarcomatoso. Il tessuto, anzi, di questo tumore, fu adoperato per l'esperimento di filtrazione.

Esperimento di filtrazione. — 10 gr. di tumore vengono pestati, con sabbia di quarzo, in un mortaio di porcellana, con l'aggiunta, a poco a poco, di 200 cc. di liquido di Ringer. Si lasciano depositare la sabbia di quarzo e le particelle più grandi della sospensione; a questa si aggiungono 0.20 cc. di una cultura in brodo di *bacterium pyocyaneum*; poi si filtra attraverso candela Berkefeld V, alla temperatura di 20°, e con pressione variabile da 40 a 60 mm. di mercurio. Il tempo di durata di filtrazione è di 40 minuti. Due polli vengono inoculati nei muscoli pettorali destri e sinistri con 5 cc., per ogni inoculazione, del semplice filtrato, e due altri polli vengono inoculati con 5 cc. di liquido filtrato, al quale era stata previamente mescolata una piccola quantità di polvere di diatomee. Del filtrato si fanno, inoltre, strisci su agar e innesti in brodo, i quali rimasero sterili.

Dopo 45 giorni dalla inoculazlone, gli animali si uccidono.

Alla sezione, i polli che erano stati inoculati con semplice filtrato, non mostrarono alcun sviluppo di tumore; dei due, invece, inoculati con filtrato e polvere di diatomee, uno presentava un tumore, della grandezza circa di una noce, da entrambi i lati del petto, l'altro soltanto un piccolo tumoretto nel muscolo pettorale sinistro. L'esame microscopico di queste neoformazioni ha confermato che la loro struttura istologica era perfettamente uguale a quella del tumore originario.

Conclusioni. — Questa breve Nota preventiva illustra uno speciale tumore dei polli, il primo trovato in Italia, ed il quinto noto nella letteratura, che, per la sua struttura grossolana, come per quella istologica, per la proprietà di dare metastasi, e per lo stato di cachessia che induce nell'animale, è da considerarsi come un tumore vero. Tale tumore si è dimostrato capace di attecchire non soltanto se reimplantato nell'animale che lo presentava originariamente, ma anche se trapiantato, per generazioni successive, in polli della stessa razza. Come i tumori descritti da Rous, in America, e da Fujinami, in Giappone, presenta inoltre la straordinaria proprietà di poter essere trapiantato anche dopo completo essiccamento del tessuto, nel vuoto, sopra acido solforico, rimanendo attivo ancora per lungo tempo dopo l'essiccamento, ovvero dopo filtrazione attraverso candela Berkefeld V.

Chimica. — *Sui borati. - Sistema* $(NH_4)_2O$, B_2O_3, H_2O a 30°. Nota III di U. Sborgi e F. Mecacci [1], presentata dal Socio R. Nasini [2].

Questo sistema fu da noi già studiato per le temperature di 30° [3] e di 60° [4].

A 30° si trovarono come fasi stabili un diborato e un pentaborato e furon date le curve di solubilità dell'uno e dell'altro. Ma nei punti di passaggio dall'una all'altra curva di solubilità i resultati sperimentali dettero luogo ad alcune incertezze e si pensò allora opportuno (come è detto a pag. 93 della Nota II citata) di rimettere la questione a quando il sistema fosse stato studiato ad altre temperature: perciò nel diagramma allora pubblicato si segnò tra la curva I e la II una linea tratteggiata a indicare questa breve zona inesplorata.

Studiato il sistema alla temperatura di 60° e ottenuto un diagramma completo, si procedè al completamento del diagramma a 30° e nella presente Nota si riferiscono i resultati ottenuti.

Non descriviamo qui i metodi sperimentali adottati che sono gli stessi più volte descritti nelle precedenti Note sui borati, e riportiamo senz'altro nella tabella seguente i resultati riguardanti il ramo di curva del diborato che parte dal punto invariante tra il diborato e il pentaborato, e si riattacca alla parte di curva del diborato già studiata. Nel punto invariante, la soluzione ha la composizione seguente:

$$(NH_4)_2O\ \%\ 3.125\ ,\ B_2O_3\ \%\ 12.59\ ,\ H_2O\ \%\ 84.285\ ;$$

e questo punto fu già individuato precedentemente (ved. Esperienza 15, pag. 91 della Nota II già citata).

I valori che si hanno a partire da questo punto per la curva del diborato sono quelli della tabella seguente, nella quale riportiamo anche il tempo durante il quale tenemmo in termostato a 30° in continua agitazione.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Pisa.

[2] Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1916.

[3] Questi Rendiconti: Nota I, vol. XXI, serie 5ª, 2° sem., pag. 855; Nota II, vol. XXII, serie 5ª, 1° sem. pag. 90.

[4] Ibidem, vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., pag. 1225.

TABELLA.

Numero d'ordine	Tempo di agitazione in termostato	SOLUZIONE			RESTO		
		$(NH_4)_2O$ %	B_2O_3 %	H_2O %	$(NH_4)_2O$ %	B_2O_3 %	H_2O %
I *a*	8 giorni	3.31	11.90	84.79			
" *b*	19 "	3.34	11.93	84.73	17.05	42 60	40.35
II *a*	7 "	3.03	9.85	87.12			
" *b*	11 "	3.04	9.72	87.24	16.13	44.02	39.85
III *a*	7 "	3.05	8.27	88.68			
" *b*	10 "	3.09	8.29	88.62	15.10	41.00	43.90
IV *a*	5 "	3.11	6.89	90.00			
" *b*	12 "	3.16	7.01	89.83	13.48	36.24	50.28

Queste esperienze completano il diagramma dei borati a 30°: esse dovettero essere inserite tra la esperienza 15 e la 16 della tabella I, Nota II prima citata.

Ora però, durante lo studio dei borati di ammonio a 60°, si era presentata una questione riguardante la composizione del corpo di fondo della curva più alta o, a meglio dire, riguardante il contenuto in acqua di cristallizzazione o di costituzione spettante al diborato. La questione, illustrata nella Nota sui borati a 60° [1], era, riassumendo, questa: le linee di coniugazione partenti dalla parte più bassa, e quasi orizzontale della curva del diborato passavano per il punto spettante al corpo di fondo 1-2-2 $^1/_2$ e poi, prolungate, passavano per il punto 1-2-4; le linee di coniugazione partenti dalla parte più alta, e quasi verticale, della curva finivano nel punto 1-2-2 $^1/_2$: sicchè da tutto il fascio di curve si sarebbe dovuto dedurre, come composizione del diborato la 1-2-2 $^1/_2$. L'analisi diretta del corpo di fondo ci portava invece a concludere — pure attraverso alcune anomalie osservate, che del resto non erano che la riprova del comportamento delle linee di coniugazione — per la composizione 1-2-4: le anomalie osservate erano poi da riferirsi con assai probabilità, come esponemmo, ad una inclusione di ammoniaca nel corpo di fondo. Ora, anche a 30°, il fascio delle linee di coniugazione ci aveva portato a concludere per la composizione 1-2-2 $^1/_2$ (o, eliminando le frazioni, 2-4-5). Messi in guardia da quanto avevamo constatato a 60°, pensammo che anche a 30° potessero verificarsi gli stessi fatti; che anzi, essendo la soluzione più ricca in ammoniaca, ci trovavamo in condizioni più adatte per la occlusione di questa nel corpo di fondo. Ritenemmo

[1] loc. cit.

quindi opportuno eseguire delle esperienze per risolvere la questione a 30° come l'avevamo risolta a 60°.

Esaminammo prima di tutto per analisi diretta (dopo separato, lavato e asciugato) il corpo di fondo esistente in presenza di una soluzione a basso contenuto in ammoniaca, cioè rappresentata da un punto posto nella parte bassa della curva del diborato. Avemmo i risultati seguenti:

Soluzione:	$(NH_4)O_2$ %	5.00	B_2O_3 %	5.44	H_2O %	89.56
Corpo di fondo:	"	19.95	"	53.75	"	26.30
1-2-4 teorico:	"	19.70	"	53.03	"	27.27

In altre esperienze avemmo resultati consimili. Non vi ha dubbio che il corpo di fondo è l' 1-2-4.

Nella parte più alta della curva si ottenevano invece resultati come i seguenti:

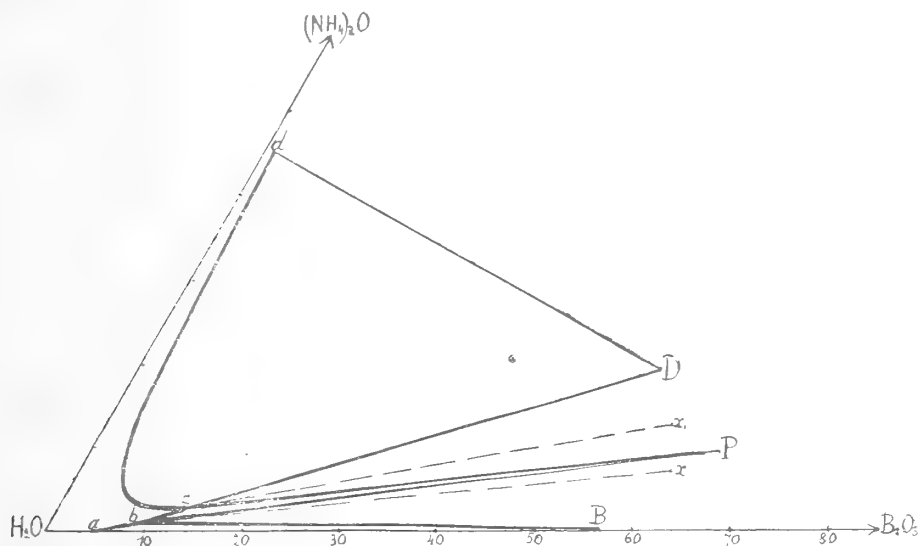
Soluzione:	$(NH_4)_2O$ %	39.64	B_2O_3 %	0.75	H_2O %	59.61
Corpo di fondo:	"	24.15	"	52.51	"	23,34

Anche qui, dunque, come a 60°, nel ramo alto della curva si aveva per il corpo di fondo una composizione non concordante con quella dell' 1-2-4 teorico, ma nemmeno con quella dell' 1-2-2 $^1/_2$, che sarebbe 21.95 % $(NH_4)_2O$, 59.07 % B_2O_3, 18.98 % H_2O. E anche qui come a 60°, si avevano risultati per il B_2O_3 vicini a quelli che si hanno per l' 1-2-4, ma per $(NH_4)_2O$ altissimi, anzi più alti che non a 60° (21.58 %), come nell' ipotesi di una inclusione di ammoniaca è prevedibile che avvenga, data la temperatura più bassa e il maggior contenuto in ammoniaca libera della soluzione. Ripetemmo anche esperienze per cercare nuove linee di coniugazione nel ramo alto della curva, ma non avemmo che confermati i risultati riportati nella tabella I della Nota II.

Noi riteniamo perciò — fino a che studiando il sistema ad altre temperature non intervengano fatti sperimentali nuovi — che qui come a 60° il corpo di fondo sia in realtà l' 1-2-4, ma che esso includa ammoniaca non appena la concentrazione di questa nella soluzione sia un po' alta [1].

Tenuto conto di tutti i fatti riportati nelle due Note citate e nella presente Nota, il diagramma completo ottenuto con i soliti mezzi grafici per il presente sistema a 30° è quello della figura che qui riportiamo la quale riproduce soltanto quella parte del triangolo che contiene tutto il diagramma.

[1] Nella Nota II citata (su questo sistema a 30°) sono incorsi errori di stampa nelle cifre riportate ma non, comunque, nel risultato del calcolo per la composizione del corpo di fondo: inutile indicare le correzioni dopo stabilito in questa Nota che detto corpo di fondo è l' 1-2-4.

In essa la curva ab è quella dell'acido borico B, la curva bc è quella del composto 1-5-8 pentaborato ottoidrato P, la cd è quella dell'1-2-4 diborato tetraidrato D. Le tratteggiate x e x_1 sono divergenti: il punto d è quello di massima concentrazione in ammoniaca che si possa ottenere

comunque si saturi la soluzione in presenza di qualunque quantità di acido borico.

Per quanto riguarda la solubilità del composto 1-5-8 in acqua pura valgono i dati esposti nella Nota II citata. Quanto alla solubilità del diborato essa non si potè dare, come si avvertì, mancando allora il tratto di curva ove si trova il punto rispondente alla soluzione del diborato in acqua pura. Dal diagramma che ora pubblichiamo risulta che essa è data da 12.11 parti di sale anidro in 100 parti di acqua.

Avevamo già iniziato lo studio di questo sistema a 90°, che servirebbe di completamento generale e darebbe adito anche ad istituire confronti fra i borati di ammonio artificiali e quelli naturali; doveri maggiori hanno interrotto le esperienze iniziate.

Chimica fisiologica. — *Sul metabolismo del glicosio in organi sopraviventi. I: Azione del tessuto intestinale sul glicosio in esso circolante.* Nota del dott. prof. U. LOMBROSO, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Lo studio del ricambio del glicosio nell'organismo *in vivo* ha portato alla scoperta di un certo numero di fenomeni assai importanti, dei quali però noi non conosciamo l'intimo meccanismo e le immediate determinanti, perchè non sappiamo quale sia stata la parte assunta dai varî organi nel complessivo fenomeno. Non è stato ancora eseguito uno studio sistematico sul metabolismo del glicosio nei diversi organi, in modo da poterne mettere in rilievo le particolari modalità. Solo il tessuto muscolare è stato, specialmente in questi ultimi anni, oggetto di numerose ricerche sperimentali: in esse sono stati posti in luce fatti nuovi, quali dal semplice studio del ricambio del glicosio nel complessivo organismo, non sarebbe stato possibile sospettare. Per esempio, è stato dimostrato che il tessuto muscolare di carnivoro (cuore) non consuma lavorando glicosio, ma soltanto glicogeno [1]. E forse anche il tessuto muscolare degli erbivori consuma, durante il loro lavoro, prevalentemente od esclusivamente glicogeno [2].

Non tutti gli autori si accordano su queste affermazioni, ma della vasta letteratura che riguarda l'azione del tessuto muscolare nel ricambio degli idrati di carbonio, ci intratterremo altra volta, nell'esporre le nostre ricerche su tale argomento.

L'esempio riferito ci basti per dimostrare la necessità di estendere ad altri organi ricerche corrispondenti, non fosse altro che per ricercare se, come per il muscolo, anche per altri organi sia difficile od impossibile l'attaccare direttamente il glicosio.

Uno degli organi sul quale ci appariva assai interessante di svolgere tali ricerche è l'intestino; e ciò sia per indagare le fonti di energia a cui ricorre per le molteplici sue funzioni generali (secrezione - motilità - assorbimento alimentare), sia perchè l'intestino esplica sul ricambio degli idrati di carbonio una importantissima azione (per la loro idrolisi estrema, per l'assorbimento elettivo in particolare forma, e forse anche per influenzare i fenomeni di sintesi del glicosio ecc. ecc.).

Le ricerche anteriori sull'argomento sono scarsissime ed incomplete.

[1] Camis, Zeit. f. Al. Phys.

[2] Albertoni, Giornale Acc. di Bologna, ser. 7ª, tomo II, 1915.

Neukirch e Rona [1] facendo circolare nell'intestino di conigli e di gatti liquido di Tyrode contenente glicosio, mannosio, levulosio, galattosio, notarono costantemente, eccezione fatta per il levulosio, una diminuzione dello zucchero nel liquido dopo la circolazione.

Questi risultati furono confermati da Verzar e Krauss con esperienze eseguite su intestino di cane perfuso con Tyrode e glicosio.

Levene e Meyer [2] in una serie di ricerche sull'azione dei varî succhi di tessuti, raccolti con la pressa, o di varie poltiglie, non rilevarono alcuna azione da parte di estratto o poltiglia intestinale sul glicosio aggiunto.

Secondo Levene e Meyer [3] e molti altri autori, i leucociti posseggono una spiccata azione glicolitica, e sono anzi i fattori più importanti della glicolisi del sangue.

Quest'affermazione è particolarmente interessante, perchè, essendo l'intestino ricchissimo di corpuscoli bianchi, ne viene il dubbio che la sua eventuale azione glicolitica, sia dovuta al suo contenuto in leucociti, più che ad una particolare azione specifica del tessuto intestinale.

Come si vede, le nozioni sperimentali acquisite sono scarse e suscettibili di obbiezioni che non permettono di trarre sicure conclusioni.

Manca, nelle ricerche eseguite con la perfusione dell'intestino, un dato fondamentale, necessario per una esatta interpretazione, la determinazione cioè del contenuto in idrati di carbonio del tessuto prima e dopo la circolazione. Ora noi abbiamo precisamente osservato, in precedenti ricerche [4] riguardanti il metabolismo degli aminoacidi nell'organismo, che questi vengono sottratti, durante la circolazione con Ringer, dal liquido circolante, ma si possono ritrovare in gran parte o totalmente depositati come tali nel tessuto. Potevasi quindi attribuire ad un fenomeno analogo la scomparsa del glicosio nelle sopracitate esperienze.

Inoltre, dagli altri autori non erasi indagato se la diminuzione del potere riducente non potevasi attribuire ad una sintesi del glicosio, più che ad una sua distruzione, fenomeno questo che, nelle nostre ricerche sugli aminoacidi, erasi rilevato di notevole importanza.

Resta infine da notare che i precedenti esperimentatori avevano limitate le loro ricerche alle perfusioni con liquido di Tyrode, senza indagare se gli stessi risultati potevansi ottenere nelle circolazioni con sangue: mentre anche sotto questo punto di vista, nelle esperienze sugli aminoacidi eransi rilevate notevoli differenze a seconda della disposizione sperimentale.

(1) Pflüger's arch. CXLIV, 11/12, 555, 1912.
(2) Journ. of Biol. Chem., XI, pag. 253, an. 1912.
(3) Journ. of Biol. Chem., XI, pag. 361, an. 1912.
(4) Rend. Accad. Lincei, vol. XXIV, serie 5ª, 2° sem., fasc. 9°, an. 1915.

Per colmare queste lacune abbiamo eseguito un certo numero di esperienze facendo circolare, in un segmento di intestino tenue di cane, soluzione di Tyrode o sangue defibrinato dello stesso animale, a cui veniva aggiunto glicosio al 0.5-1 %. Prima della circolazione si prelevava un campione di intestino immediatamente superiore, ed un altro immediatamente inferiore al segmento in esperimento, e se ne indagava il contenuto in idrati di carbonio, idrolizzando per due ore con HCl 1 % (Pflüger) e quindi determinando il potere riducente col metodo di Lehmann Embden, previa precipitazione col ferro colloidale.

Al termine della circolazione si ripeteva la determinazione su un campione del segmento circolato. I dosaggi nel liquido e nel sangue venivano eseguiti pure con lo stesso metodo: in qualche caso per determinare quanta parte nella diminuzione del potere riducente si doveva ad una distruzione di glicosio, e quanta ad una sua eventuale sintesi, ri ripetevano le indagini, previa idrolisi con HCl.

Gli animali da esperimento erano tenuti per lo più digiuni per un paio di giorni. Erano rapidamente dissanguati, quindi si lavava l'alveo circolatorio con soluzione fisiologica. Asportato l'intestino, si liberava con pressione digitale dello scarso contenuto, se ne lavava il lume con soluzione fisiologica, si introduceva la cannula nell'arteria mesenterica media, e si poneva il segmento nell'apparato di circolazione di Lind.

I.

Cane maschio, kg. 5,3. — Peso dell'intestino posto a circolare gr. 150; dopo circolazione gr. 150. Succo raccolto nel lume intestinale durante la circolazione cm.³ 30. Pressione Hg. mm. = 60-80; velocità media di circolazione cm.³ 35 per minuto. Durata della circolazione 1 ora.

Sangue cm.³ 450 + glicosio gr. 2.

Sangue	prima	della circolazione:	per	10 cm.³	=	mmgr.	37	glicosio
»	dopo	la	»	»	»	=	23	»
Organo	prima	della	»	»	10 gr.	=	32	»
»	dopo	la	»	»	»	=	17	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue circolato (a cui si è aggiunto il succo raccolto durante la circolazione nel lume intestinale) mmgr. 630 glicosio. Se ne ritrovano in meno nell'organo dopo circolazione mmgr. 225. Deficit assoluto = mmgr. 855.

II.

Cane femmina, kg. 8. — Peso dell'organo posto a circolare gr. 150; dopo circolazione gr. 175; succo raccolto nel lume intestinale durante la circolazione cm.³ 20. Sangue cm.³ 500 + glucosio gr. 2,5. Pressione media Hg. mm. 55-75; velocità media di circolazione cm.³ 40 per minuto. Durata della circolazione 1 ora.

Sangue	prima	della circolazione:	per	10 cm.³	=	mmgr.	49,3	glicosio
»	dopo	la	»	»	»	=	35,7	»
Organo	prima	della	»	»	10 gr.	=	49,7	»
»	dopo	la	»	»	»	=	42,2	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue circolato (a cui si è aggiunto il succo raccolto durante la circolazione nel lume intestinale) mmgr. 698 glicosio; se ne ritrovano in meno nell'organo dopo circolazione mmgr. 7. Deficit assoluto mmgr. 705.

III.

Cane maschio, kg. 8,5. — Peso dell'organo posto a circolare gr. 170; dopo circolazione gr. 230. Succo raccolto nel lume intestinale cm.^{3} 20. Sangue cm.^{3} 400 + glicosio gr. 1,6. Pressione Hg. mm. 60-90. Velocità media cm.^{3} 20 per minuto. Durata della circolazione 2 ore.

Sangue prima della circolazione:	per 10 cm.^{3}	=	mmgr.	46,5	glicosio
» dopo la »	» »	=	»	28,9	»
Organo prima della »	» 10 gr.	=	»	50,9	»
» dopo la »	» »	=	»	35,7	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue dopo la circolazione (aggiuntovi il succo raccolto nel lume intestinale) mmgr. 798,7 glicosio; se ne ritrovano in meno nell'organo mmgr. 44,3. Deficit assoluto mmgr. 843 glicosio.

IV.

Cane maschio, kg. 8,1. — Peso dell'intestino posto a circolare gr. 250; dopo circolazione gr. 300. Succo raccolto nel lume intestinale cm.^{3} 200. Soluzione di Tyrode cm.^{3} 500 + glicosio gr. 2,5. Pressione Hg. mm. 40-60. Velocità media per minuto cm.^{3} 55. Durata della circolazione 1 ora.

Ringer prima della circolazione	. . . .	per 10 cm.^{3}	=	mmgr.	45,9	glicosio
» dopo la »	. . . .	» »	=	»	37,3	»
» » »	idrolizzato con HCl	» »	=	»	37,9	»
Succo intest. » »	. . . .	» »	=	»	27,2	»
» » » »	idrolizzato con HCl	» »	=	»	27,2	»
Organo prima della »	. . . .	per 10 gr.	=	»	36,2	»
» dopo la »	. . . .	» »	=	»	30,6	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel liquido di Ringer circolato mmgr. 1347.5 glicosio; se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. 13; nel succo intestinale se ne ritrovano mmgr. 544. Deficit assoluto mmgr. 790 glicosio.

V.

Cane femmina, kg. 8. — Peso dell'intestino posto a circolare gr. 150; dopo circolazione gr. 205. Succo raccolto cm.^{3} 90. Liquido di Tyrode cm.^{3} 500 + glicosio gr. 5. Pressione Hg. mm. 35-55. Velocità media di circolazione cm.^{3} 55 per minuto. Durata della circolazione 1 ora.

Tyrode prima della circolazione:	per 10 cm.^{3}	=	mmgr.	92,4	glicosio
» dopo la »	» »	=	»	71,4	»
Organo prima della »	» 10 gr.	=	»	58,7	»
» dopo la »	» »	=	»	69,4	»

Complessivamente si ritrovano in meno nella soluzione circolata (a cui si è aggiunto il succo raccolto nel lume intestinale dopo la circolazione) mmgr. 1443 glicosio; se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. 542. Deficit assoluto = 901 mmgr. glicosio.

VI.

Cane maschio, kg. 7,3. — Peso dell'intestino posto a circolare gr. 200; dopo circolazione gr. 235. Succo raccolto cm.^{3} 25. Liquido di Tyrode cm.^{3} 550 + glicosio gr. 2,5. Pressione Hg. mm. 35-55. Velocità media di circolazione cm.^{3} 60 per minuto. Durata della circolazione 1 ora.

Tyrode	prima della circolazione	. . . .	per 10 cm.^{3}	=	mmgr.	44,2	glicosio
»	dopo la »	. . . .	» »	=	»	32,3	»
Succo intest.	» »	. . . .	» »	=	»	25,6	»
» »	» »	idrolizzato con HCl	» »	=	»	31,1	»
Organo	prima della »	. . . .	per 10 gr.	=	»	16,0	»
»	dopo la »	. . . .	» »	=	»	13,3	»

Complessivamente si trovano in meno nella soluzione circolata (a cui si è aggiunto il succo raccolto nel lume intestinale durante la circolazione) mmgr. 540,5 glicosio: se ne ritrovano in meno nell'organo mmgr. 7,4. Deficit assoluto mmgr. 547,9 glicosio.

VII.

Cane maschio, kg. 18. — Peso dell'intestino posto a circolare gr. 170; dopo circolazione gr. 240. Succo raccolto dopo la circolazione nel lume intestinale cm.^{3} 170. Circolazione con liquido di Tyrode cm.^{3} 500 + glicosio gr. 0,5. Pressione media Hg. mm. 40-60. Velocità media per minuto cm.^{3} 45. Durata della circolazione 1 ora.

Liquido di Ringer	prima della circolaz.	. . . .	per 10 cm.^{3}	=	mmgr.	101,8	glicosio
» »	dopo la »	. . . .	» »	=	»	88,2	»
Intestino	prima della »	. . . .	» 10 gr.	=	»	27,8	»
»	dopo la »	. . . .	» »	=	»	35,7	»
Succo intestinale	» »	idrolizzato con HCl	per 10 cm.^{3}	=	»	88,1	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel liquido dopo circolazione (al quale si è aggiunto il contenuto dell'intestino) mmgr. 1298 glicosio: se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. 384,2. Deficit assoluto mmgr. 913,8 glicosio.

VIII.

Cane maschio, kg. 15. — Peso dell'intestino posto a circolare gr. 160, dopo circolazione gr. 180. Succo raccolto dopo la circolazione nel lume intestinale cm.^{3} 140. Circolazione con liquido di Tyrode cm.^{3} 500 + glicosio gr. 0,5. Pressione 40-60 Hg. mm. Velocità 40 cm.^{3} per minuto. Durata della circolazione ore 1 $^1/_2$.

Liquido di Tyrode	prima della circolazione:	per 10 cm^3	= 95,6	mmgr.	glicosio
» »	dopo la »	» »	= 81,4	»	»
Intestino	prima della »	» »	= 70,4	»	»
»	dopo la »	» »	= 75,9	«	»
Succo intestinale	» »	» »	= 51,2	»	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel liquido dopo circolazione mmgr. 1872,8 glicosio; se ne ritrovano in più nell'organo 239,8; se ne ritrovano nel succo 716,8 mmgr. Deficit assoluto mmgr. 916,2 glicosio.

Dalle ricerche riferite, risulta che:

1°) facendo circolare in un segmento intestinale di cane soluzione di Tyrode contenente glicosio, si ha una diminuzione notevole del glicosio, che raggiunge in qualche caso fino il 50 %.

2°) in queste circolazioni con Tyrode il contenuto in idrati di carbonio dell'intestino aumenta generalmente, però non in misura tale da giustificare la scomparsa corrispondente del glicosio dal liquido di circolazione; al più ne giustifica il 30-35 %;

3°) facendo circolare in un segmento intestinale di cane, sangue defibrinato contenente glicosio, si ha una diminuzione del potere riducente del sangue, anche superiore a quella osservata nelle circolazioni con Tyrode;

4°) in queste circolazioni con sangue il contenuto in idrati di C dell'intestino diminuisce notevolmente, si ha cioè un consumo rilevante del glicogeno preesistente.

Questa differenza nelle circolazioni con sangue, rispetto a quelle con liquido di Tyrode, è analoga a quella da noi riscontrata nelle citate esperienze sul metabolismo degli aminoacidi in organi sopravviventi: anche allora quando si circolava con sangue, si aveva nella maggior parte degli organi un consumo reale di aminoacidi considerevolmente maggiore che nelle circolazioni con Ringer, mentre in queste ultime avveniva in assai più larga misura una deposizione nell'organo degli aminoacidi del tessuto.

Il fenomeno è tanto più notevole in quanto la quantità di liquido che attraversa nell'unità di tempo l'intestino, è assai minore quando si esperimenta con sangue piuttosto che con soluzione fisiologica. Esso dimostra che quanto più ci avviciniamo nella circolazione artificiale alle condizioni nelle quali si trova l'organo *in vivo*, tanto minore è la quantità di glicosio che si accumula nell'intestino e tanto maggiore invece la tendenza dell'organo a distruggere il glicosio in esso circolante.

Zoologia. — *Sulla Crithidia inflata n. sp. parassita nel tubo digerente del Hygrotrechus najas. Struttura e ciclo di sviluppo.* Nota di ANNA VIVANTI, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.

Matematica. — *Deduzione geometrica dei metodi di approssimazione delle radici reali di una equazione.* Nota di Gustavo Sannia, presentata dal Socio E. D'Ovidio.

1. Ad alcuni metodi di approssimazione delle radici reali di una equazione reale

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

si suol pervenire anche con considerazioni geometriche più o meno semplici; queste però variano passando da un metodo all'altro.

Scopo di questa Nota è di porre tutti i metodi di approssimazione sotto una nuova ed unica veste geometrica, che è molto semplice ed ha inoltre il vantaggio di condurre in modo affatto spontaneo ed intuitivo ad una nota classificazione dei metodi stessi.

2. Per fissare le idee supporremo di voler cercare metodi atti a fornire successioni di numeri crescenti tendenti ad una radice reale r di (1), conoscendo un numero a_0 minore di r, tale che nell'intervallo (a_0, r) la funzione $f(x)$ sia continua e non si annulli che nell'estremo superiore r.

Geometricamente detto: la curva C di equazione cartesiana

$$(2) \qquad y = f(x)$$

incontri l'asse delle x sul punto R di ascissa r; vogliamo cercare successioni di punti di questo asse

$$(3) \qquad A_0, A_1, A_2, \dots$$

che si avvicinino ad R dalla sinistra (cfr. la figura) e tendano ad R (essendo A_0 il punto di ascissa a_0).

Se l'arco P_0R di C è tutto contenuto nell'angolo A_0RQ_0 di 45°; ossia, *se ciascuna ordinata dell'arco* P_0R *è positiva e minore della distanza del suo piede dal punto* R, allora, partendo dal punto A_0, si ottiene una delle suddette successioni (3) mediante la costruzione chiaramente indicata nella figura, ove: ciascun punto A_n $(n > 0)$ dista dal precedente A_{n-1} di $f(a_{n-1})$, cioè dell'ordinata della curva C corrispondente al punto A_{n-1}. Ciò è intuitivo.

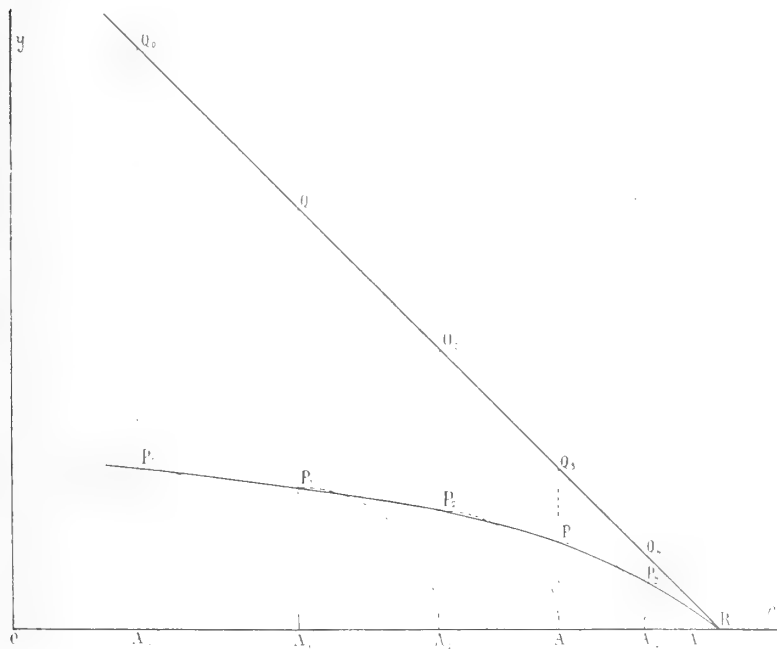
Del resto lo si vede subito osservando che le ascisse $a_0, a_1, a_2, \dots$ di questi punti sono crescenti e non superiori ad r, e perciò tendono ad un limite non maggiore di r; inoltre sono legate dalla relazione

$$(4) \qquad a_n = a_{n-1} + f(a_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

che dà, per la supposta continuità di $f(x)$,

$$f(\lim a_{n-1}) = \lim a_n - \lim a_{n-1} = 0 \,,$$

onde $\lim a_{n-1} = r$ per $n = +\infty$.

Per verificare se la condizione imposta all'arco P_0R è oppur no soddisfatta, occorrerebbe conoscere proprio il punto R che si vuole approssimare. La trasformeremo perciò in un'altra più restrittiva, ma verificabile in pratica.

Incominciamo con l'osservare che la suddetta condizione può anche esprimersi dicendo che: tutte le corde P_0R, P_1R, ... debbono formare col verso positivo dell'asse x angoli compresi fra 0° e —45°.

Ora, *se ammettiamo che esista la tangente in ogni punto dell'arco* P_0R, cioè che *la funzione* $f(x)$ *ammetta la derivata prima* $f'(x)$ *in ogni punto di* (a_0, r), ognuna di dette corde sarà parallela ad una almeno delle dette tangenti (come è ben noto). Ne segue che, affinchè la suddetta condizione sia soddisfatta, *basta* ammettere che *tutte codeste tangenti formino con l'asse delle x un angolo compreso fra* 0° *e* —45° (0° *escluso*), cioè che sia

$$(5) \qquad -1 \leq f'(x) < 0 \quad \text{in} \quad (a_0, r) \,.$$

Concludendo: *se la* $f(x)$ *è positiva per* $a_0 \leq x < r$, *e se la* (5) *è soddisfatta, la* (4) *fornisce un metodo di approssimazione della radice* r *dell'equazione* (1).

3. Nulla muta nel nostro ragionamento e nella conclusione se, in luogo di applicare la costruzione suindicata giovandoci della curva C, ci serviamo di qualsiasi altra curva C′ che soddisfi alle condizioni imposte a C, cioè che sia dotata di tangente, che giaccia nell'angolo A_0RQ_0 e incontri il segmento A_0R nel solo estremo R.

Le ordinate dei punti di C′ si possono pensare come dedotte da quelle $f(x)$ dei punti corrispondenti di C accorciandole o allungandole in modo opportuno, ossia moltiplicandole per un coefficiente $g(x)$, funzione di x, *che in* (a_0, r) *abbia il segno di* $f(x)$, *ammetta derivata* $g'(x)$ *e non si annulli*: sicchè l'equazione di C′ è

$$y = f(x)\, g(x)\,. \tag{6}$$

Ne concludiamo subito che: *se* $g(x)$ *è tale inoltre che*

$$-1 \leq \frac{d}{dx}\left[f(x)\, g(x)\right] < 0 \quad per \quad a_0 \leq x < r\,, \tag{7}$$

la formola ricorrente

$$a_n = a_{n-1} + f(a_{n-1})\, g(a_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

fornisce un metodo di approssimazione della radice r dell'equazione (1).

Così p. es., assumendo $g(x) = -1 : f'(x)$, si ritrova il classico metodo di Newton. Geometricamente: applicare il metodo di Newton equivale ad applicare la costruzione indicata nel n. 2 alla curva di equazione

$$y = -\frac{f(x)}{f'(x)}\,,$$

ossia *alla curua* C′ *le cui ordinate sono le sottonormali cambiate di segno della curva data* (2).

Otteniamo così una interpretazione geometrica diversa da quella ben nota.

4. Ad ogni curva C′, ossia ad ogni funzione $g(x)$, corrisponde un metodo di approssimazione per la radice r.

Anzi, se prescindiamo dalle condizioni imposte ad $f(x)$ e a $g(x)$ per conseguire la praticità dei risultati, si può dire che, variando C′, si ottengono *tutti* i metodi possibili. Perchè, data una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ di numeri crescenti tendente ad r, e quindi una successione di punti come la (3), noi possiamo immaginarla come dedotta applicando la costruzione data nel n. 2 ad una curva C′ che passi pel punto R e pei punti

$$P_n(a_n\,, a_{n+1} - a_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

e giaccia nell'angolo A_0RQ_0.

Fra tutti codesti infiniti metodi quello, per dir così, *ideale* si otterrebbe assumendo come curva C′ la stessa retta RQ_0: perchè, applicando ad essa

la costruzione indicata nel n. 2, *si cadrebbe addirittura nel punto* R con la prima operazione, cioè A_1 cadrebbe in R. Ma noi non sappiamo costruire questa retta, perchè non conosciamo il punto R.

È però intuitivo che un metodo è tanto più conveniente quanto più esso si avvicina al metodo ideale, ossia quanto meno la curva C′ differisce dalla retta RQ_0 in un intorno sinistro di R; e quindi che un metodo che corrisponde ad una curva C′ *tangente* ad RQ_0 in R, è più conveniente che ogni altro metodo. È intuitivo inoltre che esso sarà tanto più conveniente quanto più intimo sarà il contatto di C′ e RQ_0, ossia quanto maggiore sarà l'*ordine* di questo contatto

Se quest'ordine è k, diremo che $k+1$ è il *grado di approssimazione* del metodo stesso per la radice r. Per ciò è necessario e sufficiente che, per $x=r$, risulti

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x)\,g(x)\Big]=-1\quad,\quad \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\Big[f(x)\,g(x)\Big]\neq 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Big[f(x)\,g(x)\Big]=\cdots=\frac{d^k}{dx^k}\Big[f(x)\,g(x)\Big]=0\,.$$

Giungiamo così, con considerazioni geometriche intuitive, ad un concetto già noto (¹).

5. Con qualunque metodo, gli errori

$$r-a_0=A_0R\;,\;r-a_1=A_1R\;,\;\ldots\;,\;r-a_nR\;,\;\ldots\,,$$

che si commettono fermandosi ai successivi valori approssimati in difetto $a_0, a_1, \ldots$ di r, tendono a zero.

Più precisamente: *in un metodo che per la radice r ha il grado di approssimazione* $k+1$, *tendono a zero i rapporti di ciascun errore alla potenza k-esima del precedente.*

Infatti, poichè per un tal metodo la curva C′ ha un contatto di ordine k con la tangente nel punto R, il segmento P_nQ_n è infinitesimo di ordine k rispetto a P_nR o a O_nR, o infine a A_nR (che sono dello stesso ordine), sicchè

$$\lim_{n=\infty}\frac{P_nQ_n}{A_nR^k}=0\,;$$

ma

$$P_nQ_n=A_nQ_n-A_nP_n=A_nR-A_nA_{n+1}=A_{n+1}R\,,$$

quindi

$$\lim_{n=\infty}\frac{A_{n+1}R}{A_nR^k}=0\,.$$

(¹) Cfr. E. Netto, *Vorlesungen über Algebra*, I B., pag. 300 (Leipzig 1890); oppure Schroeder, *Ueber unendliche viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen* (Math. Annalen, 2 B., 1870, pag. 317).

PERSONALE ACCADEMICO

Nell'adunanza generale dell'11 novembre 1916, l'Accademia procedette alla elezione del Presidente e del Vicepresidente. Lo spoglio dei voti dette il risultato seguente:

Per l'elezione del Presidente: Votanti 67. — D'Ovidio F. ebbe voti 29; Blaserna 26; Luzzatti 1; Monaci 1; Schede bianche 10.

In seguito alla precedente votazione si procedette al ballottaggio fra D'Ovidio F. e Blaserna, col risultato che segue:

Votanti 63: D'Ovidio F. ebbe voti 31; Blaserna 25. — Schede bianche 7. Eletto a Presidente Francesco D'Ovidio.

Per l'elezione del Vicepresidente i votanti furono 47. Ròiti ebbe voti 27; Volterra 11; Paternò 4; Blaserna 1; Nasini 1; Veronese 1. — Schede bianche 2. Eletto a Vicepresidente Antonio Ròiti.

Le due precedenti nomine saranno sottoposte, a norma dello Statuto Accademico, all'approvazione Sovrana.

Finalmente per l'elezione dell'Amministratore aggiunto i votanti furono 33. Fu eletto il Socio Lanciani all'unanimità,

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 10°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 13.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 novembre 1916.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile*

Pubblicazione bimensile. N. 11.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 dicembre 1916.

Volume XXV.° — Fascicolo 11°

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli **Atti dell'Accademia** o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3 Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 dicembre 1916.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica fisica. — *Sulle leggi di Gibb, Curie e Hauy relative ai cristalli.* Nota del Socio Carlo Viola.

La legge delle fasi di Gibb dà le condizioni di equilibrio di contatto fra il numero di componenti e il numero di fasi, deducendo il numero di variabili indipendenti in un sistema eterogeneo reversibile; in questa maniera le proporzioni dei singoli componenti in ogni fase rimangono inalterate, mentre variano le quantità di massa delle fasi stesse in rapporto con l'energia calorifica, che eventualmente può entrare nel sistema o uscire da esso.

Le leggi di Curie e di Hauy riguardano unicamente la forma, che deve assumere la fase cristallina in contatto con fasi amorfe, supposto l'equilibrio suddetto e supposte condizioni perfettamente reversibili. Queste leggi si unificano e si completano a vicenda.

Mettiamoci nel caso più semplice che vi siano due fasi isotropa e anisotropa, soluzione e cristallo ovvero fusione e cristallo in contatto ed in equilibrio stabile nel senso di Gibb; pressione p e temperatura T rimangono costanti. Per avere una trasformazione del sistema, è necessario farne variare l'energia calorifica, sottraendone o aggiungendone. Aumenti il cristallo e diminuisca la fase amorfa; una certa quantità di calore Q deve essere sottratta dalla fase amorfa alla temperatura T, ed una quantità q deve essere trasformata in tensione superficiale che chiameremo con E, e che è proporzionale all'aumento di superficie s, sicchè

$$E = \alpha s \quad \text{ed} \quad E = Aq\,,$$

essendo α la costante di proporzionalità tra incremento di tensione superficiale ed aumento di superficie, o *costante di capillarità*, ed A il coefficiente meccanico del calore. Contemporaneamente una certa quantità di calore, Q', passerà all'ambiente esterno avente la temperatura T', minore di T, sicchè

$$q = Q - Q' \quad e \quad \Delta S = \frac{Q}{T} - \frac{Q'}{T'},$$

variazione dell'entropia. Per la reversibilità del sistema, S rimanendo costante, si ottiene

$$Q : Q' = T : T'.$$

In conclusione, mentre una quantità Q' di calore cade dalla temperatura T alla temperatura T', una parte q, è trasformata in tensione superficiale E, ed è pure sottratta alla fase amorfa. Il massimo effetto si deve ottenere quando $q = Q \frac{T - T'}{T}$ è minimo, vale a dire quando è minima la tensione superficiale E, supposto dati T e T', che è appunto condizione di equilibrio.

* * *

Immaginiamo che il contorno del cristallo sia determinato da n facce, quali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n$, le cui grandezze d'area siano rispettivamente $s_1, s_2, s_3, \ldots . s_i, \ldots, s_n$, e le cui posizioni e luoghi siano individuate dalle rispettive distanze $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_i, \ldots, p_n$ in senso perpendicolare, e misurate a partire da un'origine O preso nell'interno del cristallo, che per ora rimane qualunque, ed in seguito sarà precisato.

Per quanto riguarda le costanti capillari delle dette facce, si suppone che esse non siano in generale le stesse, dato che in generale le quantità fisiche in un cristallo variano con la direzione, a cui esse ri riferiscono. Le costanti capillari di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ sieno rispettivamente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Ciò posto, l'energia superficiale del cristallo è

$$E = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r s_r, \tag{1}$$

e il suo volume

$$V = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{r=n} p_r s_r. \tag{2}$$

Nell'istante d'equilibrio, V non può variare pur variando le aree della superficie del cristallo, che indicheremo in generale con δs_r; nè può variare

la tensione superficiale perchè è minima. In questo modo le condizioni di equilibrio sono così poste:

$$(3) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r \, \delta s_r = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{r=1}^{r=n} p_r \, \delta s_r = 0 \ (^1);$$

ovvero chiamando con M una costante da determinarsi

$$(4) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} (p_r - \mathrm{M}\alpha_r) \, \delta s_r = 0 .$$

Osserviamo che le variazioni δs_r possono ritenersi indipendenti fino a quantità trascurabili di 2° ordine, sicchè le (4) si scindono nelle condizioni seguenti:

$$(5) \qquad p_r = \mathrm{M}\alpha_r \qquad r = 1, 2, 3, \dots, n,$$

ovvero

$$(6) \qquad p_1 : p_2 : p_3 \dots : p_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \dots : \alpha_n .$$

Possiamo ora introdurre le densità superficiali delle facce, ossia quantità di massa (molecoli, atomi o gruppi di essi) accumulata nell'unità di area, notando che le densità devono essere proporzionali inversamente alle costanti capillari. Invero essendo la costante capillare l'energia necessaria per accrescere la superficie dell'unità di area, essa sarà maggiore là dove la massa dovrà maggiormente diradarsi e viceversa. Chiamando con $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ le rispettive densità delle facce $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$, in luogo delle (6), avremo le relazioni seguenti:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \dots : p_n = \frac{1}{d_1} : \frac{1}{d_2} : \frac{1}{d_3} : \dots : \frac{1}{d_n},$$

ossia: *Gli accrescimenti totali perpendicolari alle facçe di un cristallo sono proporzionali direttamente alle loro costanti capillari; ovvero inversamente alle loro densità.*

(1) Il volume elementare $v = \frac{1}{3} p_r s_r$ varia di

$$\delta v = (s_r + \delta s_r) \, \delta p_r = s_r \, \delta p_r$$

per un aumento di δp_r e trascurando quantità piccole di 2° ordine. D'altra parte l'aumento totale del volume è

$$\delta v = \frac{1}{3} (p_r \, \delta s_r + s_r \, \delta p_r) = s_r \, \delta p_r ,$$

ossia

$$p_r \, \delta s_r = 2 s_r \, \delta p_r = 2 \delta v ,$$

che è appunto l'espressione sopra impiegata.

Questa è la legge di Curie [1], che ha dato luogo a una lunga serie di ricerche, ove le esperienze di G. Wulff [2] si sono maggiormente diffuse.

Da qui segue che facce di eguale costante capillare o di eguale densità si trovano alla stessa distanza del centro O, e che questo rimane nel mezzo fra due facce parallele aventi la stessa densità. Con questo carattere è fissato la posizione del centro O, da cui si computano le distanze totali di accrescimento, e le relazioni (6) e (7) acquistano un significato.

Se si tien conto che quanto più crescono le distanze perpendicolari alle facce, e tanto più le facce diminuiscono di area, e viceversa, potremo dare alla legge di Curie la seguente forma più ovvia ma meno precisa:

Le aree delle facce di un cristallo in equilibrio stabile sono inversamente proporzionali alle loro costanti capillari o direttamente alle loro densità.

Di guisa che facce aventi la costante capillare piccola o densità grande saranno sviluppatissime; facce a costante capillare molto grande o densità piccola saranno piccolissime, rudimentali o affatto escluse.

Finora si è esaminato in quale modo subiscono accrescimento le facce nel senso perpendicolare, affinchè il cristallo conservi in ogni istante l'equilibrio di contatto con la fase amorfa, ed il processo sia sempre reversibile secondo la legge di Gibb, ed il risultato è stato nel senso che le facce tanto più si sviluppano, quanto minore è la loro costante capillare, ossia quanto è maggiore la loro densità. Naturalmente da questo peculiare sviluppo avviene una selezione nella figura del cristallo nel senso che quelle maggiormente si amplificano e più frequentemente appariscono, le cui facce costanti capillari sono piccole e le densità grandi, di guisa che le facce saranno poco a poco eliminate, le cui costanti capillari sono grandi e le densità piccole. Certe facce sono dunque affatto escluse dal cristallo.

Una siffatta figura del cristallo che soddisfa a queste condizioni, si chiama normale.

Si intende che la figura normale non debba essere considerata da un punto di vista assoluto. Essa naturalmente dipende, almeno entro certi limiti, dalla soluzione con la quale il cristallo è in contatto, e da sostanze eterogenee, che influiscono sulle grandezze delle costanti capillari senza prendere parte alla sostanza cristallizzata.

[1] P. Curie, *Sur la formation des cristaux et sur les constantes capillaires de leurs diverses faces.* Bull. de la Société minéralogique de Fr. 1885, *8*, 145; H. Hilton, *Mathematical Crystallography* etc. Oxford 1903, 105; id., *Ueber die Capillarsconstanten der Krystallflächen.* Centralblatt für Miner. etc, 1901, 753.

[2] G. Wulff, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachsthums und der Auflösung der Krystallflächen.* Zeitsch. f. Krystall. *34*, 449-530.

***

La legge di Curie definisce completamente una figura normale dei cristalli; ma occorrono a ciò le costanti capillari o le densità delle facce. Introducendovi invece un nuovo elemento, cioè gli indici individuanti le facce, si riesce a definire la figura normale dei cristalli in modo più preciso senza ricorrere alle costanti capillari, che non sono facili a determinarsi.

A questo aggetto introduciamo nelle relazioni (7) di Curie le aree specifiche in luogo delle densità, intendendo per area specifica di una faccia l'area avente l'unità di massa superficiale. Chiamando con $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ le dette aree specifiche delle rispettive facce $\sigma_2, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, scriveremo le relazioni di Curie (7) nel modo seguente:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots : p_n = a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n . \tag{8}$$

Per raggiungere l'intento sopra accennato, fra le n facce considerate o in modo più generale fra tutte le facce osservate nel cristallo in esame, quattro se ne estraggono $\sigma_0, \sigma', \sigma'', \sigma'''$ soddisfacenti a queste due condizioni

1°) che abbiano le costanti capillari più piccole $\alpha_0, \alpha', \alpha'', \alpha'''$;

2°) che tre di esse non giacciano in una zona.

Gli accrescimenti perpendicolari rispettivi siano p_0, p', p'', p''', le loro aree specifiche a_0, a', a'', a'''.

Le proiezioni oblique di a_0 sui piani $\sigma', \sigma'', \sigma'''$ sieno rispettivamente a_0', a_0'', a_0''' in guisa che con una somma geometrica si abbia

$$a_0 = a_0' + a_0'' + a_0''' .$$

Consideriamo una qualsiasi faccia del cristallo, σ_r, la cui area specifica sia a_r, l'accrescimento perpendicolare p_r.

Le proiezioni oblique di a_r sui piani $\sigma', \sigma'', \sigma'''$ siano rispettivamente

$$a_r' \ , \ a_r'' \ , \ a_r'''$$

in guisa che con una somma geometrica si abbia

$$a_r = a_r' + a_r'' + a_r''' . \tag{9}$$

In questa equazione si può introdurre

$$a_r' = h_r a_0' \ , \ a_r'' = k_r a_0'' \ , \ a_r''' = l_r a_0''' ,$$

essendo h_r, k_r, l_r gli indici della faccia σ_r, esprimenti quante volte le proiezioni a_0', a_0'', a_0''' sono contenute nelle rispettive proiezioni a_r', a_r'', a'''.

Con ciò la (9) diviene

$$a_r = h_r a_0' + k_r a_0'' + l_r a_0''' . \tag{10}$$

Analogamente proiettiamo l'accrescimento perpendicolare p_r della faccia σ_r sulle tre direzioni p', p'', p'''; siano p'_r, p''_r, p'''_r le rispettive proiezioni o *componenti principali*. Adottando anche qui la somma geometrica per semplicità di calcolo, avremo

$$p_r = p'_r + p''_r + p'''_r. \tag{11}$$

La legge di Curie, condensata nelle relazioni (8) con la sostituzione delle (10) e delle (11), potrà essere espressa dalla relazione seguente:

$$p'_r + p''_r + p'''_r = C \{ h_r a'_0 + k_r a''_0 + l_r a'''_r \} \tag{12}$$

essendo C una costante. Notando ancora che p'_r, p''_r, p'''_r sono fra loro indipendenti, come h_r, k_r, l_r, potremo scindere le relazioni (12) nelle tre seguenti:

$$\begin{cases} p'_1 : p'_2 : p'_3 : \ldots : p'_k = h_1 : h_2 : h_3 : \ldots : h_n \\ p''_1 : p''_2 : p''_3 : \ldots : p''_n = k_1 : k_2 : k_3 : \ldots : k_n \\ p'''_1 : p'''_2 : p'''_3 : \ldots : p'''_n = l_1 : l_2 : l_3 : \ldots : l_n \end{cases} \tag{13}$$

Si noti che le relazioni (7) e così ancora le (8) e le (10) hanno un significato, ove le densità $d_1, d_2, \ldots, d_n$ hanno un valore, ossia ove le facce secondo le quali avviene l'accrescimento, siano occupate da materia, vale a dire siano sedi di atomi, molecole o gruppi di essi. Stante questa condizione, gli indici delle dette facce sono razionali; infatti le aree a'_r, a''_r, a'''_r devono essere parti razionali di a'_0, a''_0, a'''_0. Possiamo dunque concludere:

Gli indici delle facce in un cristallo normale sono razionali; le componenti principali degli accrescimenti perpendicolari alle facce sono proporzionali direttamente ai loro rispettivi indici.

Questa è la legge di Hauy sulla *razionalità degli indici semplici.*

Da quanto precede emerge che la legge di Hauy è subordinata a queste due condizioni, ed allora solo può avere senso:

1) che le facce del cristallo siano riferite a facce fondamentali e a faccia unitaria aventi le costanti capillari più piccole, ciò che praticamente è messo in rilievo dal loro massimo sviluppo o frequenza;

2) che gli indici delle facce siano interi e primi fra loro, perchè quì essi hanno valore assoluto, ossia sono quoti fra i componenti principali dell'accrescimento di una qualsiasi faccia e quelli rispettivi della faccia unitaria.

Le facce di un cristallo tanto più crescono nel senso perpendicolare, quanto più grandi sono i loro indici e viceversa; di guisa che un cristallo trovantesi in equilibrio di contatto con una fase amorfa secondo la legge di Gibb, assume successivamente una figura tale, che infine le facce a indici piccoli predominano, e quelle a indici grandi si eliminano. La legge di

Hauy dunque precisa meglio la *figura normale* di un cristallo di quello che non lo faccia la legge di Curie, appunto perchè quella richiede uno speciale riferimento del cristallo, cioè in base a facce fondamentali e a faccia unitaria aventi le minime costanti capillari, questa fa astrazione da tali condizioni. Ma in conclusione le leggi di Curie e di Hauy hanno lo stesso contenuto; entrambi discendono dalla minima energia superficiale, che può essere raggiunta quando l'equilibrio è stabile e le fasi in contatto sono reversibili. Se la reversibilità non ha luogo in ogni singolo istante, la legge di Gibb non è applicabile, e la cristallizzazione non può seguire le leggi di Curie e Hauy. Naturalmente la legge delle fasi di Gibb è più generale di quelle di Curie e Hauy, riferentesi essa all'equilibrio stabile fra stati isotropi e anisotropi, senza riguardo della forma, queste all'equilibrio stabile di stati anisotropi con riguardo della forma, necessaria per l'equilibrio stesso. Così le leggi di Gibb, Curie e Hauy si completano a vicenda.

* * *

Ogni *figura* del cristallo, che non soddisfa alle condizioni determinate dalla legge di Curie o dalla legge di Hauy è *anormale*.

La più importante anormalità nella figura dei cristalli, e alla quale molte si possono ricondurre, è questa che facce a indici grandi si sostituiscono con analogo sviluppo a quelle aventi indici semplici, le quali perciò rimangono rudimentali durante l'accrescimento del cristallo o affatto escluse dalla figura di esso. Siffatte facce si chiamano *vicinali* (1), essendo esse vicine a quelle aventi la costante di capillarità piccola. Una tale anormalità nell'accrescimento dei cristalli è importantissima, perchè dall'insieme delle facce vicinali, osservate in un solo cristallo o in più, si deducono assai spesso e facilmente le posizioni delle facce a indici semplici, che sono tanto rare, quanto all'opposto sono frequenti le anormalità nell'accrescimento dei cristalli.

Arcangelo Scacchi nell'indicare questo fenomeno con *poliedria delle facce* (2) ha voluto precisare in quale rapporto di posizione stieno le facce vicinali intorno alle vere facce della figura normale.

Le ragioni di questa anormalità nello sviluppo dei cristalli sono varie, che non è qui il luogo di trattare. Solamente si può aggiungere che appena le fasi di un sistema eterogeneo o il sistema stesso si trova allo stato di equilibrio instabile o metastabile e quindi irreversibile, non è applicabile la legge di Gibb, nè può avere luogo la formazione di cristalli secondo la legge di Curie o di Hauy, e molteplici possono allora essere le figure anor-

(1) M. Websky, Zeitschr. deutsch. geol. Ges., *15*, 677.

(2) A. Scacchi, *Sulla poliedria delle facce nei cristalli*. Nuovo Cimento, XII, Pisa, 1860.

mali dei cristalli. Perciò un brusco raffreddamento, una soprafusione, una soprasaturazione ecc. e conseguente provocazione, devono necessariamente causare l'accrescimento anormale dei cristalli.

Poniamoci nel caso che uno di questi fatti sia avvenuto, e si richieda di ristaurare un cristallo nella sua figura normale. Appena situato il cristallo in contatto con la fase amorfa, con la quale può contrarre l'equilibrio stabile secondo la legge di Gibb, senza spesa nè guadagno di calore, dovrà necessariamente subire una deformazione nel senso di ricondurre la tensione superficiale al suo minimo valore in rapporto col volume del cristallo. E poichè quella non varia per le premesse fatte, ne verrà che il volume del cristallo dovrà aumentare a spese della fase amorfa, e contemporaneamente modificare il contorno pur mantenendo inalterata l'energia superficiale. Anche la formazione di geminati in luogo di cristalli semplici dovrebbe ristabilire l'equilibrio; ma di ciò in un'altra Nota.

Consideriamo da ultimo i cristalli liquidi, di cui si dovrebbe esaminare in quale modo possono conservare l'equilibrio stabile in contatto con fasi amorfe in istato reversibile, come vuole la legge di Gibb. Io non mi lusingo di avere risoluto completamente il problema, poichè esso dovrebbe essere trattato da un punto di vista generale. Non mi sembra però che le considerazioni che seguono siano prive di interesse. Le difficoltà del problema risiedono sovratutto in questo: supporre diverse le costanti capillari per le diverse direzioni e ammettere nello stesso tempo nel cristallo una perfetta mobilità.

La fase amorfa con la quale il cristallo si trovi in contatto sia liquida. Supponiamo naturalmente che le particelle dei due liquidi siano estremamente mobili sotto la più piccola azione esterna. La pressione che tenderà a deformare il cristallo liquido, è quella perpendicolare alla superficie s_r e deriva dalla tensione superficiale $\alpha_r\, s_r$. Essa ha il valore

$$k_r = \alpha_r\, s_r \left(\frac{1}{R'_r} + \frac{1}{R''_r}\right)$$

ed è diretta verso l'interno del cristallo, essendo R'_r e R''_r i principali raggi di curvatura della superficie s_r. Supposto una deformazione elementare in virtù di un leggero aumento δp_r, il lavoro prodotto da detta pressione sarà

$$\delta P = -\, \alpha_r\, s_r \left(\frac{1}{R'_r} + \frac{1}{R''_r}\right) \delta p_r\,;$$

e poichè

$$s_r\, \delta p_r = \tfrac{1}{2}\, p_r\, \delta s_r \quad (^1),$$

si ha

$$\delta P = -\frac{\alpha_r\, p_r}{2} \left(\frac{1}{R'_r} + \frac{1}{R''_r}\right) \delta s_r\,.$$

(1) Vedi pag. 403, nota.

Supposto avvenuto l'equilibrio, il lavoro totale per una virtuale deformazione del cristallo sarà nullo; avremo cioè

$$(10)\qquad P = -\sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r\, p_r \left[\frac{1}{R'_r} + \frac{1}{R''_r}\right] \delta s_r = 0 .$$

Questa è la condizione a cui è subordinato il minimo della tensione superficiale, sicchè, in luogo delle (3), scriveremo:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{r=n} p_r\, \delta s_r = 0 ,\\ &\sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r\, \delta s_r = 0 ,\\ &\sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r\, p_r \left(\frac{1}{R'_r} + \frac{1}{R''_r}\right) \delta s_r = 0 .\end{aligned}\right.$$

come condizione dell'equilibrio stabile.

Moltiplichiamo la prima di dette equazioni per una costante M', la seconda per M'' e la terza per M'''. Sommate indi insieme, e dato che le variazioni δs_r sono indipendenti, in luogo delle (11) avremo le seguenti n condizioni d'equilibrio, n essendo il numero delle facce considerate:

$$(12)\qquad M' p_r + M'' \alpha_r + M''' \alpha_r\, p_r \left[\frac{1}{R'_r} + \frac{1}{R''_r}\right] = 0 \qquad r = 1 , 2 , 3 \ldots n$$

Per semplicità, ma non per scemare la generalità del problema, facciamo $R'_r = R''_r = R_r$, e inoltre riduciamo a due le costanti. Con ciò le (12) prendono la forma più semplice

$$(14)\qquad \frac{p_r}{\alpha_r} = N' + N'' \frac{p_r}{R_r} .$$

Limitiamoci al caso che si abbia da fare con cristalli liquidi piccolissimi, sicchè $\frac{p_r}{\alpha_r} = \varepsilon_r$ sia una quantità poco diversa da zero. Con ciò al limite si ha

$$(14)\qquad \frac{p_r}{R_r} = -\frac{N'}{N''} . \quad r = 1 , 2 , 3 \ldots n .$$

Si intende che i segni di N' e N'' sono diversi, poichè tanto p_r quanto R_r sono positivi.

Le equazioni (14) dimostrano che p_r al limite è proporzionale a R_r. Ora questa condizione non è soddisfatta per nessuna superficie chiusa e continua

fuorchè per la sfera. Ma allora anche la costante capillare è la stessa per tutte le direzioni. Benchè ciò sembri in contraddizione con l'essenza e con la struttura del cristallo, poichè la densità superficiale non dovrebbe essere la stessa, nondimeno io credo si possa giustificare il risultato, supponendo che in seguito alla deformazione superficiale si formi sul contorno uno strato quàsi isotropo. Queste deduzioni conducono alla seguente regola:

La figura normale del cristallo liquido è la superficie sferica.

Essa soddisfa al principio della minima energia superficiale come le leggi di Curie e Hauy, che determinano la figura normale dei cristalli solidi, con questa differenza che nei cristalli liquidi la minima energia superficiale è condizionata alla deformazione per effetto della tensione stessa, nei solidi, stante la loro resistenza, la deformazione è esclusa o trascurabile. Ogni altra figura di un cristallo liquido che non soddisfa al principio della minima tensione superficiale deve considerarsi anormale ed è perciò instabile.

Tra i liquidi assoluti e i solidi sono in mezzo certi stati fisici, che si chiamano molli o fluenti, fluenti perchè possono fluire sotto l'azione di deboli forze esterne. Varî sono i cristalli fluenti, i più conosciuti fra i quali gli oleati alcalini. Ora siffatti cristalli non possono assumere la figura sferica, poichè essi non si deformano facilmente, nè possono esplicare una tale resistenza come i solidi, da comparire nella veste di poliedri. Le loro figure stanno in mezzo fra gli uni e gli altri.

Meccanica. — *Sulla teoria degli impulsi.* Nota del Corrisp. E. Almansi.

1. Dimostro in questa Nota alcuni teoremi sugli impulsi, i quali esprimono proprietà che non credo siano state ancora segnalate (Teor. I e II); ed altri teoremi noti ritrovo, o enuncio sotto una forma più generale, non escludendo (come si è fatto dalla maggior parte degli autori), il caso di vincoli *unilaterali*; caso che nella teoria degli impulsi è da ritenersi singolarmente importante, come quello che si presenta, per esempio, allorchè fra i corpi di un sistema hanno luogo degli urti.

Tenendo poi conto dei risultati ottenuti, formulo una legge generale relativa al modo di comportarsi, sotto l'azione di dati impulsi, di un sistema di corpi *anelastici*.

2. Sia S un sistema formato di n punti materiali, soggetti a vincoli. Noi supponiamo che nell'istante t_0 un punto qualunque M del sistema riceva un impulso *diretto* (ossia dovuto a forze direttamente applicate) rappresentato dal vettore (P).

I vincoli nell'istante t_0 potranno subire una variazione. Denoteremo con L i vincoli nell'istante successivo a t_0. Ai vincoli L (dei quali soltanto

si avrà da tener conto) imporremo queste condizioni: che i movimenti virtuali siano tutti e soli i movimenti compatibili coi vincoli; e che moltiplicando per una costante positiva le velocità relative ad un movimento compatibile coi vincoli, ovvero componendo più movimenti compatibili coi vincoli, si ottenga ancora un movimento compatibile coi vincoli.

Riferiamo i punti del sistema ad una terna di assi fissi. A ciascuna delle $3n$ coordinate corrisponderà una massa m (la massa del punto a cui appartiene quella coordinata), una proiezione di velocità u_0 relativa all'istante che precede t_0, una proiezione di velocità u relativa all'istante successivo a t_0, una proiezione d'impulso diretto A, ecc.

Le velocità di proiezioni u, la cui determinazione sarà, in generale, lo scopo del problema, devono essere compatibili coi vincoli L. Denoteremo con (α) questa prima condizione. Esse devono poi soddisfare una seconda condizione (β), la quale esprime il Principio di D'Alembert applicato agli impulsi: per qualunque movimento compatibile coi vincoli L deve aversi, dette v le corrispondenti proiezioni di velocità,

$$\Sigma \{ m(u_0 - u) + \mathrm{A} \} v \leqq 0,$$

la somma essendo estesa a tutte le $3n$ coordinate.

Introduciamo le velocità di proiezioni

$$u_1 = u_0 + \frac{\mathrm{A}}{m},$$

ossia le velocità che avrebbero i punti del sistema, nell'istante successivo a t_0, se fossero liberi. La formula precedente diverrà

$$\Sigma m (u_1 - u) v \leqq 0. \tag{1}$$

Noi avremo da considerare movimenti, come (v), pei quali si richiederà soltanto di soddisfare la condizione (α), vale a dire di essere compatibili coi vincoli; e movimenti, come (u), che dovranno soddisfare tanto la condizione (α), quanto la condizione (β). Questi ultimi li diremo movimenti *possibili* (geometricamente e dinamicamente possibili).

Date le posizioni e le velocità dei punti nell'istante che precede t_0, nonchè gl'impulsi diretti (P), ossia date le posizioni dei punti e le velocità u_1, le condizioni (α) e (β), in generale, non sono sufficienti a determinare il movimento (u) del sistema nell'istante successivo a t_0, ed è necessario, affinchè il movimento risulti determinato, aggiungere ulteriori condizioni.

3. Supponendo assegnate le u_1, consideriamo due movimenti (v) e (w), per ora arbitrarii; e poniamo:

$$\mathrm{Q} = \Sigma m (u_1 - v)^2,$$
$$q = \Sigma m (u_1 - w)^2,$$

intendendo sempre che le somme siano estese a tutte le $3n$ coordinate. Sarà

$$Q - q = \Sigma m (v^2 - w^2) - 2 \Sigma m u_1 (v - w),$$

ovvero, togliendo ed aggiungendo il termine $2 \Sigma m w (v - w)$,

$$(2) \qquad Q - q = \Sigma m (v - w)^2 - 2 \Sigma m (u_1 - w)(v - w).$$

Da questa formula dedurremo varie conseguenze.

Consideriamo da prima la quantità Q per tutti i movimenti (v) *compatibili coi vincoli*. Esisterà certamente per Q un limite inferiore finito. Sia esso q; e sia (w) un movimento compatibile coi vincoli per il quale Q diventi uguale a q: movimento di cui ammettiamo dunque l'esistenza.

Per qualunque altro movimento (v) compatibile coi vincoli sarà $Q \geqq q$: quindi, in virtù della formula (2),

$$(3) \qquad \Sigma m (u_1 - w)(v - w) \leqq \tfrac{1}{2} \Sigma m (v - w)^2.$$

Sia pure (ν) un movimento compatibile coi vincoli; c una costante positiva. Anche il movimento a cui corrispondono le proiezioni di velocità $w + c\nu$ sarà compatibile coi vincoli (§ 2); onde la formula (3) dovrà essere verificata se poniamo $v = w + c\nu$, ossia $v - w = c\nu$. Avremo allora, tolto il fattore positivo c,

$$\Sigma m (u_1 - w) \nu \leqq \frac{c}{2} \Sigma m \nu^2.$$

Affinchè questa condizione sia verificata per un valore comunque piccolo di c, dovrà essere

$$\Sigma m (u_1 - w) \nu \leqq 0.$$

Ma (ν) può rappresentare un movimento qualunque compatibile coi vincoli: la formula ottenuta, analoga alla (1), dice dunque che il movimento (w) soddisfa la condizione (β). Quindi:

Un movimento compatibile coi vincoli che rende minima la quantità Q *è un movimento possibile* [1].

4. Riprendiamo la formula (3), intendendo ancora che (w) rappresenti un movimento compatibile coi vincoli pel quale Q assuma il valore q. E

[1] Questo, sostanzialmente, è il teorema del Robin, del quale una dimostrazione, relativa al caso che i vincoli siano bilaterali, può vedersi nel *Traité de Méc. rat.* dell'Appell, t. II, pag. 507. In luogo della Q l'Appell considera una quantità che ne differisce per un termine addittivo, indipendente dalle v.

Sull'argomento qui trattato vedansi poi alcune Note di A. Mayer, Berichte der K. Sachsischen Gesel. der Wissen. zu Leipzig, a. 1898-1899.

poniamo ora $v = cw$, ove c denoti una costante positiva. Avremo:

$$(c-1)\,\Sigma m(u_1 - w)\,w \leqq \frac{(c-1)^2}{2}\,\Sigma m w^2 .$$

Segue da questa formula che deve essere

$$\Sigma m(u_1 - w)\,w = 0\,, \tag{4}$$

altrimenti noi potremmo prendere la costante c maggiore o minore dell'unità, in modo che il primo membro risultasse positivo, e così prossima ad 1 che il primo membro risultasse maggiore del secondo.

Il movimento (w), come si è veduto, è un movimento possibile. Sia pure (w') un movimento possibile. Esso dovrà verificare la condizione (β), espressa dalla formula (1) in cui si ponga $u = w'$. In particolare, assumendo come movimento (v) il movimento (w), si avrà

$$\Sigma m(u_1 - w')\,w \leqq 0 .$$

Sottraendo questa disuguaglianza dall'equazione precedente, otteniamo:

$$\Sigma m(w' - w)\,w \geqq 0 . \tag{5}$$

Ora, dalla identità $w' = w + (w' - w)$, si ricava

$$\Sigma m w'^2 = \Sigma m w^2 + \Sigma m(w' - w)^2 + 2\,\Sigma m(w' - w)\,w .$$

Per la formula (5) l'ultimo termine non è mai negativo; il penultimo, se w e w' sono due movimenti distinti, è sempre positivo. Onde avremo:

$$\Sigma m w'^2 > \Sigma m w^2 . \tag{6}$$

Di qui vediamo intanto che non possono esservi due movimenti compatibili coi vincoli, pei quali sia $Q = q$. Essi sarebbero infatti movimenti possibili (§ prec.); e dovrebbero verificare tanto la disuguaglianza (6), quanto l'altra ottenuta scambiando fra loro (w) e (w'): ciò che è assurdo.

La formula (6) mostra poi che se (w) è il movimento per cui $Q = q$, per ogni altro movimento possibile (dato che esista) la forza viva del sistema ha un valore maggiore.

Possiamo raccogliere i risultati ottenuti nel seguente

Teorema I. — *Fra i movimenti compatibili coi vincoli ve n'è uno solo che faccia assumere alla Q il suo valore minimo. Esso è un movimento possibile; e fra i movimenti possibili è quello a cui corrisponde la minima forza viva del sistema.*

5. Torniamo alla formula (2). Supponiamo ora (abbandonando le precedenti ipotesi) che (w) sia un movimento *possibile ed invertibile*; (v) un altro movimento qualunque *compatibile coi vincoli.*

Essendo (w) possibile, sarà

$$\Sigma m (u_1 - w) \nu \leqq 0$$

per qualunque movimento (ν) compatibile coi vincoli. In particolare per $(\nu) = (v)$ si avrà

$$\Sigma m (u_1 - w) v \leqq 0 ;$$

e per $(\nu) = (w)$, essendo (w) per ipotesi un movimento invertibile,

$$\Sigma m (u_1 - w) w = 0 .$$

Sottraendo membro a membro dalla disuguaglianza precedente, abbiamo:

$$\Sigma m (u_1 - w) (v - w) \leqq 0 .$$

Il secondo membro della (2) è dunque positivo. Onde sarà $Q > q$; ossia (w) è quel movimento, unico fra tutti i movimenti compatibili coi vincoli, per cui Q assume il valore minimo q. Quindi, tenendo conto del Teorema I, avremo il

TEOREMA II. — *Se fra i movimenti possibili esiste un movimento invertibile, ne esiste uno solo; il quale, fra i movimenti possibili, è quello a cui corrisponde la minima forza viva del sistema.*

Nel caso che i vincoli siano bilaterali, un movimento possibile è anche invertibile. Dunque:

Se i vincoli sono bilaterali esiste un solo movimento possibile. Esso è il movimento compatibile coi vincoli a cui corrisponde il minimo valore della Q.

6. Rappresenti ancora (w) il movimento compatibile coi vincoli (bilaterali od unilaterali) a cui corrisponde il minimo valore della Q.

Dalla identità $u_1 = w + (u_1 - w)$ si ricava:

$$\Sigma m u_1^2 = \Sigma m w^2 + \Sigma m (u_1 - w)^2 + 2 \Sigma m (u_1 - w) w .$$

Ma per la formula (4) l'ultimo termine è nullo; onde avremo:

$$\Sigma m u_1^2 - \Sigma m w^2 = \Sigma m (u_1 - w)^2 .$$

Questa formula esprime un teorema che comprende, come, caso particolare, un noto teorema del Carnot [1], e che è verificato tutte le volte che il sistema, nell'istante successivo a quello in cui hanno luogo gl'impulsi, assume il movimento (w), ossia il movimento che rende minima la Q; ciò che accade sempre se i vincoli sono bilaterali.

7. Ecco ora come i teoremi dimostrati trovano un'applicazione nel caso dei sistemi anelastici.

[1] V. Appell, loc. cit., pag. 501.

Il sistema S noi possiamo immaginarlo formato di un certo numero di corpi C, ciascuno dei quali risulti alla sua volta di un grandissimo numero di punti materiali m. Come caso limite, potremo supporre che i corpi C siano continui.

Consideriamo da prima l'urto di due corpi liberi, C′, C″. È questo uno dei casi nei quali le condizioni (α) e (β) non sono sufficienti a determinare il movimento del sistema nell'istante $t_0 + dt$ successivo all'urto.

Siano P′ e P″ i punti dei due corpi che nell'istante t_0 vengono ad incontrarsi; n denoti la normale comune alle superficie dei due corpi nel punto di contatto, diretta da C″ a C′. Nell'istante $t_0 + dt$ siano a' ed a'' le proiezioni sulla normale n delle velocità dei punti P′ e P″. La differenza

$$a = a' - a''$$

deve essere nulla o positiva, chè altrimenti i due corpi penetrerebbero uno nell'altro. L'osservazione mostra che il valore di a, restando immutate tutte le altre circostanze, varia a seconda della natura dei due corpi. Si possono immaginare dei corpi pei quali a sia sempre nulla. Questi corpi li diciamo anelastici.

Quando a è maggiore di zero (corpi elastici), il movimento dei due corpi, nell'istante successivo a t_0, non è invertibile; giacchè, invertendo il movimento, a diventerebbe negativa, e i corpi si compenetrerebbero.

Esso è invece invertibile quando a è uguale a zero, ossia nel caso dei corpi anelastici. Dunque, in virtù del Teorema II, il movimento che due corpi anelastici assumono dopo l'urto sarà, fra tutti i movimenti *possibili*, quello a cui corrisponde la minima forza viva del sistema; come d'altronde è noto.

Più in generale, consideriamo un sistema formato di quanti corpi si voglia, liberi, o soggetti a vincoli bilaterali, o derivanti da contatti. Supponiamo che nell'istante t_0 avvengano degli urti fra i corpi del sistema. Se questi sono anelastici, e se fra i movimenti possibili ve n'è uno il quale conservi i contatti fra i corpi (nel quale cioè la a, nell'istante $t_0 + dt$, siano nulle in tutti i punti di contatto), noi potremo ritenere, come fatto risultante da osservazioni relative a corpi che si avvicinano a corpi anelastici, che il sistema assumerà precisamente questo movimento. Ma un tale movimento è invertibile: esso sarà, per conseguenza, fra i movimenti possibili, quello pel quale la forza viva è minima.

Estendendo, per induzione, a tutti i casi (purchè si tratti di corpi anelastici) questa proprietà del movimento nell'istante $t_0 + dt$, siamo condotti a formulare la seguente legge generale:

Se un sistema di corpi anelastici, comunque vincolati, in un certo istante riceve degl'impulsi, il movimento che il sistema assume nell'istante

successivo è, fra tutti i movimenti possibili, quello a cui corrisponde la minima forza viva.

Si deve osservare che, essendo i corpi anelastici dei corpi ideali, niente, a rigore, ci vieta di attribuire ad essi la proprietà espressa da questa legge. Soltanto le osservazioni (eseguite sopra quei corpi reali che noi assimiliamo a corpi anelastici) ci possono fornire un criterio sulla opportunità di adottarla. Nello studio teorico di numerosi casi particolari ho potuto tuttavia convincermi che i risultati a cui essa conduce si accordano, in mancanza di osservazioni dirette, con quello che l'intuizione lascia prevedere.

Ammessa questa legge, per il Teorema I il movimento che il sistema assume nell'istante successivo a t_0 sarà pure, fra tutti i movimenti *compatibili coi vincoli*, quello a cui corrisponde il minimo valore della Q. La determinazione di questo particolare movimento risolve dunque il problema non soltanto se i vincoli sono bilaterali (§ 5), ma anche se i vincoli sono unilaterali (e soddisfano le condizioni indicate nel § 2), purchè il sistema sia formato di corpi anelastici [1].

Petrografia. — *Studî litologici sull'isola del Giglio.* II: *Il granito.* Nota del Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH.

Del bel granito del Giglio, pietra ornamentale e da costruzione molto nota e largamente adoperata fin dagli antichi Romani, la conoscenza scientifica non è molto progredita. Ne diedero descrizioni Meli [2], De Stefani [3], Lotti [4], per citare soltanto i più recenti, ma mancano finora intorno ad esso una indagine petrografica minuta e lo studio della costituzione chimica. Una tale lacuna mi propongo di colmare con questa seconda Nota litologica sull'isola del Giglio, che tratta del granito normale, lasciando ad una successiva lo studio degli inclusi e delle rocce filoniane, che attraversano la massa granitica.

Come è noto, il granito costituisce la massima parte dell'isola, ma per osservarlo nelle condizioni migliori, il luogo più opportuno è la spiaggia della Cala delle Cannelle, dove una fronte di cava estesa ed alta ed in attiva

[1] Il Mayer, nella terza delle Note citate (pag. 245) deduce la legge Q = min. dal Principio di Gauss. Ma nella teoria degl'impulsi non è lecito invocare se non quei principii di Dinamica che sono conseguenza delle condizioni (α) e (β). A mio parere, soltanto i teoremi qui dimostrati, messi in relazione colle osservazioni, rendono plausibile, per i corpi anelastici, la legge Q = min.

[2] Meli R. *Cenni sul granito dell'isola del Giglio e bibliografia scientifica relativa a quest'isola.* Roma, Boll. Soc. geol. ital., X, 1891, 383.

[3] De Stefani C., *Notizie geologiche* (in Sommier S., *L'isola del Giglio e la sua flora.* Torino, 1900, pag. XLVI).

[4] Lotti B., *Geologia della Toscana.* Roma, 1910, pag. 292.

lavorazione offre modo di osservare una considerevole massa di roccia freschissima. Alle Cannelle infatti è concentrato attualmente tutto il lavoro di estrazione del granito, le altre minori cave dell' isola essendo abbandonate.

Il granito normale delle Cannelle è a grana media: presenta la massa feldspatico-quarzosa, di color bianco o quasi, punteggiata abbondantemente da laminette di mica nera o bruno-scura, e in minor quantità da cristalletti di tormalina nera e sparsa di macchie a sezione quadrangolare, o a contorno irregolare di un materiale pinitoide verde scuro o grigio verdastro.

Al microscopio si osserva la comune struttura ipidiomorfa granosa e il normale ordine di successione dei componenti principali. Fra i feldspati un netto grado di idiomorfismo si trova soltanto nei plagioclasi e più perfetto nei più basici.

Il feldspato alcalino è ortoclasio, o solo, o in accrescimento micropertitico con albite. Si presenta in grandi individui con non costante nè sicuro idiomorfismo verso il quarzo e decisamente allotriomorfi verso i feldspati calcico-sodici. Qualcuno fra essi mostra la geminazione di Carlsbad. Il suo aspetto, per lo più torbido, è dovuto in qualche caso ad una compenetrazione nella sua massa di materiale limonitico bruno, ma più spesso ad una trasformazione incipiente o avanzata in materiale micaceo. In tale caso la trasformazione ha inizio, come di consueto, nell' interno del cristallo e si propaga lungo le tracce dei piani di sfaldatura e, quando abbia invaso, come accade di frequente, tutta la massa dei cristallo, viene a costituire quell'aggregato prevalentemente micaceo, cui si dà il nome di pinitoide e di cui farò più ampio cenno in seguito.

Gli accrescimenti micropertitici si riconoscono per lo più per la tipica inclusione o associazione regolare di minute lamelle albitiche nella massa dell'ortoclasio, che appare evidente anche con ingrandimenti non forti. Ma talora le dimensioni delle lamine albitiche sono talmente esigue che con i maggiori ingrandimenti soltanto si arriva a discernere la loro presenza e in qualche caso neanche con questi: con ciò si avrebbe un esempio di criptopertite. A questa struttura si deve probabilmente riferire il fenomeno che presentano talune sezioni abbastanza estese di feldspato alcalino, le quali, esaminate nella lamina sottile con la semplice lente e sotto una determinata riflessione, mostrano un lumeggiamento celestognolo, che ricorda in qualche modo le pietre lunari.

Importa osservare inoltre che qualche individuo di ortoclasio presenta nell'orlo ed anche racchiuse nella sua massa stessa, delle plaghe a contorno tondeggiante irregolare di un aggregato quarzoso-feldspatico, come quello che costituisce la pasta fondamentale a struttura granofirica dei porfidi granitici.

Il feldspato calcico-sodico si trova in quantità considerevole bene spesso pari a quella del feldspato alcalino, e mostra cristalli ben idiomorfi di di-

mensioni minori del feldspato alcalino, ma in genere molto più limpidi e freschi.

Si tratta per lo più di individui piuttosto tabulari secondo (010) con geminazioni distinte: fra queste frequente è l'associazione delle due leggi albite e Carlsbad, ma non manca neanche quella albite e periclino, quest'ultima soltanto nei cristalli di miscele più basiche.

Benchè si possano osservare miscele di differente composizione, pure quelle più abbondanti presentano caratteri ottici che le fanno ascrivere ad una miscela andesinica intorno a $Ab_3 An_2$, alla quale corrispondono i seguenti dati osservati: massimi delle estinzioni simmetriche nella zona normale a (010) intorno ai 18°; massimi delle differenze Δ nei geminati doppî albite-Carlsbad intorno ai 9° o 10°; confronti di indici di rifrazione con quarzo secondo gli schemi:

posiz. parallela $\omega < \alpha'$ $\varepsilon \gtreqless \gamma'$
" incrociata $\omega < \gamma'$ $\varepsilon \geqq \alpha'$

Le miscele più acide, come oligoclasio intorno a $Ab_3 An_1$, sono più rare e si mostrano in cristalli più grandi, ma torbidi o con idiomorfismo meno perfetto. Oltrechè per i valori minori dei massimi di estinzione simmetrica si distinguono anche per gli schemi di confronto con il quarzo che sono

posiz. parallela $\omega = \alpha'$ $\varepsilon > \gamma'$
" incrociata $\omega \gtreqless \gamma'$ $\varepsilon > \alpha'$

I cristalli a struttura zonata sono pure frequenti e, come di solito, il nucleo interno è più ricco di calcio.

L'alterazione del feldspato calcico-sodico procede come nel feldspato alcalino, portando cioè alla formazione di un materiale in prevalenza micaceo: si deve peraltro osservare che in esso è meno frequente, e si limita ad interessare soltanto le miscele più acide.

Il quarzo generalmente abbondante ha i caratteri normali del quarzo dei graniti: i granuli allotriomorfi mostrano talora l'unione di parecchie zone diversamente orientate otticamente e talora semplicemente una estinzione ondulosa. Gli inclusi non sono molto abbondanti, nè di grandi dimensioni, e ne deriva che il quarzo è in generale assai limpido.

La mica biotite si presenta in numerose lamine e listerelle con pleocroismo

$\mathfrak{a}$ giallo chiaro
$\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ bruno rossastro scuro

Dalla sua alterazione si vede bene spesso formarsi clorite, e il processo può essere seguìto in tutte le sue fasi del resto ben note.

La clorite, che per la sua debolissima birifrazione deve ritenersi come una pennina, talvolta è quasi incolora; mentre in altri casi ha il solito pleocroismo dal verde chiaro al giallo chiarissimo.

Alcune sezioni di biotite scolorate per il processo di alterazione mostrano ciuffetti di trichiti di color rosso bruno scuro, verosimilmente di rutilo; il che dimostra un originario contenuto in TiO_2 della biotite.

È presente anche in piccola quantità muscovite, indipendentemente da quella che forma la massima parte dell'aggregato pinitoide, e bene spesso concresciuta parallelamente con la biotite: in tal caso si mostra in laminette regolari idiomorfe di dimensioni relativamente grandi. Altre volte le laminette di muscovite formano dei gruppetti radiati dentro cavità miarolitiche della roccia.

Componente accessorio, ma di costante presenza, benchè molto irregolarmente distribuito, del granito del Giglio è la tormalina, la quale costituisce inoltre, come vedremo, un elemento essenziale e abbondante in molte delle rocce filoniane che attraversano la massa granitica. Nel granito i cristalli di tormalina mostrano abito prismatico talora assai raccorciato a terminazione romboedrica, e sono spesso associati in gruppi paralleli o subparalleli. Dove si trovano concentrazioni di cristalli di tormalina, questi formano i noti gruppi radiati.

Linee di sfaldatura normali all'asse del prisma percorrono i cristalli di tormalina, nei quali inoltre è comune la struttura zonata messa in evidenza già da G. D'Achiardi [1] per le grosse tormaline da lui descritte. Il colore, che macroscopicamente appare nero, nelle sezioni sottili è variabile: alcuni cristalli presentano pleocroismo

ω bruno
ε giallo chiarissimo

altri

ω azzurrognolo
ε incoloro o quasi

altri ancora

ω azzurro-violaceo
ε quasi incoloro

Anche nello stesso cristallo la distribuzione del colore non è uniforme: qualche volta nucleo e parti periferiche sono diversamente colorati non solo nei varî toni di una stessa tinta, ma anche in tinte diverse; talvolta ancora il cristallo è costituito da zone ripetutamente alternate di color bruno e di colore azzurrognolo.

[1] D'Achiardi G., *Osservazioni sulle tormaline dell'isola del Giglio.* Annali delle Università toscane, XXII, 1897.

Altri minerali del tutto accessorî sono apatite, in lunghi cristalli prismatici, e zircone, in cristalli tozzi a contorno più o meno arrotondato.

Rarissimi sono i minerali metallici come magnetite, ilmenite, pirite, ecc. nel granito normale, benchè non sia fuor di luogo osservare che in varî punti dell'isola si trovano nella massa granitica piccole o grandi concentrazioni di solfuri e di ossidi metallici.

Come si è detto, uno dei caratteri macroscopici particolari del granito del Giglio, carattere che si può osservare, sia nella potente massa delle Cannelle, sia in prossimità di Giglio Marina o alla cala dell'Arenella, dove pure esistono cave ora abbandonate, è la presenza di abbondante materiale pinitoide verdastro o verde grigio o verde bruno.

Il Meli (loc. cit.) tratta lungamente di questo minsrale che egli chiama pinite, e come tale ritiene pseudomorfa di cordierite, di cui dice che conserva la forma cristallina tipica, per concluderne che il granito del Giglio deve chiamarsi una granitite cordieritica. A me non fu dato osservare fra i tanti esemplari e le tante lamine esaminate nessuna sezione di pinitoide, il cui contorno si possa con sicurezza riportare alla forma della cordierite, e neanche discernere in mezzo alla sua massa resti di cordierite inalterata, o alcuno dei fenomeni di trasformazione di questo minerale così accuratamente descritti da G. D'Achiardi [1] per il suo giacimento nei filoni tormaliniferi di S. Piero in Campo. Nè valgono, a confermare l'esistenza di cordierite o di prodotti da questa derivati nel granito del Giglio, le ragioni addotte da Meli di analogia nella composizione mineralogica e chimica fra questo e il granito normale di Monte Capanne, dove è bensì vero che A. D'Achiardi [2] osservò cordierite, del resto completamente trasformata in pinite, ma soltanto come componente raro e accidentale e non certo come componente normale e neanche lontanamente accessorio.

Riservando, d'accordo con i migliori e più moderni testi, il nome di pinite alle pseudomorfosi di cordierite, chiamo pinitoide il materiale verdastro del granito del Giglio che deriva invece da trasformazione del feldspato [3].

[1] D'Achiardi G., *La cordierite dei filoni tormaliniferi nel granito di S. Pietro in Campo* (*Elba*) Proc. verb. Soc. tosc. sc. nat. Pisa, 1900.

[2] Id., *Sulla cordierite nel granito normale dell'Elba e sulle correlazioni delle rocce granitiche con le trachitiche.* Mem Soc. tosc. sc. nat. Pisa, II, 1876 (1-12).

[3] Voglio ricordare qui che quell'insigne geologo che fu il Brocchi, fin dal 1818, non solo aveva osservato la presenza, nel granito del Giglio, del materiale pinitoide, ma aveva dato fin d'allora la spiegazione più plausibile della sua genesi. Riporto l'intero periodo del Brocchi, perchè il Meli (loc. cit.) ne riferisce solo una parte:

« Il granito in questo luogo oltre alla mica nera contiene piccole masse di un verde bruno, le quali esplorate con la lente presentano una sostanza semipellucida, di frattura liscia, o minutamente scagliosa, e di luccicore grasso: tentata con la punta di una spilla agevolmente si solca e raschiandola dà una polvere bianca. Essa ha tutti i caratteri della

Il pinitoide si trova talora in sezioni a contorno quadrangolare, più spesso in masse allotriomorfe: consta essenzialmente di laminette molto piccole o listerelle di mica alcalina (muscovite), che si intrecciano con ordinamento generalmente irregolare, e soltanto in alcuni punti formano aggregati a rosetta o gruppi sferoidali, che dànno fra Nicols incrociati una imperfetta croce di interferenza. In mezzo al feltro micaceo si trovano incastrate lamine poco numerose, ma più estese e a contorno irregolare di clorite (pennina).

In altri rarissimi casi, insieme con la mica si trova a costituire il pinitoide della sostanza serpentinosa a struttura antigoritica. È facile seguire con l'esame di parecchie lamine della roccia, tutti i gradi di questa, del resto notissima, trasformazione del feldspato, tanto nell'ortoclasio quanto in alcuni dei plagioclasi, cioè nei più acidi: perchè si possono osservare feldspati con alterazione appena incipiente, altri con alterazione più o meno inoltrata, sino a quelli numerosi, nei quali la metamorfosi è completa e in cui è ben difficile di trovar traccia del minerale originario. I plagioclasi dànno origine a sezioni quadrangolari prismatiche di pinitoide, mentre l'ortoclasio, per lo più allotriomorfo anche rispetto al quarzo, origina pinitoide a sezione irregolare. Qualche volta la trasformazione pinitoidica ha interessato una zona della roccia più o meno estesa, agendo su tutti i cristalli di feldspato alcalino e su alcuni almeno dei cristalli di feldspato calcico-sodico compresi in essa; in tal caso il pinitoide forma come una plaga allotriomorfa che si insinua fra gli elementi intatti e che racchiude nel suo interno anche i medesimi elementi, come granuli di quarzo, lamine di biotite, cristalli di plagioclasio nelle sue miscele più basiche e anche prismetti isolati o gruppi radiati di tormalina. Quasi sempre dove si trova più abbondante la tormalina, ivi l'alterazione pinitoidica è più estesa ed avanzata, tanto che in alcuni punti della massa granitica si possono osservare delle concentrazioni di cristalli di tormalina circondati da una chiazza estesa anche qualche centimetro di pinitoide verde scuro.

Questa stretta relazione fra pinitoide e tormalina, l'irregolarità della distribuzione del pinitoide stesso, il fatto di trovarlo anche nelle zone più profonde e più fresche delle recentissime fronti di cava nella cala delle Cannelle, fa escludere l'ipotesi di una alterazione dei feldspati causata da agenti atmosferici; e fa pensare, invece, che la causa determinante di siffatta al-

---

serpentina, e tale realmente credo che sia: queste masse racchiudono sovente nell'interno alcune squame di mica *e non di rado si mostrano sotto sembianze di prismi quadrangolari, ma non bene determinati, che io crederei di buon grado essere pseudo-cristalli, che abbiano tolta ad imprestito la forma di quelli del feldspato* » (*Osservazioni naturali fatte al promontorio Argentaro ed all'isola del Giglio.* Lettere del sig. Brocchi al signor conte Bardi. Estratto dalla Biblioteca Italiana, Milano 1818)

terazione si debba trovare nelle stesse azioni pneumatolitiche che hanno dato origine alla tormalina.

***

Mineralogicamente grandissima è l'analogia fra il granito del Giglio e il granito normale dell' Elba, di cui ricordo in nota le più recenti descrizioni [1]. L' uno e l'altro sono da considerarsi come una granitite contenente, come elementi essenziali, quarzo, ortoclasio, plagioclasio, biotite. Anche la natura dei plagioclasi è poco differente nell' una e nell'altra roccia, salvo forse un maggior predominio di feldspati più basici (Andesina $Ab_3 An_2$) nel Giglio. Ciò che caratterizza la roccia del Giglio è la presenza costante di tormalina, che nella granitite normale dell' Elba è accidentale, e l'alterazione frequente del feldspato in pinitoide.

L'analisi chimica della roccia normale tolta dalla parte più fresca e più profonda della cava a Cala delle Cannelle, mi ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	67.98
TiO_2	0,48
Al_2O_3	15,55
Fe_2O_3	0,96
FeO	2,30
CaO	2,39
MgO	1,18
K_2O	4,63
Na_2O	2,89
perd. p. arrov.	1,28
	99,64

che pongo a confronto con il quadro delle analisi note della granitite normale dell' Elba, che tolgo da una recente Memoria di Manasse [2]:

[1] Vedi: Viola C. (in Lotti, *Sulle apofisi della massa granitica del M. Capanne nelle rocce sedimentarie eoceniche presso Fetovaja nell' isola d' Elba.* Boll. R. Com. Geol., XXV, 1894. — Manasse E., *Stilbite e foresite del granito Elbano.* Memorie Soc. tosc. sc. nat. Pisa, XVII, 1900. — Idem, *Su di alcune rocce della Crocetta presso S. Piero in Campo* (*Isola d' Elba*). Proc. verb. Soc. tosc. sc. nat. Pisa, 1901. — D'Achiardi G., *Metamorfismo sul contatto fra calcare e granito al Posto dei Casoli presso S. Piero in Campo* (*Elba*). Memorie Soc. tosc. sc. nat. Pisa, XIX, 1902. — Aloisi P., *Rocce granitiche negli scisti della parte orientale dell' isola* d' *Elba.* Mem. Soc. tosc. sc. nat. Pisa, XXVI, 1910.

[2] Manasse E., *Ricerche petrografiche e mineralogiche sul Monte Arco* (*Isola d' Elba*). Mem. Soc. tosc. sc. nat. Pisa, XXVIII, 1912.

	I Fonte del Prete anal. Manasse	II Monte Capanne anal. Manasse	III ? anal. Bunsen	IV Serra anal. Aloisi	V Crocetta anal. Manasse
perd. p. arrov. . . .	0,59	0,88	2,14	1,07	0,61
SiO_2	69,92	67,61	67,49	71,58	71,94
TiO_2	—	tracce	—	0,83	—
Al_2O_3	15,68	16,60	17,33	13,01	16,60
Fe_2O_3	4,57	1,12	3,46	3,13	0,43
FeO		2,26			
CaO	1,85	2,61	1,68	1,81	3,07
MgO	0,92	1,55	1,17	1,14	0,26
K_2O	3,18	4,01	5,24	3,63	3,06
Na_2O	4,35	4,14	2,73	3,33	4,92
P_2O_5	0,24	0,17	—	—	0,28
	101,30	100,95	101,24	99,53	101,17

L'analogia di costituzione chimica del granito del Giglio con quello normale dell'Elba è grandissima; e appare tanto maggiore nel confronto con l'analisi II del quadro, che si riferisce alla massa granitica più importante dell'Elba, a quella cioè di Monte Capanne.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* IX (parte 2ª): *Azione dei gas della respirazione sull'intestino.* Nota del Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Zoologia agraria. — *Prima notizia sulla presenza della mosca delle olive e di un parassita di essa in India.* Nota del Corrispondente F. Silvestri.

Fin dal 1905 io proposi uno studio della mosca delle olive e dei suoi nemici in Asia ed in Africa per tentare la lotta naturale contro sì dannoso insetto coi parassiti che allora ritenevo probabile esistessero, ed oggi sappiamo che esistono realmente, in tali continenti. Continuai per varii anni a raccomandare tale proposta e finalmente trovai nell'on. Cavasola il primo Ministro di agricoltura, che la credette degna di essere presa in considerazione e mi incaricò nel 1914 di andare in Eritrea per cercare parassiti della mosca delle olive. I risultati di tale viaggio furono da me esposti in una Nota pubblicata nel vol. IX del Bollettino del laboratorio di zoologia della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici, in fine alla quale proposi un programma per le necessarie future ricerche e fra l'altro scrissi: « Io ho ferma fiducia che se si riuscirà ad acclimatare le principali specie di parassiti della mosca delle olive dell'Eritrea in Italia, come tutto ci induce a sperare, l'agricoltura nazionale ne ritrarrà un vantaggio grandissimo; ma per la conoscenza quanto più possibile completa del *Dacus oleae* e dei suoi parassiti credo che non bisognerà limitare le ricerche all'Eritrea, ma continuarle poi almeno con qualche mese di studio in Abissinia, nell'Africa orientale-meridionale e in Asia. Non si conosce nulla dei parassiti della mosca delle olive dall'Asia Minore alla parte nord-occidentale dell'India ed essendo quella parte di mondo un centro molto importante di diffusione del genere *Olea* (forse l'*Olea cuspidata* Wall. è la forma originaria selvatica dell'*Olea europea* L.), si potrebbero scoprire parassiti interessanti e osservare molti insetti e fatti di grande utilità ».

A causa delle condizioni dell'Europa, per la guerra, nel 1915 non fu continuata la raccolta e l'introduzione di parassiti della mosca delle olive in Eritrea, e tanto meno si potè pensare ad estendere le ricerche altrove; ma io procurai di avere parassiti (*Opius concolor*) della Tripolitania e notizie intorno al *Dacus oleae* dall'India, perchè sempre continuavo a ritenere che nella parte nord-occidentale di tale regione doveva esistere la mosca delle olive e che dovevano esservi parassiti degni di studio. Scrissi in proposito al signor Th. B. Fletcher, entomologo imperiale delle Indie, il quale gentilmente si occupò nel 1915 di assumere notizie intorno alla presenza del *Dacus oleae* nelle provincie, ove esiste selvatico l'olivo, ma le ebbe negative. Egli non soddisfatto di ciò si fece mandare olive, ma con non migliore risultato, perchè il 18 dicembre 1915 mi scrisse: « Regarding *Dacus*

oleae, I had some parcels of olive fruits sent down from North-West India but they arrived here in bad condition and no insects have been bred out of them. So far as we know at present, then, *Dacus oleae* has not been found in India ».

Egli però nella primavera dell'anno corrente visitò personalmente le provincie nord-occidentali e il 22 maggio mi informò che aveva trovato olive (forse di *Olea cuspidata*) bacate e che ne aveva ottenuto adulti di *Dacus oleae* e di un *Opius* suo parassita, dei quali mi avrebbe mandato in esame esemplari al suo ritorno a Pusa, come egli infatti gentilmente fece nel settembre.

Gli esemplari mandatimi dal signor Fletcher, giunti alla fine di ottobre a Portici, sono stati in questi giorni da me esaminati, perciò posso ora far conoscere l'interessante raccolta da lui fatta e descrivere la forma di *Dacus oleae* dell'India come una nuova varietà ed il parassita come nuova specie di *Opius*; prima però è mio dovere porgere specialissimi ringraziamenti all'illustre entomologo signor Fletcher per il vivo interesse che gentilmente prese per far meglio conoscere la distribuzione del *Dacus oleae* ed i suoi nemici, ed esprimo la speranza che egli possa presto compiere o far compiere nell'interesse della scienza e dell'agricoltura uno studio accurato della mosca delle olive e dei suoi parassiti nell'India.

Dacus oleae, var. *asiatica* nov.

Femmina. Il corpo è di colore isabella con il capo fornito di due grandi macchie nere sulla parte inferiore sublaterale della faccia, con lo scuto mesotoracico appena più scuro e fornito di una fascia mediana e due sublaterali, posteriormente riunite alla mediana, di colore nero, col mesosterno immacolato o leggermente macchiato sulla parte anteriore di bruno, scutello cremeo isabellino, metanoto isabellino come il corpo o più o meno imbrunito, addome o tutto immacolato o coi tergiti forniti di fascie trasversali più o meno larghe di colore brunastro. Ali come nella forma tipica.

Lunghezza del corpo mm. 3-4.

Maschio. Simile per colore alla femmina e poco più piccolo.

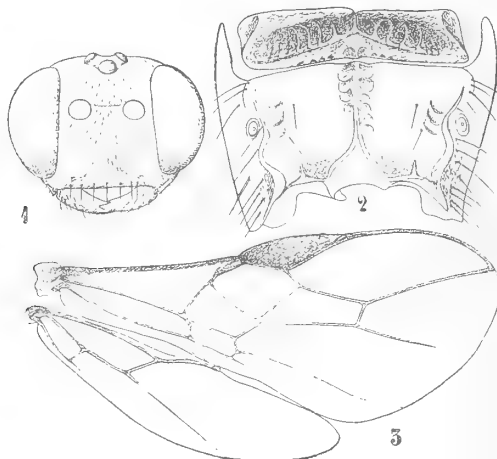
Habitat. India: Cherat. La larva vive nel sarcocarpio dei frutti di *Olea*? *cuspidata*.

Nella mia collezione ho anche esemplari di *Dacus oleae* di Beyrut (Siria) ottenuti da frutti di *Olea europea* che si avvicinano molto per colore a quelli dell'India.

Osservazione. — Io ho esaminato varii esemplari conservati a secco ed altri in alcool, e tutti presentano un colore generale del corpo isabellino, che non si osserva mai sullo scuto mesotoracico, sul metanoto e sul mesosterno degli esemplari tipici di *Dacus oleae*. I caratteri morfologici, almeno

quelli esteriori, sono invece uguali tanto nella femmina che nel maschio a quelli della forma tipica di *Dacus oleae*; per questa ragione ritengo gli esemplari di *Dacus oleae* dell' India come una semplice varietà.

Opius ponerophagus sp. n.

Femmina. Corpo di colore ferrugineo o testaceo ferrugineo con le parapsidi di colore fulvo più o meno scuro, con la parte posteriore del terzo segmento e l'anteriore e la posteriore dei segmenti 4-6 dell'addome di colore bruno; antenne, eccettuata la parte prossimale dello scapo che è del colore

Opius ponerophagus: 1, capo visto di fronte; 2, metanoto e propodeo; 3, ala anteriore e posteriore.

del capo, di colore fulvo-bruno; antenne ialine con lo stigma e le nervature maggiori di colore baio o rosso mattone; zampe del colore del corpo, quelle posteriori sulla parte dorsale distale della tibia e sui tarsi leggermente imbrunite, pretarsi nerastri.

Lunghezza del corpo mm. 3, larghezza del torace 0,8, lunghezza delle antenne 4, dell'ala anteriore 3,5, larghezza della stessa 1,35, lunghezza dell'ovopositore (parte sporgente) 1.

Capo (fig. 1) più largo del torace, poco più di un terzo più largo che alto, provvisto di occhi grandi giungenti in basso a livello del margine posteriore del clipeo, subnudi; faccia nel mezzo, dai fori antennali in basso, leggermente carenata. Antenne un poco più lunghe del corpo, alquanto assottigliate, composte di 35 articoli, dei quali lo scapo è circa un terzo più lungo del secondo articolo.

Torace. Scuto mesotoracico liscio, fornito di poche e brevi setole e di solchi parapsidali poco profondi anteriormente, appena accennati nel resto;

solco trasverso prescutellare con una serie trasversale di 6 fossette; metanoto leggermente carenato nel mezzo sulla parte anteriore; propodeo (fig. 2) fornito di due carene posteriori convergenti tra di loro a poca distanza dal margine posteriore e continuanti in una carena mediana che va scomparendo alla parte anteriore, ai lati di essa, o della superficie che la continua, esistono due serie di fossette; esso è fornito anche di due carene sublaterali, a lato interno delle quali, a livello degli stigmi, esistono poche fossette; le superficie submediane del propodeo sono lisce o quasi; gli stigmi sono piuttosto piccoli e rotondeggianti. Ali anteriori (fig. 3) con la discoidale più piccola della prima cubitale, seconda cubitale lunga e stretta.

Addome subovale col primo tergite leggermente carenato ai lati e rugoso nel mezzo, i seguenti lisci e forniti di un piccolo numero di setole brevi. Ovopositore più corto dell'addome e diretto in dietro e molto leggermente in alto.

Maschio simile alla femmina con antenne composte di 36-37 articoli.

Habitat. India settentrionale-occidentale: Cherat. Parassita di *Dacus oleae* var. *asiatica* Silv.

Osservazione. — Questa specie di *Opius* è molto vicina all'*O. concolor* Szèpl. ed all'*O. dacicida* Silv., ma si può distinguere oltre che per piccole differenze di colore, per il propodeo liscio, o quasi, sulle superficie submediane e per la discoidale e la seconda cubitale più strette.

Matematica. — *Sulla soluzione generale di una classe di equazioni di composizione.* Nota II di Giulio Andreoli, presentata dal Socio V. Volterra [1].

In una precedente Nota, abbiamo assegnata la forma generale delle soluzioni dell'equazione di composizione:

$$\text{(A)} \qquad \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) = a_1 n + a_2 \overset{\times\times}{n^2} + \cdots a_m \overset{\times\times}{n^m} = 0 \,,$$

ove le a sieno delle costanti, nell'ipotesi che l'equazione algebrica

$$\text{(1)} \qquad f(\xi) = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots + a_m \xi^m = 0$$

avesse tutte radici distinte (e che in conseguenza fosse $a_1 \neq 0$).

In questa Nota assegneremo la forma generale della soluzione nel caso che la (1) ammetta radici multiple.

1. Supponiamo dapprima che la (1) non abbia come radice multipla il valore $\xi = 0$: e che quindi sia ancora $a_1 \neq 0$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

Potremo segnare allora

$$f(\xi) = \xi(\xi - \alpha)^r (\xi - \beta)^s (\xi - \gamma)^t \ldots (\xi - \mu)^r ; \tag{2}$$

poniamo inoltre

$$\begin{cases} f_1(\xi) = \dfrac{f(\xi)^r}{(\xi - \alpha)^r} = \xi(\xi - \beta)^s (\xi - \gamma)^t \ldots \\ f_2(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{(\xi - \beta)^s} = \xi(\xi - \alpha)^r (\xi - \gamma)^t \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Poniamo poi

$$\overset{\times\times}{f}_1(\overset{\times\times}{n}) = \chi_1^{(0)} \quad ; \quad \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) = \chi_2^{(0)} , \ldots$$

ed inoltre

$$\begin{cases} (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^\rho \overset{\times\times}{f}_1(\overset{\times\times}{n}) = \chi_1^{(\rho)} \\ (\overset{\times\times}{n} - \beta)^\rho \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) = \chi_2^{(\rho)} . \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{3}$$

Si può subito osservare che in conseguenza delle (2) e di (A) sarà

$$\chi_1^{(\rho)} = 0 \quad \text{se} \quad \varrho \geq r \quad ; \quad \chi_2^{(\rho)} = 0 \quad \text{se} \quad \varrho \geq s \, ; \ldots$$

Inoltre tutte le χ devono essere permutabili fra loro, perchè si esprimono come combinazioni lineari a coefficienti costanti delle potenze di composizione di n.

Formiamo ora la tabella di moltiplicazione delle χ.

È evidente che noi possiamo scrivere identicamente

$$\begin{cases} \overset{\times\times}{f}_1(\overset{\times\times}{n}) = f_1(\alpha) + (n - \alpha) \dfrac{f_1'(\alpha)}{1!} + (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^2 \dfrac{f_1''(\alpha)}{2!} + \cdots \\ \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) = f_2(\alpha) + (n - \beta) f_1'(\beta) + (\overset{\times\times}{n} - \beta)^2 \dfrac{f_2''(\beta)}{2!} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{4}$$

Si avrà quindi:

$$\overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(p)} \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(q)} = (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^p \overset{\times\times}{f}_1(\overset{\times\times}{n}) \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(q)} = (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^q \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(p)} ,$$

e quindi sostituendo alla $\overset{\times\times}{f}_1(\overset{\times\times}{n})$ il suo sviluppo dedotto dalla (4) e tenendo conto delle (3), si trae, anche per le altre $\chi_2, \chi_3, \ldots$

$$\begin{cases} \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(p)} \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(q)} = f_1(\alpha)\, \chi_1^{(p+q)} + \dfrac{f_1'(\alpha)}{1!} \overset{\times\times}{\chi}{}_2^{(p+q+1)} + \cdots \\ \overset{\times\times}{\chi}{}_2^{(p)} \overset{\times\times}{\chi}{}_2^{(q)} = f_2(\beta)\, \chi_2^{(p+q)} + \dfrac{f_2'(\beta)}{1!} \overset{\times\times}{\chi}{}_2^{(p+q+1)} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{5}$$

ove $f_1(\alpha) . f_2(\beta) , f_3(\gamma) , \ldots$ sono tutte diverse da zero.

D'altra parte si ha anche

$$\overset{\times\times}{\chi_1^{(p)}}\,\chi_2^{(q)} = (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^p\, \overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\, \overset{\times\times}{\chi_2^{(q)}} = (\overset{\times\times}{n} - \beta)^q\, \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n})\, \overset{\times\times}{\chi_1^{(p)}} =$$

$$= (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^p\, (\overset{\times\times}{n} - \beta)^q\, \overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\, \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) :$$

ma, è facile vedere che si può porre

$$\begin{cases} \overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) = (\overset{\times\times}{n} - \beta)^s\, \overset{\times\times}{f_{12}}(\overset{\times\times}{n}) \\ \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^r\, \overset{\times\times}{f_{12}}(\overset{\times\times}{n}) \\ \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) = (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^r\, (\overset{\times\times}{n} - \beta)^s\, \overset{\times\times}{f_{12}}(\overset{\times\times}{n}), \end{cases}$$

e quindi avremo

$$\overset{\times\times}{\chi_1^{(p)}}\,\overset{\times\times}{\chi_2^{(q)}} = (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^p\, (\overset{\times\times}{n} - \beta)^q\, (\overset{\times\times}{n} - \alpha)^r\, (\overset{\times\times}{n} - \beta)^s\, [\overset{\times\times}{f_{12}}(\overset{\times\times}{n})]^2 =$$

$$= \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n})\, [(\overset{\times\times}{n} - \alpha)^p\, (\overset{\times\times}{n} - \beta)^q\, \overset{\times\times}{f_{12}}(\overset{\times\times}{n})] = 0\,.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per indici qualunque, avremo

$$(5^{bis}) \qquad \chi_h^{(p)}\,\chi_k^{(q)} = 0 \qquad (h \neq k)\,.$$

2. Scelto ora una qualunque soluzione della (A) i nuclei χ soddisfano alle (5), (5^{bis}). Si vede poi, che dato un sistema di nuclei χ soddisfacenti alle (5), (5^{bis}), essendo le χ combinazioni lineari delle potenze della n, se ne ricava reciprocamente che la n, se esiste, deve essere una combinazione lineare delle χ, a coefficienti costanti ed indipendenti dalla particolare scelta del sistema χ. Bisogna inoltre dimostrare che effettivamente scelto un qualunque sistema χ e formata quella combinazione lineare ora detta, si ottiene una soluzione. Questa sarà evidentemente la soluzione generale della (A).

Cominciamo anzitutto dall'osservare che, in virtù delle (5^{bis}), si ha successivamente

$$(6) \qquad \begin{cases} n = \Sigma a_\rho \chi_1^{(\rho)} + \Sigma b_\rho \chi_2^{(\rho)} + \cdots = \nu_1 + \nu_2 + \cdots \\ \overset{\times\times}{n^2} = \{\Sigma a_\rho \overset{\times\times}{\chi_1^{(\rho)}}\}^2 + \{\Sigma b_\rho \overset{\times\times}{\chi_2^{(\rho)}}\}^2 + \cdots \\ \overset{\times\times}{n^3} = \{\Sigma a_\rho \overset{\times\times}{\chi_1^{(\rho)}}\}^3 + \{\Sigma b_\rho \overset{\times\times}{\chi_2^{(\rho)}}\}^3 + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ed anche:

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) = \overset{\times\times}{f}(\Sigma a_\rho \chi_1^{(\rho)}) + \overset{\times\times}{f}(\Sigma b_\rho \chi_2^{(\rho)}) + \cdots = \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{\nu_1}) + \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{\nu_2}) + \cdots$$

Ora, per le (5), $\overset{\times\times}{f}(\Sigma a_\rho \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(\rho)})$ non è altro che una certa combinazione lineare delle $\overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(\rho)}$, e così le altre.

Bisogna dunque avere:

$$[\Sigma A_\rho \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(\rho)}] + [\Sigma B_\rho \overset{\times\times}{\chi}{}_2^{(\rho)}] + \cdots = 0$$

con A, B costanti.

Questa non può essere soddisfatta che solo se si ha:

$$\begin{cases} \Sigma A_\rho \chi_1^{(\rho)} = \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{\nu}_1) = 0 \\ \Sigma B_\rho \chi_2^{(\rho)} = \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{\nu}_2) = 0 . \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Basta infatti moltiplicarla successivamente per $\chi_1^{(0)}, \chi_1^{(1)}, \ldots$ perchè spariscano tutti i termini contenenti le $\chi_2, \chi_3, \ldots$

Resta quindi:

$$(7) \qquad \begin{aligned} &[\Sigma_\rho A_\rho \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(\rho)}] \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(\sigma)} = 0 \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots) \\ &[\Sigma\ B_\rho \overset{\times\times}{\chi}{}_2^{(\rho)}] \overset{\times\times}{\chi}{}_2^{(\sigma)} = 0 \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots). \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Queste portano come conseguenza $A_\rho = 0$, $B_\rho = 0, \ldots$ Infatti, se ad esempio A_ρ fosse quella fra le A diverse da zero avente l'indice più basso, basterebbe considerare la equazione (7) corrispondente a $\sigma = r - \varrho + 1$: per avere subito

$$A_{\rho+1} \cdot \chi_1^{(r-1)} = 0 ,$$

e quindi $A_{\rho+1} = 0$ in contraddizione con l'ipotesi.

3. Quindi in luogo di studiare la soluzione generale noi ci fermiamo a studiare quella particolare dedotta dal sistema delle χ_1 (supponendo quindi nulle le $\chi_2, \chi_3, \ldots$).

Le χ_1 soddisfano al quadro di moltiplicazione

$$(8) \qquad \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(p)} \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(q)} = f_1(\alpha) \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(p+q)} + \frac{f_1'(\alpha)}{1!} \overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(p+q+1)} + \cdots$$

È facile vedere che esiste una combinazione

$$\xi_1^{(p)} = \alpha_0 \chi_1^{(p)} + \alpha_1 \chi_1^{(p+1)} + \cdots$$

tale che

$$\xi_1^{(p)} \xi_1^{(q)} = \xi_1^{(p+q)} .$$

Infatti dalle (8) si trae, mutando q in $q+h$, moltiplicando per le α_h e sommando

$$\overset{\times\times}{\chi}{}_1^{(p)} \overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(q)} = f_1(\alpha) \overset{\times\times}{\xi}{}^{(p+q)} + \frac{f(\alpha)}{1!} \overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(p+q+1)} + \cdots$$

e quindi ancora, facendo variare p e sommando dopo aver moltiplicato per le h:

$$\overset{\times\times}{\xi}{}_1^{p} \overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(q)} = f_1(\alpha)\, \alpha_0 \overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(p+q)} + \left(\frac{f'(\alpha)}{1!} \alpha_0 + \frac{f(\alpha)}{1} \alpha_1 \right) \overset{\times\times}{\xi}{}^{(p+q+1)} +$$
$$+ \left(\frac{f''(\alpha)}{2!} \alpha_0 + \frac{f'(\alpha)}{1!} \alpha_1 + \frac{f(\alpha)}{1} \alpha_2 \right) \overset{\times\times}{\xi}{}^{(p+q+1)} + \cdots$$

da cui si possono ricavare le $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$

Reciprocamente si vede che le χ si possono esprimere linearmente mediante le ξ con la formola analoga

$$\chi_1^{(p)} = \omega_0\, \xi^{(p)} + \omega_1\, \xi_1^{(p+1)} + \cdots$$

Quindi segue che la ν_1 si esprimerà linearmente mediante le ξ_1, la ν_2 con le ξ_2 ecc., e quindi la n mediante tutte le ξ.

Le ξ si riducono allora ad avere un quadro di moltiplicazione molto semplice: cioè

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} [\overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(0)}]^2 = \xi_1^{(0)} \; ; \; \overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(0)} \overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(1)} = \overset{\times}{\xi}{}_1^{(1)} \; ; \; \xi^{(p)} = \overset{\times\times}{\xi}{}^{p} \; ; \; \overset{\times\times}{\xi}{}^{r} = 0 \\ (\overset{\times\times}{\xi}{}_2^{(0)})^2 = \xi_2^{(0)} \; ; \; \xi_2^{(0)}\, \xi_2^{(1)} = \xi_1^{(1)} \; ; \; \xi_2^{(p)} = \overset{\times\times}{\xi}{}_2^{p} \; ; \; \overset{\times\times}{\xi}{}_2^{s} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{\times\times}{\xi}{}_h^{(p)} \overset{\times\times}{\xi}{}_k^{(q)} = 0 \qquad\qquad (h \mp k). \end{array} \right.$$

Da queste equazioni ne segue che le $\xi_h^{(0)}$ sono nuclei di Lalesco.

Quindi essi sono della forma $\Sigma \varphi_i(x)\, \psi_i(y)$ con φ e ψ formanti sistema biortogonale.

Inoltre, tenuto conto che

$$\overset{\times\times}{\xi}{}_h^{(0)} \overset{\times\times}{\xi}{}_h^{(1)} = \overset{\times\times}{\xi}{}_h^{(1)} = \overset{\times\times}{\xi}{}_h^{(1)} \overset{\times\times}{\xi}{}_h^{(0)},$$

si deduce subito che

$$\Sigma \varphi_i(x) \int \psi_i(s)\, \xi_h^{(1)}(sy)\, ds = \xi^{(1)}(xy)$$

$$\Sigma \int \xi_h^{(1)}(xs)\, \varphi_i(s)\, ds \cdot \psi_i(y)\, ds = \xi_h^{(1)}(xy),$$

da cui ne segue che:

$$\xi_h^{(1)}(xy) = \Sigma\, a_{ij}^{(h)}\, \varphi_i(x)\, \psi_j(y)\,.$$

Si nota poi subito che

$$\overset{\times\times}{\xi}{}_h^{(\rho)}(xy) = \Sigma\, a_{ij}^{(h,\rho)}\, \varphi_i(x)\, \psi_j(y)\,,$$

ove fra le matrici $A^{(h)} = \|a_{ij}^{(h)}\|$, $A^{(h,\rho)} = \|a_{ij}^{(h,\rho)}\|$ sussiste la relazione:

$$\|A^{(h,\rho)}\| \equiv \|A^{(h)}\|^{\rho}\,.$$

Quindi, per essere $\overset{\times\times}{\xi}{}_1^r = 0$, dovrà essere $\|A^{(1)}\|^r \equiv \|0\|$; e così $\|A^{(2)}\|^s \equiv$ $\equiv \|0\|$ ecc.

Ora il nucleo ν_1 (e analogamente $\nu_2, \nu_3, \ldots$) si presenta sotto la forma

$$\nu_1 = \alpha_{10}\, \xi_1^{(0)} + \alpha_{12}\, \xi_1 + \alpha_{12}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_1^2 + \cdots + \alpha_{1r}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_2^r\,.$$

Ma

$$f_1(\nu_1) = \overset{\times\times}{f}_1(\alpha_{10}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(0)} + \alpha_{11}\, \xi_1 + \alpha_{12}\, \overset{\times\times}{\xi}_2 + \cdots) =$$

$$= \overset{\times\times}{f}_1(\alpha_{10}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(0)}) + \frac{\overset{\times\times}{f}{}_1^1(\alpha_{10}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_0^0)}{1!}(\alpha_{11}\, \overset{\times\times}{\xi}_1 + \alpha_{12}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_1^2 + \cdots) +$$

$$+ \frac{\overset{\times\times}{f}{}_1''(\alpha_{10}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_1^0)}{2!}(\alpha_{11}\, \overset{\times\times}{\xi}_1 + \alpha_{12}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_1^2 + \cdots)^2 + \cdots;$$

e si vede subito che

$$\overset{\times\times}{\varphi}(\alpha_{10}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_1^{(0)}) \cdot (\alpha_{11}\, \overset{\times\times}{\xi}_1 + \cdots)^{\rho} = \varphi(\alpha_{10}) \cdot (\alpha_{11}\, \overset{\times\times}{\xi}_1 + \cdots)^{\rho}\,.$$

Si ha quindi

$$f(\nu_1) = f(\alpha_{10})\, \xi_1^0 + f_1'(\alpha_{10})\, (\alpha_{11}\, \overset{\times\times}{\xi}_1 + \cdots) + f_1''(\alpha_{10})\, (\alpha_{11}\, \overset{\times\times}{\xi}_1 + \cdots)^2 + \cdots$$

Si può subito notare una combinazione lineare delle ξ non può essere mai identicamente nulla e che inoltre:

$$(\alpha_{11}\, \overset{\times\times}{\xi}_1 + \alpha_{12}\, \overset{\times\times}{\xi}{}_1^2 + \cdots)^{r+l} = 0 \qquad (l \geq 0).$$

Occorre quindi che:

$$f_1(\alpha_{10}) = f_1'(\alpha_{10}) \ldots f_1^{(r-1)}(\alpha_{10}) = 0\,.$$

Ossia α_{10} deve essere proprio la radice α_1 e le altre α devono essere arbitrarie.

4. Nel caso poi che fosse $a_1 = a_2 = \cdots a_l = 0$; $a_{l+1} \neq 0$, con un ragionamento analogo a quelli fatti finora, si vedrebbe comparire un nucleo Ω ortogonale a tutte le g, e tale che $\overset{\times\times}{\Omega}{}^l = 0$.

Quindi chiamati $g', g'', g''', \ldots$ *dei nuclei di Lalesco; definite le matrici*

$$\|a_{hk}^{(1)}\| \equiv A_1 \; ; \; \|A_1\|^r \equiv \|0\|$$

$$\|a_{hk}^{(2)}\| \equiv A_2 \; ; \; \|A_2\|^s \equiv \|0\|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Chiamati $\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2, \ldots$ *i nuclei*

$$\Sigma a_{hk}^{(1)} \varphi'_h(x) \psi'_k(y) \,,\; \Sigma a_{hk}^{(2)} \varphi''_h(x) \psi''(y), \ldots$$

la soluzione generale della (A) *è data da*

$$[\alpha g' + \beta g'' + \gamma g''' + \cdots] + \Sigma \alpha_{pq} \overset{\times\times}{\boldsymbol{\Gamma}}{}_p^q + \Omega$$

con le α. *costanti arbitrarie.*

Per $l = r = s = \cdots = u = 1$ si ritrovano i risultati della Nota precedente.

Meccanica Celeste. — *Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno* [1]. Nota II di G. Armellini, presentata dal Corrispondente A. Di Legge [2].

1. Come fu detto nella Nota I, noi ci proponiamo di ricercare se le perturbazioni secolari del satellite di Nettuno possano essere spiegate ammettendo l'esistenza di un secondo satellite rimasto ancora sconosciuto a cagione della sua piccola massa. A tale scopo indichiamo con P il piano invariabile del sistema formato da Nettuno e dai due satelliti, l'osservato e l'ipotetico, e scegliamo come unità fondamentali il giorno solare medio, il semidiametro equatoriale, e la massa del pianeta. Chiamiamo poi con K^2, m, n, a, p, e, i, ω il coefficiente attrattivo, la massa, il moto e la distanza media, il parametro, l'eccentricità, l'inclinazione e il modo ascendente del satellite *noto*, indicando con le stesse lettere accentate m', n' ecc. i corrispondenti elementi relativi al satellite *sconosciuto*.

Assumeremo il senso delle rotazioni in modo che n risulti positiva, e conteremo le inclinazioni ed i nodi assumendo P come piano fondamentale.

2. Osserviamo che noi possiamo sempre supporre che anche n' sia positiva essendo $i < \frac{\pi}{2}$, il moto di m' sarà diretto o retrogrado secondo che si ha

$$i' < \frac{\pi}{2} \quad \text{oppure} \quad i' > \frac{\pi}{2}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1916.

(2) Rendiconti, serie 5ª, vol. XXIV, 1° sem., 1915, pag. 569.

2. Con tale scelta, a cagione del teorema di Jacobi, avremo intanto l'equazione

$$\omega = \omega' + \pi \tag{1}$$

coincidendo in ogni istante il nodo ascendente della prima orbita su P, col nodo discendente della seconda. Adoperando poi i simboli dello Charlier [1] avremo l'altra equazione

$$\beta \sqrt{p} \operatorname{sen} i = \beta' \sqrt{p'} \operatorname{sen} i' \tag{2}$$

con [2]

$$\beta = \frac{Km}{\sqrt{1+m}} \quad , \quad \beta' = \frac{Km'}{\sqrt{1+m'}} \tag{3}$$

od anche, essendo m ed m' certamente assai piccole rispetto all'unità (massa di Nettuno),

$$\beta = Km \qquad \beta' = Km' . \tag{3^{bis}}$$

3. Le (1) e (2) sono matematicamente esatte; ma *se noi ci limitiamo alle sole perturbazioni secolari di primo ordine* (le uniche importanti, giacchè le uniche che fino ad oggi siano date dalle osservazioni), potremo ancora asserire che le inclinazioni i ed i' restano costanti [3] e che la comune linea dei nodi delle due orbite su P si muove con moto retrogrado uniforme [4].

Ora le osservazioni ci dicono [5] che il polo dell'orbita del satellite noto si muove con velocità costante descrivendo sulla sfera celeste un cerchio avente per centro un certo punto Q. Concludiamo quindi affermando che nell'ipotesi, in cui ci siamo posti, *il piano invariabile del sistema* formato da Nettuno e dai due satelliti, ha per polo Q, cioe *è precisamente quel piano che nella teoria del Tisserand viene assunto come piano equatoriale di Nettuno.*

4. Per procedere più oltre distingueremo tre casi, secondo che si ha $a' = a$, $a' > a$, $a' < a$. Nella presente Nota comincieremo a esaminare i due primi, rimandando alla successive il terzo caso e i calcoli numerici.

5. Caso I: $a' = a$. L'equazione (2), servendoci delle (3^{bis}), diviene

$$\frac{m'}{m} = \sqrt{\frac{p}{p'}} \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} i'} = \frac{\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i}{\sqrt{1-e'^2} \operatorname{sen} i'} \tag{4}$$

(1) Ved. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, Bd. I, 274.

(2) Id. id., I, 344.

(3) Id. id., I, 360.

(4) Id. id., I, 361.

(5) G. Armellini, *Ricerche sopra le perturb. del satellite di Nettuno*, Nota I, in questi Rendiconti, seduta del 21 marzo 1915.

donde

$$\frac{m'}{m} \geq \left| \sqrt{1-e^2}\ \mathrm{sen}\, i \right| . \tag{5}$$

Essendo $e = 0{,}007$ ed i certamente maggiore di 16°, come vedemmo nella I Nota, abbiamo in cifra tonda

$$\frac{m'}{m} > \frac{1}{4} . \tag{6}$$

Se ne conclude che l'ipotesi $a = a'$ è inammissibile, giacchè in tal caso il satellite perturbatore, avendo una massa certamente superiore alla quarta parte di quella del satellite noto, e conservando la stessa distanza media da Nettuno, non potrebbe essere sfuggito alle nostre osservazioni.

Risulta pure da quest'esame che il rapporto $\frac{a}{a'}$ non può essere molto vicino all'unità. Osserviamo passando che per $a' < a$ la (6) è valida a maggior ragione; però allora se il satellite è troppo vicino al pianeta, le sue condizioni di visibilità potrebbero essere difficilissime. L'ipotesi $a' < a$ non può quindi escludersi *a priori*.

6. Caso II: $a' > a$. Posto $\frac{a}{a'} = \alpha$ si ha $\alpha < 1$: noi ci proponiamo di determinare il valore da assegnare ad α affinchè m' risulti minima.

In questa Nota cominceremo dallo studiare il caso in cui si supponga i' sufficientemente piccolo, p. es. $0 \leq i \leq 30°$ e in cui e' sia trascurabile. È chiaro che è questo il caso astronomicamente più importante; giacchè le orbite dei satelliti sono in generale poco eccentriche, hanno deboli inclinazioni le une rispetto alle altre e i moti hanno lo stesso senso. Passeremo poi al caso generale.

Con queste ipotesi semplificative potremo abbreviare i calcoli, usando le formole date dallo Charlier nel I volume della sua *Mecc. Celeste.*

Poniamo con lo Charlier [1]

$$\lambda(\alpha) = \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2 \mathrm{sen}^2\theta}\, d\theta - \frac{1}{1-\alpha^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 \mathrm{sen}^2\theta}} \tag{7}$$

$$x_1 = \frac{m'}{\pi}\, \lambda(\alpha) \sqrt[3]{n\, n'^2} \quad ; \quad x'_1 = \frac{m\, n'}{\pi}\, \lambda(\alpha) \tag{8}$$

dove si ha

$$\alpha = \frac{a}{a'} = \sqrt[3]{\frac{n'^2}{n^2}} . \tag{9}$$

[1] Op. cit., I, pp. 348 e 346.

L'equazione del moto secolare della linea dei nodi ([2])

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega'}{dt} = -(x_1' + x_1') \tag{10}$$

diviene allora

$$\gamma = \left\{ m' \sqrt[3]{\frac{n'^2}{n^2}} + m \frac{n'}{n} \right\} \lambda(\alpha) \tag{11}$$

dove

$$\gamma = -\frac{\pi}{n} \frac{d\omega}{dt} \tag{12}$$

è una *quantità positiva nota*, essendo conosciuto dall'osservazione il movimento retrogrado dei nodi $\frac{d\omega}{dt}$.

Notiamo di passaggio che nella formola (11) dello Charlier, γ non tende a zero con m o con m'. L'apparente difficoltà si spiega pensando che quando p. es. m' diminuisce, il piano invariabile P si approssima sempre più al piano dell'orbita di m, onde un piccolo spostamento di quest'ultimo ne produce uno grandissimo nella linea dei nodi. Quando poi m' è zero, i due piani coincidono e γ non ha più senso.

Dalla (11) ricaviamo:

$$m' = \sqrt[3]{\frac{n^2}{n'^2}} \left\{ \frac{\gamma}{\lambda(\alpha)} - m \frac{n'}{n} \right\}, \tag{13}$$

che derivata rispetto ad n', tenendo presente la (9), dà:

$$\frac{dm'}{dn'} = -\sqrt[3]{\frac{n^2}{n'^2}} \left\{ \frac{m}{3n} + \frac{2\gamma}{3n'\lambda(\alpha)} + \frac{2\gamma}{3n'\lambda^2(\alpha)} \frac{d\lambda}{d\alpha} \sqrt[3]{\frac{n'^2}{n^2}} \right\}. \tag{14}$$

Se supponiamo, come abbiamo già detto, che l'eccentricità e' del satellite incognito sia trascurabile. la (2) diviene, poichè anche e è estremamente piccola,

$$m\sqrt{a} \operatorname{sen} i = m'\sqrt{a'} \operatorname{sen} i' \tag{15}$$

da cui, servendoci della (13) e della (9) ricaviamo

$$\frac{1}{2} \geq |\operatorname{sen} i'| = \left| \frac{m}{m'} \sqrt[3]{\frac{n'}{n}} \operatorname{sen} i \right| = \left| \frac{m \operatorname{sen} i}{\frac{\gamma n}{n'\lambda(\alpha)} - m} \right|. \tag{16}$$

([1]) Op. cit. I, pag. 361.

7. Prima di andare innanzi, dimostriamo una proprietà della funzione $\lambda(\alpha)$ che ci sarà utile tra breve. Servendoci dell' ineguaglianza

$$(17) \qquad (1-\alpha^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\, d\vartheta ,$$

la (7) ci dà immediatamente

$$(18) \qquad \lambda(\alpha) > \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} ,$$

la quale ci mostra che $\lambda(\alpha)$ è funzione positiva per α compreso fra 0 ed 1, e tende a ∞ quando α tende ad 1.

Derivando la (7) ed eseguendo alcune riduzioni abbiamo poi:

$$(19) \qquad \alpha(1-\alpha^2)^3 \frac{d\lambda}{d\alpha} = (\alpha^4 + 6\alpha^2 + 1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\, d\vartheta -$$

$$- 4\alpha^2(1-\alpha^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} - (1-\alpha^2)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} .$$

Utilizzando ora la (17) e l' ineguaglianza:

$$(20) \qquad (1-\alpha^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} ;$$

la (19) ci dà

$$(21) \qquad \frac{d\lambda}{d\alpha} > \frac{2\alpha + \alpha^3}{(1-\alpha^2)^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\, d\vartheta ,$$

la quale ci mostra che $\frac{d\lambda}{d\alpha}$ è positiva per $0 \leq \alpha \leq 1$ e tende ad ∞ quando α tende ad 1. Ne risulta che $\lambda(\alpha)$ è una funzione crescente dell'argomento. Osserveremo ancora che $\lambda(\alpha)$ ed n' si annullano contemporaneamente. Infatti, se si ha $n' = 0$ ne segue $\alpha = 0$ e quindi $\lambda(\alpha) = 0$. Viceversa a $\lambda(\alpha) = 0$ corrisponde $\alpha = 0$ e quindi $n' = 0$.

8. Tornando al nostro problema affinchè la (16) sia verificata. occorre che si abbia

$$(22) \qquad \frac{\gamma n}{m(1+2 \operatorname{sen} i)} \geq n' \lambda(\alpha) .$$

È facile vedere che se la (22) è soddisfatta, la (13) dà certamente per m' un valore positivo.

Se si avesse $\gamma = 0$, uno dei due fattori λ o n' (e quindi tutti e due come abbiamo visto) si annullerebbe. Ne risulterebbe allora $\alpha = 0$, $a' = \infty$: cioè il satellite perturbatore sarebbe infinitamente lontano. Non si ha $m' = 0$, giacchè, come si è detto, a questo caso non corrisponde $\gamma = 0$.

Ciò posto, la (14) ci dice che m' è funzione decrescente di n': quindi il minimo valore di m' corrisponderà al massimo valore di n' ammissibile compatibilmente con la (22). Ora $\lambda(\alpha)$ è funzione crescente di α, e quindi, per la (9), di n'; chiamando dunque con ν il massimo valore ammissibile per n', e con λ_1 ciò che diviene λ quando si fa $n' = \nu$ avremo dalla (22)

$$\nu\lambda_1 = \frac{\gamma n}{m(1 + 2 \operatorname{sen} i)} . \tag{23}$$

La (23) è una equazione trascendente contenente la sola incognita ν: *per quanto si è detto su λ, essa ammetterà certamente una ed una sola radice reale positiva*. Risolvendola numericamente troveremo ν: sostituendo quindi nella (13) e chiamando con μ il minimo valore possibile per la massa del satellite ignoto, otteniamo:

$$\frac{\mu}{m} = 2 \sqrt[3]{\frac{\nu}{n}} \operatorname{sen} i . \tag{24}$$

La (15) ci dà allora come valore dell'inclinazione $i' = 30°$.
Vediamo quindi che il problema ammette una ed una sola soluzione.

Nelle prossime Note esamineremo il terzo caso ed eseguiremo i calcoli numerici.

Fisica. — *Sulla caratteristica dell'arco cantante nei regimi cui corrispondono diverse emissioni spettrali* [1]. Nota I di Elena Freda e Nella Mortara, presentata dal Socio Blaserna.

1. Primo scopo di questa breve ricerca è stato quello di studiare, per mezzo di un tubo Braun munito di elettrodi piani per la deviazione elettrostatica dei raggi catodici, come e perchè varia la caratteristica dell'arco cantante (cioè la curva che dà la relazione fra la corrente che attraversa l'arco e la tensione ai poli del medesimo), quando si facciano variare, nel noto dispositivo di Duddel, l'intensità della corrente nel circuito principale, la distanza dei carboni, la capacità e l'induttanza del circuito derivato.

La forma delle correnti di Duddel, al variare delle condizioni dette, è stata studiata fin dal 1903 dal prof. Corbino [2].

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

[2] Corbino, *Sul meccanismo di produzione delle correnti di Duddel.* Atti Assoc. Elettrotecnica Ital., 1903, pag 597. Science Abstracts, VII, 1904, pag. 798, n. 2664.

Nel caso di oscillazioni di prima specie (regime sinusoidale dell'arco cantante), Simon [1] ha dedotto la caratteristica dell'arco dalle curve rappresentanti la corrente e la tensione ottenute, in condizioni diverse, per mezzo di un oscillografo; Blondel [2], pure per mezzo di un oscillografo, ha studiato la forma della corrente nell'arco cantante e della tensione ai poli di quest'ultimo, tanto nel caso di oscillazioni di prima specie, quanto nel caso di oscillazioni di seconda specie (regime tronco-sinusoidale).

Dagli oscillogrammi di Blondel potrebbe dedursi la caratteristica dell'arco cantante nelle diverse condizioni corrispondenti sia al regime sinusoidale, sia a quello tronco-sinusoidale; però, osservando tali oscillogrammi e specialmente quelli che si riferiscono al secondo regime, si vede che, a causa delle brusche variazioni della tensione ai poli dell'arco, facilmente possono commettersi errori non lievi nella determinazione, in ogni istante, dei valori contemporanei della corrente e della tensione. Non è quindi possibile dedurre conseguenze sicure, per ciò che riguarda l'isteresi e la potenza spesa nell'arco nei diversi istanti della scarica. Questi inconvenienti sono evitati quando si studî direttamente la caratteristica dell'arco per mezzo di un tubo Braun; inoltre, dalla assoluta mancanza di inerzia del pennello catodico, deriva una maggiore veridicità del diagramma.

Con lo studio della caratteristica dell'arco cantante abbiamo anche cercato di portare qualche luce su un punto della controversia sorta tra i professori La Rosa e Occhialini [3], a proposito della trasformazione, osservata dal primo, dello spettro d'arco in spettro di scintilla all'aumentare della capacità e al diminuire della induttanza del circuito derivato.

La Rosa, basandosi sul fatto che alla variazione graduale degli elementi elettrici, induttanza e capacità, corrisponde una trasformazione graduale spettrografica, sostiene che i fenomeni di scarica a cui corrispondono rispettivamente lo spettro d'arco e lo spettro di scintilla non sono che due termini di una successione continua di forme di scarica. Secondo La Rosa, il parametro da cui dipende il passaggio dall'una all'altra forma di scarica è la potenza specifica media spesa nella scarica stessa.

Secondo Occhialini, tutte le forme iniziali e transitorie di scarica, che preparano la via alla forma stabile di conduzione detta arco, hanno fra loro caratteri comuni: i caratteri iniziali del fenomeno comunemente chiamato scintilla. Queste fasi iniziali e transitorie di scarica, alle quali Occhialini

[1] Simon, *Zur Theorie des selbsttönenden Lichtbogens*. Physikal. Zeitschr., 1906, VII. pag. 433.

[2] Blondel, *Sur les phénomènes de l'arc chantant*. Éclairage électrique, 1905, XLIV, pp. 41 e 81.

[3] La Rosa, Memorie Accad. Lincei, 1908, VII. pag. 452; Occhialini, Nuovo Cimento, 1914, VII, pag. 365; La Rosa, Rend. Accad. Lincei, 1° sem. 1915, pag. 234; Occhialini, Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1915, pag. 425.

riserba il nome di scintilla, dovrebbero considerarsi come un unico fenomeno, ben diverso da quello che prende il nome di arco. Al primo fenomeno corrisponderebbe lo spettro di alta eccitazione o spettro di scintilla, al secondo lo spettro d'arco. Le forme di scarica osservate da La Rosa nel suo studio sull'arco cantante sarebbero archi, quando ad esse corrisponde uno spettro d'arco; sarebbero scintille (nel senso che Occhialini dà a questa parola) quando ad esse corrisponde uno spettro di scintilla. La trasformazione spettrografica graduale osservata da La Rosa non dovrebbe spiegarsi ammettendo che arco e scintilla siano due gradazioni di uno stesso processo, ma ammettendo che i due fenomeni, ben distinti fra loro, possano accompagnarsi, e l'uno possa, al variare delle condizioni nelle quali la scarica avviene, divenire meno rilevante o anche trascurabile rispetto all'altro.

Con lo studio della caratteristica dell'arco cantante abbiamo voluto risolvere le seguenti questioni:

1ª. Alla trasformazione spettrografica continua osservata da La Rosa corrisponde o no una trasformazione continua del fenomeno elettrico? (Quest'ultimo è completamente individuato dalla caratteristica).

2ª. Le caratteristiche dell'arco cantante corrispondenti a condizioni in cui si ottiene rispettivamente uno spettro d'arco o uno spettro di scintilla, sono simili o presentano sempre differenze tali da permettere di considerare come processi del tutto distinti le scariche a cui corrispondono i due tipi di spettro?

2. Descriviamo il dispositivo adoperato:

Il circuito principale comprendeva una f. e. m. E di 100 o 125 volta. una resistenza R e una forte autoinduzione $\mathcal{A}$ (bobina con nucleo di fili di ferro). Il circuito derivato ai poli A e B dell'arco comprendeva un'autoinduzione L e una capacità C, variabile da 1 a 20 microfarad. La bobina L agiva su un tubo Braun, attivato da una macchina Toepler-Holtz, in modo da dare spostamenti verticali al cerchietto fluorescente. Il tubo era munito di due elettrodi piani E_1 E_2 per la deviazione elettrostatica del fascio catodico; a questi elettrodi erano collegati rispettivamente i punti A e B del circuito dell'arco.

Facendo agire contemporaneamente sui raggi catodici l'autoinduzione L e il campo elettrostatico E_1 E_2, si otteneva in realtà la caratteristica del circuito derivato e non proprio quella dell'arco. Si osservi però che, siccome il circuito principale conteneva la forte autoinduzione $\mathcal{A}$, l'intensità i_0 della corrente che percorreva tale circuito si poteva considerare costante; quindi le correnti i_1 del circuito dell'arco e i_2 del circuito derivato si potevano ritenere differenti solo per una costante. Se con i_0, i_1. i_2 indichiamo le intensità delle correnti dirette, nel circuito principale, in quello dell'arco e in quello derivato, come indicano le freccie della fig. 1, si ha

$$i_1 = i_0 + i_2 .$$

Dunque dalla caratteristica del circuito derivato si può passare a quella dell'arco mediante una traslazione di ampiezza i_0 nella direzione positiva dell'asse $V = 0$ (V, differenza di potenziale tra il polo positivo B e il polo negativo A dell'arco).

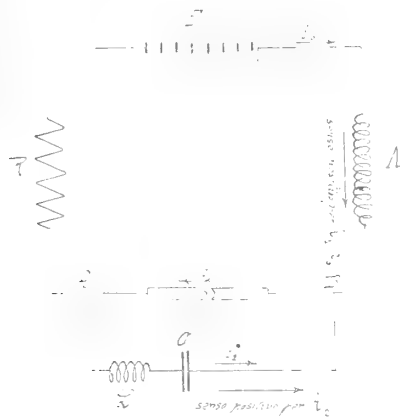



FIG. 1.

3. Con una f. e m. $E = 125$ volta, con una bobina di autoinduzione $L = 3{,}8 \times 10^{-3}$ henry e una capacità $C = 20$ microfarad, i risultati ottenuti furono i seguenti:

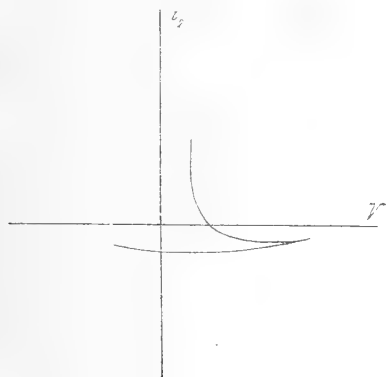
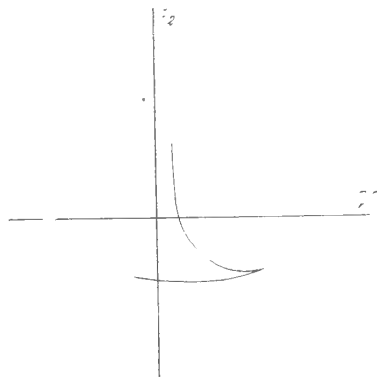



FIG. 2. FIG. 3.

Con carboni molto vicini, al variare della resistenza R del circuito principale, si ottennero le caratteristiche riprodotte nelle figure 2, 3 e 4, alle quali corrispondevano le intensità $i_0 = 1{,}9$, $i_0 = 4$, $i_0 = 5$ ampère (misurate per mezzo di un amperometro inserito nel circuito principale).

Le modificazioni della caratteristica osservate al crescere di i_0, corrispondono alle modificazioni che al crescere di i_0 subisce la corrente i_2.

Come è noto (1), la differenza tra le ampiezze della semionda positiva e della semionda negativa della corrente i_2 è propria del regime tronco-sinusoidale dell'arco cantante, e diminuisce al crescere di i_0. (Nel regime tronco-sinu-

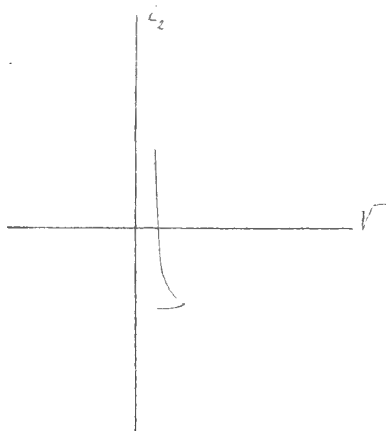
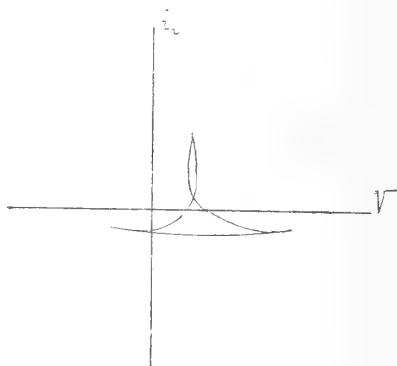



Fig. 4. Fig. 5.

soidale, quando cioè le due semionde della corrente i_2 hanno differente ampiezza, l'ampiezza della semionda negativa ha appunto il valore i_0).

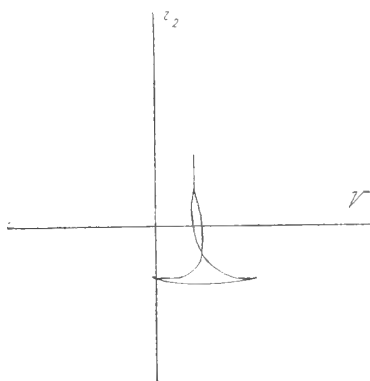
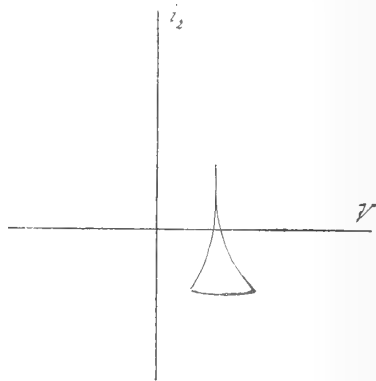



Fig. 6. Fig. 7.

Nella fig. 4, la differenza tra le ampiezze delle due semionde della corrente i_2 non è più avvertibile; si è potuto verificare che nel caso a cui corrisponde questa figura, la corrente i_2 era sensibilmente sinusoidale, sopprimendo il campo elettrostatico fra gli elettrodi E_1 E_2, ed osservando gli spostamenti del cerchietto fluorescente, dovuti all'azione della bobina L, per mezzo di uno specchio girante.

(1) Corbino, loc. cit.

Con carboni un po' più lontani si sono ottenute le caratteristiche riprodotte nelle figg. 5 e 6, che corrispondono rispettivamente alle intensità $i_0 = 2$, $i_0 = 4$ ampère.

Allontanando ancora i carboni si è ottenuta la figura 7, corrispondente all'intensità $i_0 = 4.2$ ampère: questa caratteristica corrisponde ad un regime sensibilmente sinusoidale.

Con la massima distanza a cui era possibile far cantare l'arco, si sono ottenute le figg. 8 e 9, corrispondenti rispettivamente alle intensità $i_0 = 3$, $i_0 = 3.6$ ampère. La caratteristica passava spontaneamente, ogni tanto, dalla forma riprodotta nella fig. 8 a quella riprodotta nella fig. 9. Anche nel caso

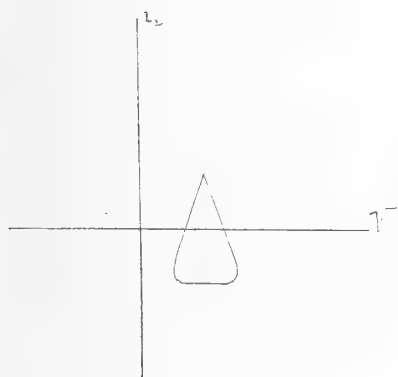
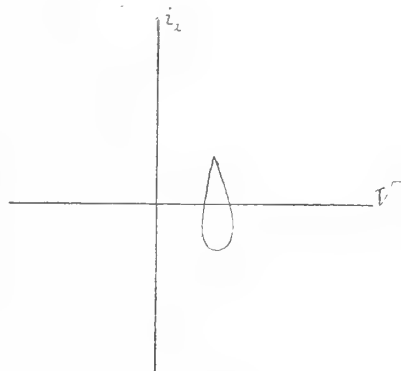



Fig. 8. Fig. 9.

di queste due caratteristiche (alle quali corrispondeva l'emissione di un suono assai puro), la corrente i_2 era sinusoidale.

Le variazioni della capacità da 20 a 1 microfarad influivano sulla lunghezza della caratteristica, ma non sulla sua forma, nè sensibilmente sui valori massimo e minimo della tensione.

Ripetute le esperienze con una f. e. m. E = 100 volta, i risultati non sono variati sensibilmente.

Sostituendo nel circuito derivato, alla bobina adoperata nelle esperienze sopra riferite, una bobina d'induttanza $L = 86 \times 10^{-6}$ henry, si sono ottenuti gli stessi tipi di caratteristiche. C'è solo da osservare che, con questa bobina d'induttanza minore, le caratteristiche corrispondenti al regime sinusoidale si ottenevano più difficilmente e che, con carboni lontani, si aveva talvolta una caratteristica del tipo di quelle riprodotte nelle figure 5 e 6, ma allargata nella parte superiore (vedi fig. 10).

Si è sostituito infine, alla bobina d'induttanza $L = 86 \times 10^{-6}$ henry, un rocchettino costituito da due spire, del diametro di cm. 4,5, di filo da campanelli; disponendo opportunamente i fili di congiunzione, si è resa tra-

scurabile, per quanto era possibile, l'induttanza del circuito derivato, bobina esclusa. In tali condizioni, con una f. e. m. $E = 100$ volta, si sono ottenuti i seguenti risultati.

Coi carboni molto vicini, per qualunque valore dell'intensità i_0, la caratteristica era tanto corta e stretta che non se ne poteva distinguere la

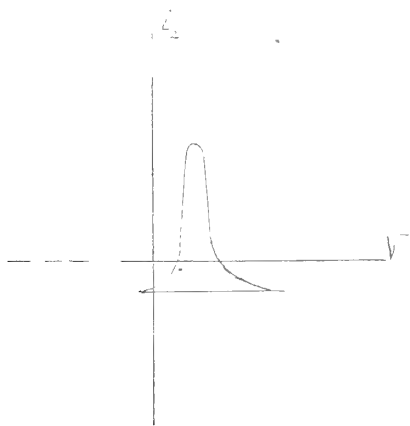
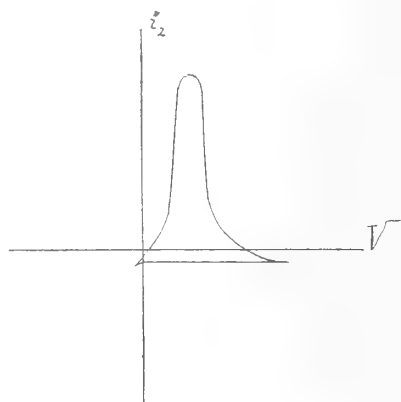



Fig. 10. Fig. 11.

forma; la tensione era sempre positiva. Coi carboni più lontani, per $i_0 = 3$ ampère e $C = 20$ microfarad, si è ottenuta la caratteristica rappresentata nella fig. 11. Il tratto della caratteristica corrispondente ad $i_2 > - i_0$ (cioè

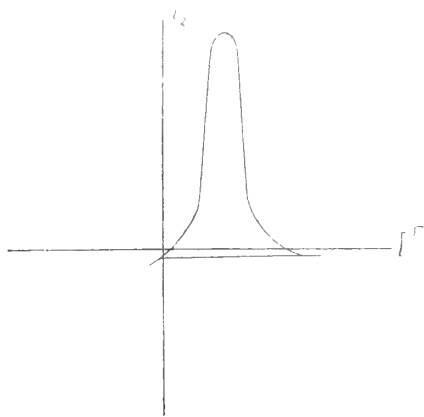
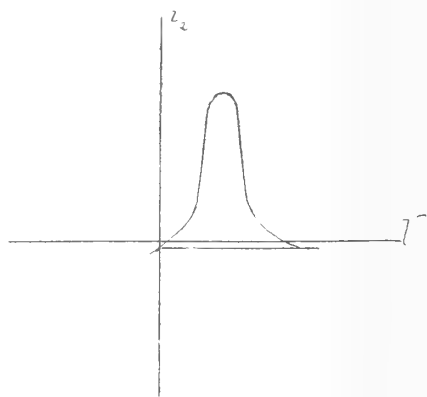



Fig. 12. Fig. 13.

ad $i_1 > 0$) appariva molto meno luminoso del tratto rettilineo orizzontale; dunque il primo tratto era percorso dal cerchietto fluorescente con velocità notevolmente maggiore di quella con cui era percorso il secondo tratto.

Allontanando ancora i carboni e diminuendo un po' i_0, la caratteristica si allargava e si allungava alquanto, come è indicato dalla fig. 12.

Al crescere di i_0, il valore massimo della tensione diminuiva un po' e il tratto della caratteristica corrispondente ad i_1 crescente si spostava un po' verso la regione delle tensioni minori; la differenza tra le ampiezze della semionda positiva e della semionda negativa della corrente i_2, pur diminuendo, restava sempre assai grande; la corrente i_2, esaminata per mezzo di uno specchio girante, era sempre ben lontana dalla forma sinusoidale.

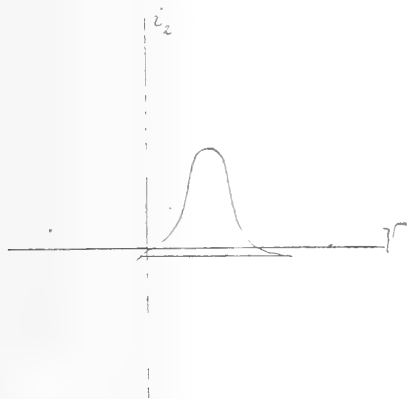
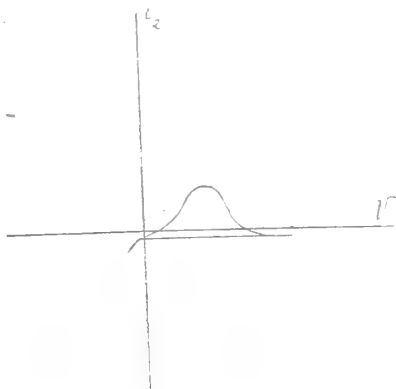



Fig. 14. Fig. 15.

Le variazioni della caratteristica con la capacità sono mostrate dalla fig. 12 e dalle figg. 13, 14 e 15 corrispondenti a capacità di 20, 10, 5, 1 microfarad.

Si osservi che, nelle caratteristiche corrispondenti alle diverse induttanze L del circuito derivato, i valori della corrente sono rappresentati in scale diverse dalle ordinate i_2. Ma tali caratteristiche si possono facilmente confrontare, poichè per quelle relative al regime tronco-sinusoidale (o almeno per alcune di esse) è noto il valore $-i_0$ della corrente i_2, corrispondente al tratto quasi rettilineo e orizzontale (1).

In una seconda Nota discuteremo i risultati sperimentali riferiti.

(1) Il confronto può farsi con una certa approssimazione, poichè non pretendiamo di aver riprodotto rigorosamente, dal punto di vista quantitativo, le caratteristiche osservate sul tubo Braun.

Fisica. — *La caratteristica dinamica dei tubi per raggi X.* Nota di Nella Mortara [1], presentata dal Socio P. Blaserna.

La scarica nei gas rarefatti consta, come è noto, di varie parti: il primo strato catodico, lo spazio oscuro catodico, lo strato luminoso negativo, lo spazio oscuro intermedio, la colonna di luce positiva e lo strato anodico. La tensione agli elettrodi del tubo in cui avviene tale scarica è perciò la risultante delle cadute di tensione nelle parti sopra enumerate. Queste perdite parziali di tensione dipendono, con legge diversa, da varie altre grandezze, come l'intensità della corrente, la pressione del gas, l'estensione dello strato luminoso negativo, ecc.; fra tutte la caduta anodica è la minore e varia poco con le condizioni dell'esperienza.

A seconda che l'una o l'altra delle parti della scarica luminosa prevale sulle altre, la curva V, i, che rappresenta l'andamento della caduta totale di tensione V rispetto all'intensità i, ha un andamento diverso: così, p. es., se la parte prevalente è la caduta catodica, si ha una caratteristica, ossia una curva V, i, sempre crescente; vale a dire, al crescere dell'intensità, cresce la differenza di tensione agli elettrodi del tubo.

Queste curve caratteristiche nei varii casi per i tubi di scarica erano già state studiate [2]. Però lo studio era stato fatto solo per intensità costanti; e i valori raggiunti per l'energia erano poco elevati, perchè come sorgenti di elettricità si usavano o macchine elettrostatiche, che danno alti potenziali, ma bassissime intensità, o batterie di accumulatori, che danno intensità elevate, ma bassi potenziali. Nè sarebbe stato possibile, nello studio della caratteristica statica, mandare nel tubo correnti elevate permanenti e ad alto potenziale, per l'eccessivo riscaldamento che si sarebbe prodotto nel tubo, durante il tempo non breve delle misure di V e i. Nè d'altra parte poteva senz'altro affermarsi che con le correnti rapidamente variabili utilizzate nei tubi per raggi X la caratteristica dinamica fosse identificabile con quella statica, la quale del resto non è nota per così intensi regimi.

Era quindi importante tracciare le curve caratteristiche V, i con grandi intensità, elevati potenziali e per correnti rapidamente variabili.

In un tubo per raggi X predomina la caduta catodica, e quindi era prevedibile che la caratteristica fosse sempre crescente; questo risultava anche dal fatto che in tali tubi al crescere dell'intensità cresce la distanza esplosiva equivalente. Era però interessante determinare non solo la relazione

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma, maggio 1916.

[2] Winckelmann, vol. IV, pag. 513 segg.

fra il potenziale massimo e l'intensità media, ma poter seguire i singoli valori del potenziale corrispondenti alle varie intensità.

Per raggiungere questo scopo, ci si è serviti di un tubo Braun, munito di due elettrodi piani per la deviazione elettrostatica del fascio catodico, secondo la disposizione di Wehnelt. Se si riesce a dare al cerchietto fluorescente uno spostamento verticale proporzionale alla corrente che attraversa il tubo, e uno spostamento orizzontale proporzionale alla differenza di potenziale agli elettrodi del tubo stesso, la composizione delle due deviazioni dà la caratteristica dinamica, ossia permette di determinare in ogni istante i valori corrispondenti dell'intensità e del potenziale.

Per produrre questi spostamenti del cerchietto proporzionali alla corrente nel tubo e alla differenza di potenziale ai suoi estremi, si adottarono i seguenti metodi, suggeriti dal prof. Corbino.

Lo studio della corrente secondaria, che alimenta il tubo, presenta gravi difficoltà derivanti dalla sua rapida variazione col tempo e dalla relativamente piccola intensità.

Nella Memoria del prof. Corbino sul rocchetto di Ruhmkorff queste difficoltà poterono essere superate, trattandosi di un piccolo rocchetto, con il seguente artificio. Su un tubo Braun, alimentato da una macchina elettrostatica a molti dischi, si faceva agire tutto il rocchetto d'induzione insieme con una bobinetta percorsa dalla corrente primaria e situata in modo da compensare, anche con correnti variabili, l'azione esercitata sul tubo dalla corrente primaria del rocchetto. Rimaneva così l'azione della sola corrente secondaria, che produceva sul fascetto catodico e sulla macchia dello schermo spostamenti rapidissimi, proporzionali all'intensità. L'osservazione allo specchio girante forniva senz'altro la forma della corrente secondaria; mentre la composizione ortogonale con altri spostamenti dovuti o alla corrente primaria, o al flusso secondario dava luogo sullo schermo alla produzione di curve stabili, la cui interpretazione fu molto utile per stabilire le modalità del funzionamento del rocchetto e confrontarle con le previsioni della teoria già svolta.

Le modeste dimensioni del rocchetto, allora usato, avevano permesso, come fu accertato da prove opportune, di considerare trascurabili gli effetti della capacità distribuita lungo il secondario. Non essendo lecito fare questa ipotesi nel caso dei grandi rocchetti moderni, si imponeva una revisione dei risultati di quelle prime esperienze con metodi nuovi; e invero la presenza di una capacità distribuita fa sì che la corrente secondaria entro il rocchetto è in generale diversa da spira a spira, e perciò la sua azione complessiva sul tubo non può più fornire la vera legge di variazione della corrente secondaria, quale si utilizza nel tubo, cioè al di fuori dell'avvolgimento secondario.

D'altro canto la rapidità di variazione della corrente, e i conseguenti elevatissimi valori di $\frac{di}{dt}$, danno luogo a gravi ed inattese perturbazioni, qualora si tenti di esplorare la forma della corrente secondaria obbligandola a traversare una bobina a spire bene isolate, che agisce sul tubo Braun. E cioè, come fu già notato dai professori Corbino e Trabacchi, ad ogni impulso brusco di corrente prendono origine vere oscillazioni interne nella bobina, la quale deve avere le sue spire molto vicine e numerose perchè la corrente, di piccola intensità, devii sufficientemente la macchia fluorescente del tubo Braun. Queste oscillazioni sono dovute evidentemente alla capacità distribuita lungo la bobina fra le spire consecutive; alla loro azione perturbatrice si sovrappone inoltre quella che deriva dai corti circuiti intermittenti creati fra le spire vicine da piccole scintille; e ancora più l'azione elettrostatica sul fascio catodico, dovuta alla tensione delle spire della bobinetta, tensione che, per il grande valore di $L\frac{di}{dt}$, è molto elevata, anche se un estremo della bobinetta è tenuto in comunicazione col suolo.

Per tutte queste ragioni, nell'ultimo lavoro sopra citato fu ritenuto preferibile esplorare la forma della corrente secondaria col farle traversare una resistenza non induttiva r, raccogliere la tensione ohmica ri ai suoi estremi e fare agire questa sulle due laminette per la deviazione elettrostatica del fascio catodico in un tubo del tipo Braun-Wehnelt. È questo il metodo cui io mi sono attenuta nel presente lavoro.

La tensione secondaria. — Per lo studio di questa grandezza, la cui conoscenza è così importante per precisare le condizioni di funzionamento del tubo, è stato fatto finora ben poco. In un lavoro dei professori Corbino e Trabacchi fu fatto un primo tentativo in questo senso, ammettendo in prima approssimazione che esistesse proporzionalità fra la tensione al secondario e quella al primario. Ma è chiaro che, per l'imperfetto allacciamento fra il primario e il secondario, quella approssimazione deve esser considerata come molto grossolana.

Una assai più fedele riproduzione della legge della tensione secondaria può essere ottenuta col seguente metodo.

Una matassa di un centinaio di grandi spire è disposta intorno al cilindro di ebanite che avvolge il rocchetto, in modo da abbracciare il secondario e il primario; essa può essere spostata lungo l'asse del rocchetto, in modo da poterla allontanare o avvicinare agli estremi.

Indichiamo con M_{12} la mutua induzione fra primario e secondario; e con M_{13}, M_{23} rispettivamente le mutue induzioni fra la matassa e il primario, fra la matassa e il secondario. La tensione istantanea ai poli del secondario, qualunque siano le caratteristiche del circuito di utilizzazione, è data da

$$r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt},$$

dove r_2 è la resistenza, L_2 l'autoinduzione del secondario, e i_2 la corrente. Il primo termine è, senza errore sensibile, da trascurarsi rispetto agli altri. Invero la massima corrente secondaria istantanea è dell'ordine di 0,1 ampère, e perciò, avendosi per valore di r_2 circa 20.000 ohm, il primo termine è dell'ordine di 2000 volt, mentre nelle condizioni ordinarie di uso sono in giuoco nel secondario forze elettromotrici di molte diecine di migliaia di volt. Si può quindi ritenere che la forza elettromotrice utile ai poli del rocchetto è data, con qualunque apparecchio di utilizzazione, da

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} .$$

Si consideri adesso la tensione agli estremi della matassa; essa è data da

$$M_{23} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_1}{dt} .$$

Se si vuole che quest'ultima sia in ogni istante proporzionale alla prima, deve essere

$$\frac{M_{23}}{M_{13}} = \frac{L_2}{M_{12}} .$$

Questa condizione può essere realizzata, spostando convenientemente la matassa lungo il rocchetto, con che variano in misura diversa M_{12} e M_{23}. E, poichè sarebbe difficile determinare col calcolo se e in quale posizione quella condizione è soddisfatta, basta ricorrere a questo semplice artificio.

Si chiude in corto circuito il secondario; con che si obbliga la tensione ai poli del secondario ad assumere il valore zero. Si manda nel primario una debole corrente alternata o interrotta: se la condizione di cui sopra è soddisfatta, dovrà esser nulla anche la tensione ai poli della matassa; e di questo ci si può assicurare facilmente con un rivelatore qualsiasi, come un voltmetro sensibile o un telefono con in serie una resistenza. Spostando la matassa lungo l'asse del rocchetto si può trovare la posizione che dà luogo a un forte minimo della tensione ai suoi estremi.

Non è questo il posto opportuno per sviluppare più ampiamente la teoria del metodo. Mi limiterò ad osservare che le correnti interne del secondario, diverse da spira a spira e dovute alla sua capacità distribuita, non impediscono che il metodo fornisca con buona esattezza la tensione utile. E invero la teoria rigorosa richiederebbe che il termine relativo a $\frac{di_2}{dt}$ nelle espressioni precedenti venisse scomposto in una serie di numerosi termini relativi ciascuno a ogni spira, del tipo $m_{1r} \frac{di_r}{dt}$, dove m_{1r} indica l'indu-

zione mutua fra il primario e la $r.^{ma}$ spira del secondario, mentre i_r denota la corrente nella medesima spira. La stessa sostituzione dovrebbe farsi per calcolare l'azione induttiva del secondario sulla matassa. Ma poichè le diverse spire del secondario incanalano i rispettivi flussi di preferenza lungo il nucleo di ferro, non si commette un grave errore conglobando tutte le azioni induttive in un unico termine che contiene una certa intensità risultante i_2, la quale agisce con le rispettive proporzioni sul primario, sul secondario e sulla matassa.

La legittimità di queste considerazioni, qui semplicemente abbozzate, viene del resto assicurata dal confronto diretto fra la tensione ai poli della matassa e quella ai poli del secondario, rivelata con gli altri due metodi che seguono, i quali sono di meno semplice applicazione, ma esenti da ogni obbiezione.

2° metodo. — Ai poli del rocchetto si inserisce una resistenza liquida di alquanti megaohm, costituita da lunghi tubi di vetro, che contengono una soluzione di acqua e alcool in proporzioni opportune. La corrente che circola in questa resistenza traversa anche una piccola bobina agente sul tubo Braun; ovvero traversa un'altra resistenza di poche migliaia di ohm, ai poli della quale sono inserite le laminette per la deviazione elettrostatica nel tubo Braun-Wehnelt.

3° metodo. — Ai poli del rocchetto sono inserite cinque capacità in cascata. Le quattro estreme sono costituite da semplici lastre di vetro con piccole armature di stagnola al centro. La capacità media C risulta invece di un microfarad diviso in frazioni; i suoi estremi sono rilegati alle laminette del tubo Braun-Wehnelt.

Il sistema funziona, come è evidente, da riduttore di tensione in proporzione variabile a volontà col modificare il valore di C.

Confronto fra i tre metodi. — Anzitutto fu verificato che essi sono perfettamente equivalenti nel fornire la legge di variazione della tensione ai poli del rocchetto funzionante nelle condizioni più svariate. Infatti, combinando i tre metodi due a due in modo da produrre contemporaneamente sul fascetto catodico spostamenti orizzontali per l'uno e verticali per l'altro, si osservò sempre allo schermo, come risultante della composizione dei due spostamenti, una retta di cui si poteva mutare a piacere la inclinazione.

Il primo metodo ha sugli altri due il vantaggio di non distrarre nessuna parte della corrente secondaria dal circuito di utilizzazione, e di non alterare perciò le condizioni normali di funzionamento del ricevitore, per esempio dell'ampolla per raggi X.

Ma in compenso il primo metodo non dà più la tensione vera ai poli dell'ampolla, quando questa è inserita sul secondario attraverso a una scintilla o a una valvola per arrestare l'onda inversa, poichè in tal caso la tensione ai poli della matassa corrisponde alla tensione *totale* ai poli del rocchetto, e non a quella parziale che è attiva agli estremi dell'ampolla.

* * *

Le prime esperienze furono eseguite inviando nel tubo la corrente secondaria di un rocchetto, nel cui primario circolava una corrente alternata periodicamente interrotta con l'interruttore elettrolitico Trabacchi.

Ma la necessità di adoperare una breve scintilla in serie col tubo per eliminare le correnti inverse di chiusura rese inadoperabile il primo metodo per la esplorazione della differenza di potenziale.

Si dovè quindi ricorrere per la esplorazione del potenziale al metodo della resistenza, realizzato nel modo seguente. Si prese una resistenza formata da un lungo tubo di vetro piegato ad U riempito di alcool ed acqua; e la si rilegò direttamente ai poli del rocchetto, senza scintilla intermedia. In serie con la resistenza ad acqua fu rilegata una resistenza metallica ϱ, ai poli della quale veniva a prodursi così una differenza di potenziale variabile ϱi, se i è l'intensità che traversa il circuito.

Contemporaneamente venne inserito ai poli del rocchetto un sistema di piccoli condensatori di vetro e stagnola, rilegati in serie e connessi al centro con un condensatore di capacità grande e regolabile; esso consisteva in un microfarad di mica argentata diviso in frazioni.

Ai poli del condensatore si determinava perciò una differenza di potenziale pari a una certa frazione della tensione totale prodotta dal rocchetto. Questa differenza di potenziale viene confrontata con l'altra ϱi esistente ai poli della resistenza metallica per mezzo del tubo Braun, facendo in modo che ne risultassero spostamenti del cerchietto in direzioni ortogonali. Il diagramma così ottenuto, mandando nel primario del rocchetto una corrente alternata o periodicamente interrotta, fu una retta passante per l'origine; con che risultò dimostrato che la corrente i che traversa la resistenza è esattamente proporzionale alla tensione ai poli del rocchetto, e può quindi servire per esplorarne l'andamento.

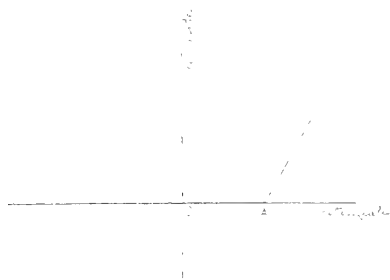
L'adozione della resistenza liquida per l'esame della tensione consente che si adoperi una bobinetta, percorsa in serie dalla corrente i che traversa la resistenza, e agente elettromagneticamente sul fascetto catodico. Ciò dipende dal fatto che la grandissima resistenza liquida conferisce all'intero circuito resistenza-bobinetta una costante di tempo molto grande, nonostante l'autoinduzione di questa, in modo che l'intensità della corrente che traversa il sistema è praticamente proporzionale alla tensione totale agente. E infatti, facendo agire sul tubo la bobinetta percorsa dalla corrente i della resistenza liquida, e per mezzo delle laminette, la tensione attiva ai poli del condensatore, si potè verificarne la proporzionalità esatta nelle condizioni più svariate.

Il servirsi di una bobinetta per l'esplorazione del potenziale presenta il vantaggio che le laminette per la deviazione elettrostatica nel tubo Braun-

Wehnelt rimangono libere per la esplorazione della corrente nel tubo per raggi X, la quale, essendo variabile in limiti più ampi della tensione non può essere studiata esattamente che col metodo elettrostatico.

Nelle circostanze sopra indicate venne studiata la forma della caratteristica per tubi a raggi X di diversa provenienza e a gradi diversi di durezza. Fu ottenuta in tutti i casi una curva del tipo rappresentato nella figura.

Si riconosce da questa che il tubo si adesca in A, per un certo valore OA del potenziale, e che da quel momento la tensione cresce linearmente con l'intensità, identificandosi la salita con la discesa del diagramma. Si può quindi porre, come equazione della caratteristica:

$$V = a + bi, \text{ dove } a \text{ e } b \text{ sono costanti.}$$

Fin qui le esperienze si erano fatte servendosi della corrente alternata; si volle vedere se con la corrente continua, e quindi con un tipo di interruttore diverso, si ottenessero gli stessi risultati.

Venne adoperato un rocchetto di medio modello; la corrente primaria, fornita da una batteria di accumulatori, attraversava un interruttore Ropiquet, munito di selettore d'onda per il secondario.

La caratteristica si studiava servendosi dello stesso metodo, ossia usando la resistenza liquida per l'esplorazione del potenziale con la bobinetta, e le lamine del tubo Braun per lo studio dell'intensità.

A qualunque regime e per qualunque durezza del tubo, la caratteristica risultò del tipo $V = a + bi$, senza apparente isteresi.

Per una stessa durezza, cambiando regime, il punto di partenza della retta inclinata rimane lo stesso e l'inclinazione pure si mantiene invariata, ossia tanto a quanto b per una stessa durezza si mantengono costanti ai varî regimi.

All'aumentare della durezza il punto di partenza della salita si sposta verso destra, ossia a diventa più grande. Quanto a b, si è potuto accertare

che per i diversi tubi esso varia un po' dall'uno all'altro, ma per uno stesso tubo si mantiene sensibilmente costante al variare della durezza. Difatti, ripetendo l'esperienza con parecchi tubi, si è visto che al variare della durezza, in uno stesso tubo. la retta inclinata si sposta, mantenendosi all' incirca parallela a se stessa.

In tutti i casi da me osservati la curva della salita coincide quasi esattamente con quella del ritorno; risultato importante perchè è contrario a quanto pareva accertato da osservazioni anteriori, secondo le quali il tubo, dopo l'adescamento, presenterebbe una resistenza minore. Questi risultati possono considerarsi validi per tutti i tipi di tubi ordinarî per raggi X che sono adesso in commercio, entro ampi limiti di durezza e per intensità di corrente che raggiungono i dieci milliampère-medi. Non fu creduto opportuno di sperimentare con intensità più elevate, le quali, negli apparecchi esistenti, si ottengono col prolungare la durata della corrente più che con l'accrescerne l'intensità massima; e perciò il campo di variazione della intensità e della differenza di potenziale non ne risulta ampliato in misura sensibile.

Le ricerche si stanno ora estendendo a un tubo Coolidge. In una prossima Nota saranno riprodotte le fotografie delle caratteristiche ottenute per i varii tubi e saranno dati i valori numerici corrispondenti a ciascun fotogramma.

Compio un gradito dovere terminando questo mio scritto col porgere vivi ringraziamenti al prof. Corbino per i suggerimenti e i consigli coi quali ha voluto guidarmi in questa ricerca.

Fisica. — *Sull'impiego radiografico del cromometro di Benoist per la misura del potere penetrante dei raggi X* [1]. Nota di G. C. TRABACCHI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Avendo avuto occasione di eseguire numerose radiografie di un radiocromometro di Benoist, ho potuto fare questa notevole osservazione: *Il grado di durezza letto nel radiogramma, risulta in ogni caso più elevato di quello che si può apprezzare ad occhio sullo schermo fluorescente.*

La spiegazione di questo fatto singolare, che può aver condotto a curiosi equivoci per l'uso invalso presso varî osservatori [2] di apprezzare il potere

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

[2] Qualcuno, come Davey (Phys. Rev., vol. IV, ser. 2ª, 1914) se ne serve sistematicamente, desumendo anzi dal grado radiocromometrico la tensione ai poli del tubo; Voltz (Phys. Zeit. 16, 306 aug. 1915) critica l'uso del metodo credendo di riscontrare delle anomalie confrontando i risultati dei radiogrammi con le misure di tensione eff. ai poli del tubo. — Salomonson (Phys. Zeit., 16, 389 nov. 1915) dissente completamente dall'opinione di Voltz e ritiene che per gli scopi medici il metodo sia raccomandabile.

penetrante dei raggi X mediante immagini radiografiche del radiocromometro di Benoist, risulta abbastanza semplice se si pensa che la sensibilità della lastra al bromuro di argento per i raggi X è dovuta per una gran parte al lavoro chimico conseguente all'assorbimento di una banda piuttosto ristretta dello spettro continuo emesso dal tubo per parte del bromo e dell'argento, come risulta dalle ricerche di De Broglie ([1]) e di Barkla ([2]).

Essendo perciò l'azione fotografica dovuta principalmente alle radiazioni che è capace di assorbire l'argento dell'emulsione, è ovvio che, se prima di raggiungere la lastra sensibile i raggi X vengono filtrati attraverso ad una lamina di argento, la banda di spettro continuo impegnata nella azione chimica verrà ad essere in gran parte eliminata o per lo meno attenuata; in modo che, pure essendo piccola la quantità di raggi assorbiti dall'argento, per la particolare loro qualità, l'azione fotografica ne risulta fortemente diminuita.

Lo stesso si verifica, come ho potuto accertare, con elementi di peso atomico prossimo a quello dell'argento (107,8), come il palladio (106,7), il cadmio (112,4).

Ora, poichè la parte centrale del « Benoist » è appunto costituita da una lamina di argento, ne segue che la sua ombra nel negativo radiografico risulta più trasparente di quello che competerebbe alla riduzione quantitativa da essa esercitata sui raggi incidenti: la durezza del tubo pare quindi maggiore di quella che si apprezzerebbe sullo schermo fluorescente sul quale agisce la totale quantità dei raggi e che non sembra abbia per nessuna qualità proprietà esaltatrici.

Se infatti la radiografia si eseguisce usando uno schermo di rinforzo e si ha cura di non interporre fra la emulsione e il tubo, nè lo schermo nè il vetro di una lastra, ma si usano pellicole sensibili che si interpongono fra lo schermo e il tubo, ne risulta che per il fatto che lo schermo trasforma in luce le radiazioni che attraversano l'argento, l'azione sulla emulsione non è più limitata a quelle caratteristiche che l'argento è capace di assorbire; e pertanto non essendo più il mezzo sensibile complessivo (schermo-emulsione) così ristrettamente selettivo come la lastra al bromuro di argento usata da sola, il fenomeno non ha più luogo. Perciò, se si fanno due radiografie dello stesso « Benoist » su due parti della stessa pellicola, una con schermo di rinforzo, l'altra senza, avendo cura che il tubo abbia sempre durezza costante (Coolidge) i due radiogrammi risultano differenti per il grado radiocromometrico che se ne deduce; quello che più si avvicina al vero è il radiogramma fatto con lo schermo di rinforzo: l'altro apparisce di due gradi circa più elevato.

([1]) Compt. Rend. (1916) p. 87, 352, t. 163
([2]) Barkla Phil. Mag. 1913.

Non prestandosi però bene l'apprezzamento della variazione di grado radiocromometrico a misure quantitative, ho proceduto alla seguente esperienza: ho incollato su un cartoncino sottile quattro lamine rispettivamente di alluminio, cadmio, argento e palladio e ne ho eseguito due radiografie su due parti di una stessa pellicola; una con schermo di rinforzo (usato nel modo descritto sopra), l'altra senza schermo. Il tubo era nei due casi esattamente nelle stesse condizioni e le pose erano regolate per avere eguale annerimento sotto la carta.

Misurata la opacità delle negative nei punti corrispondenti ai varî metalli e sotto la carta, ho avuto i seguenti valori:

Senza schermo					Con schermo				
Opacità sotto:					Opacità sotto:				
Carta	Cd	Ag	Pd	Al	Carta	Cd	Ag	Pd	Al
32	12	8,2	14,4	17	32	13,5	13,8	17	17,5

Come si vede a pari annerimento sotto la carta sono quasi eguali gli annerimenti sotto l'alluminio: invece sotto gli altri tre metalli le opacità della radiografia eseguita senza schermo di rinforzo *sono sempre notevolmente inferiori a quelle ottenute con lo schermo*, il che conferma la spiegazione del fenomeno riferito in principio.

Chimica. — *Sui borati. - Sistema* Na_2O, B_2O_3, H_2O a 60° [1]. Nota III di U. Sborgi e F. Mecacci, pres. dal Socio R. Nasini [2].

In base alle esperienze pubblicate in due Note precedenti [3] su questo sistema, si costruisce il diagramma della figura seguente.

Il diagramma è completo e va dall'acido borico alla soda caustica: la curva *ab* è la curva dell'acido borico B; la *bc* quella del pentaborato decaidrato 1-5-10 P; la *cd* quella del diborato pentaidrato 1-2-5 D; la *de* quella del metaborato tetraidrato 1-1-4 M; la *fm* quella del metaborato monoidrato 1-1-1 M', della quale la porzione *fe* è stabile e la porzione *em* metastabile, la *fg* è la curva di un borato della formula 2-1-1 che, seguendo la nomenclatura precedente, dovrebbe essere chiamato emiborato E; la curva *gh* infine è quella della soda caustica monoidrata S.

I punti B, P, D, M, M', E, S, punti di convergenza dei fasci di coniugazione uscenti dalle varie curve, rappresentano i varî composti sopra nominati. Le tratteggiate *x* rappresentano le divergenti.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1916.

(3) Questi Rendiconti, vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., pag. 443 e vol. XXV, serie 5ª, 2° sem., pag. 327.

Nella costruzione delle curve *ab*, *bc* e *cd* non constatammo alcunchè di particolare, tranne quanto abbiamo rilevato nelle precedenti Note a proposito dei punti invarianti *c* e *d*. Nella Nota I abbiamo poi già riportato i dati di solubilità del pentaborato e del diborato in acqua pura, ricavabili dalle curve e dalle esperienze.

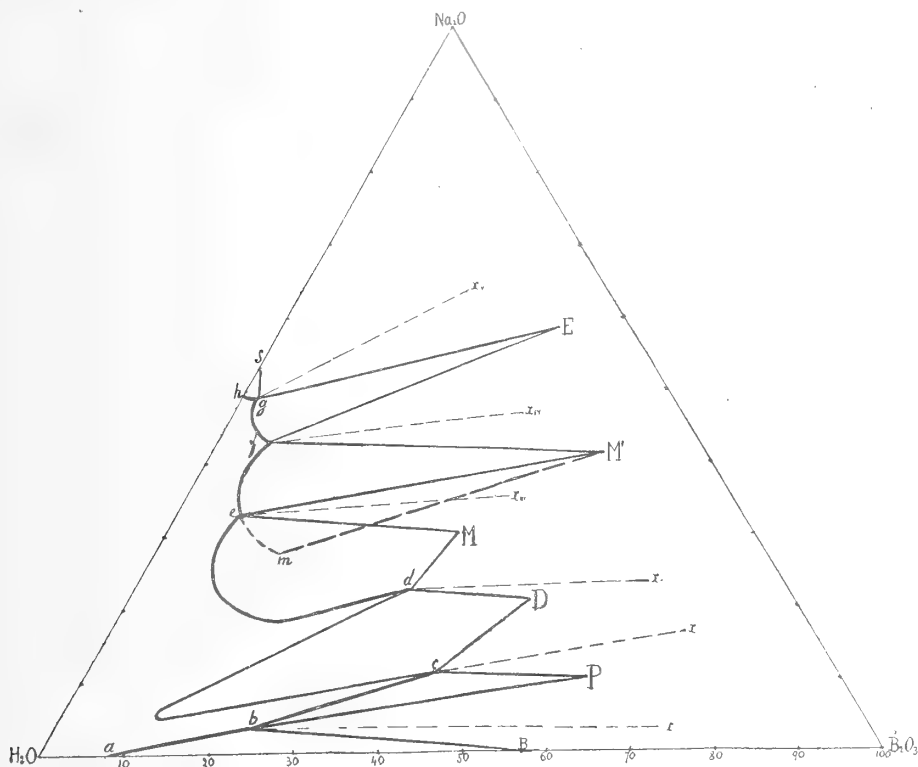
Per quanto riguarda la curva *de* dell' 1-1-4 dobbiamo notare quanto segue. Nella prima parte della curva e precisamente nel tratto costruito in base alle esperienze che vanno dal n. 55 al n. 70 circa, non si ebbe alcunchè di anormale nel decorso delle esperienze: nel tratto seguente cominciarono moltissime difficoltà: era difficilissimo ottenere il corpo di fondo che nella prima parte della curva (e anche qui, quando si riusciva a ottenerlo) era costituito da cristalli di forma macroscopicamente tabulare molto aderenti al recipiente: qui si avevano spesso liquidi densi e sciropposi senza nessuna fase solida, oppure — dopo estratto un primo campione — si aveva solidificazione completa di tutta la massa. La spiegazione di tutto questo la trovammo quando cominciò a delinearsi anche la curva metastabile *em* del metaborato monoidrato: evidentemente si avevano passaggi dall'uno all'altro idrato: devesi notare che del metaborato monoidrato noi trovammo punti metastabili anche molto più in basso del punto *m*, e se non li riportiamo nel diagramma e nelle esperienze citate, è soltanto perchè non ne avemmo sempre una conferma sufficiente. Ma è chiaro che la presenza della fase metastabile influisce ben presto sull'andamento delle esperienze. Quando, dopo tentativi riuscimmo ad avere il corpo di fondo, trovammo — sia per la curva stabile, sia per la metastabile — resultati ben sicuri e in campioni successivi perfettamente concordanti. Anzi potemmo seguire con chiarezza in alcune esperienze il passaggio dalla fase metastabile alla stabile Così nel campione *a* dell'esperienza 78 ottenemmo una soluzione, il punto rappresentativo della quale si trova sulla curva metastabile: lasciando sufficientemente in termostalo, il punto si sposta e passa alla curva della fase stabile. Lo stesso avviene nella esperienza 80: in questa anzi osservammo anche considerevoli variazioni nella quantità del corpo di fondo quando si era passati dalla fase metastabile alla stabile.

Il metaborato tetraidrato può esistere senza decomporsi in presenza di acqua pura: ricavando con i soliti mezzi grafici dalla curva *de* la sua solubilità, si trova che si sciolgono 62.73 parti di sale anidro in 100 parti di acqua.

Alla curva dell' 1-1-4 segue la curva dell' 1-1-1, il quale esiste — secondo quanto abbiamo detto — anche in forma metastabile. Il metaborato monoidrato si ottenne sempre in forma pulverulenta: lungo questa curva si raggiungeva l'equilibrio con molta lentezza. Il fascio delle linee di coniugazione converge assai nettamente nel punto 1-1-1, ma, a maggior sicurezza, si cercò di controllare anche analizzando il corpo di fondo dopo averlo rapi-

damente separato ed asciugato quanto più fosse possibile. Si ottennero in due esperienze i seguenti risultati che sono quelli riportati nella esperienza 94.

Na_2O % 38.39 B_2O_3 % 35.78 H_2O % 25.83
» 37.11 » 34.79 » 28.10

Come si vede il metodo di analisi diretta qui non aiuta affatto ed è più sicuro il metodo del resto. Le ragioni sono queste: non potendosi lavare

il composto (perchè — come indica la posizione della sua curva di solubilità — non è stabile in presenza di acqua pura) comunque poi si tenti di asciugarlo, rimane un po' di soluzione la quale, col raffreddarsi della massa, depone — durante l'asciugamento stesso — il soluto ricco in Na_2O e povero in B_2O_3. I resultati ottenuti risentono di questa alterazione dei rapporti dei costituenti che così si produce, e la linea di coniugazione della esperienza 94 è assolutamente anomala: infatti questo modo di esperienza non è nè l'analisi diretta di un composto puro, nè un'applicazione del metodo del resto. Analoghe cose possono ripetersi per i tentativi fatti (vedi i resultati della esperienza 111 *a* e *b*) di analizzare direttamente il composto 2-1-1 della curva seguente: anzi qui le cose da un punto di vista erano ancora peggio-

rate, perchè il B_2O_3 nella soluzione diminuisce ancora in rapporto alla Na_2O. In tutti e due i casi, dunque, è soltanto il metodo del resto che ci ha permesso di individuare il composto con sufficiente sicurezza: e se citiamo i tentativi di analisi diretta è perchè, attraverso lo studio di altri sistemi, ci è resultato consigliabile di non tralasciare mai di compierli.

Per quanto riguarda il composto 2-1-1 dobbiamo notare che esso si presenta polverulento come l'1-1-1: si forma rapidamente, cosicchè si raggiunge assai presto l'equilibrio.

Alla curva di questo composto segue quella della soda caustica: noi ammettiamo qui come corpo di fondo l'idrato $NaOH . H_2O$, perchè è stato trovato che è questo che esiste a 60° [1]: alcune delle linee di coniugazione da noi ottenute non finiscono però nel punto rappresentativo di questo idrato, ma più alto. Ora, data la posizione delle linee di coniugazione, uno spostamento simile risponde in questo caso a variazioni inferiori all'1 %, e in alcuni casi a variazioni del 2 o 3 per mille di B_2O_3 nella soluzione o nel resto. Quando si pensi che noi analizzavamo pochi grammi di soluzione e che si trattava di soluzioni sature di soda caustica a 60° in recipienti di vetro che risultavano notevolmente intaccati a esperienza finita, si vede che per quello che riguarda l'individuazione del corpo di fondo il metodo sarebbe stato perfettamente illusorio. Non così per quello che riguarda la curva di solubilità che era quella che a noi interessava stabilire. Per il corpo di fondo avremmo dovuto istituire esperienze dirette: ma esse esistevano già e stabiliscono, come sopra si è detto, che a 60° si ha il monoidrato $NaOH . H_2O$.

Dalle nostre esperienze risulta che la solubilità della soda caustica in acqua pura a 60° è data da 97.04 di Na_2O in 100 parti di acqua, e questo concorda coi valori che si trovano nelle tabelle.

Dei composti da noi trovati a 60° due non sono stati mai descritti, per quanto ci consta, e cioè l'1-1-1 e il 2-1-1. Del metaborato sono conosciuti idrati diversi, e l'altro idrato esistente a 60°, l'1-1-4, è stato anche trovato nello studio di questo sistema a 30°.

Il composto 2-1-1 è invece nuovo come aggruppamento $Na_2O . B_2O_3$: rappresenta la forma intermedia tra i metaborati e gli ortoborati.

Il composto 1-2-5 non è stato trovato a 30°, ma era già stato descritto da varî autori [2].

Il composto 1-5-10 infine è stato descritto da molto tempo, ed è stato trovato sia nel diagramma a 30°, sia in questo a 60°.

Fisica. — *Sulla depolarizzazione della luce.* Nota del prof. ERNESTO DRAGO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Confr. Landolt-Börnstein Tabellen.

(2) Confr. la Nota I su questo sistema, già citata.

Paleontologia. — *Sopra una nuova forma di Lithothamnium del Post-Pliocene di Brindisi.* Nota della dott.ssa SAMSONOFF ARUFFO, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Patologia vegetale. — *Sul «nerume» o «marciume nero» delle castagne.* Nota preliminare del dott. B. PEYRONEL [1], presentata dal Socio G. CUBONI.

È nota l'importanza grandissima che hanno le castagne per noi italiani. Purtroppo, però, questo frutto gustoso è soggetto a varie alterazioni, che ne rendono difficile la conservazione.

Particolarmente importante per la sua gravità, talora rilevantissima, è quella che, da noi in Italia, è stata studiata dal Peglion, sotto il nome di « nerume delle castagne ».

Questa alterazione è probabilmente nota ai pratici da lungo tempo; tuttavia essa non sembra avere attratto l'attenzione che di pochi scienziati; anzi, per quanto io so, il Peglion [2] sopracitato, nel 1905-6, e, un po' più recentemente, nel 1908, il Bainier [3] in Francia sono i soli autori che l'abbiano studiata con qualche cura.

Le castagne colpite da marciume nero, o nerume che dir si voglia, in generale non si distinguono esternamente da quelle sane; la buccia è per lo più intatta e presenta il colore normale; ma, se si seziona una castagna, la massa cotiledonare appare, tutta o in parte, di color nero-fuligineo. Le castagne colpite sono di sapore sgradevole e affatto immangiabili.

Qual'è la causa del male?

Il Peglion ha riscontrato nelle castagne alterate un micelio fungino che egli crede si debba ascrivere a *Rhacodium cellare* Pers.

Se si tengono delle castagne affette da nerume in camera umida, il micelio si sviluppa in modo straordinario alla loro superficie, formando un denso feltro, alto oltre un centimetro.

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia vegetale. Roma 2 dicembre 1916.

(2) V. Peglion, *Intorno ad un caso di emiparassitismo del Rhacodium cellare* Pers.; Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XIV, 1905, pp. 740-743 - Id., *Il nerume delle castagne.*; L'Italia agricola, XLIII, 1906, pp. 101-103.

(3) G. Bainier, *Mycothèque de l'École de Pharmacie*, XXVI; Bull. Soc. Myc. de France, tome XXIV, 1908, pp. 88-90, pl. IX, figg. 1-5.

Il Peglion ha potuto coltivare tale micelio su diversi sustrati artificiali e, stando a quanto egli afferma nella sua prima Nota in questi Rendiconti, 1905, avrebbe ottenuto abbondanti forme conidiche « richiamanti alla mente le fruttificazioni dei *Cladosporium*, *Hormodendron*, *Cladotrichum*, ecc. ».

Di cotali forme conidiche egli non fa però parola nell'altra Nota ne « l'Italia agricola », 1906.

Il Bainier, invece, avrebbe ottenuto da culture pure, su castagne sterilizzate e su liquirizia, un micelio, il quale sembra bensì presentare le stesse caratteristiche che quello descritto dal Peglion, ma che ha dato, dopo più di quindici giorni, una forma conidica ben definita, che coi *Cladosporium*, *Hormodendron*, ecc. non presenta nessuna affinità morfologica, e alla quale egli dà il nome di *Harziella Castaneae*.

Faccio però subito osservare che il genere *Harziella* appartiene alla famiglia delle Mucedinacee, mentre il fungo in questione, per confessione dell'autore stesso, possiede un micelio schiettamente demaziaceo, « brunâtre ou fuligineux » !

La specie descritta e figurata dal Bainier deve perciò essere trasportata nella famiglia delle Demaziacee ed ascritta ad un genere nuovo, molto probabilmente affine al genere *Stachylidium*.

Da quanto ho fin qui brevemente esposto si può facilmente vedere che le nostre conoscenze su questa alterazione delle castagne sono assai limitate e che molti sono i punti che restano da chiarire.

E, innanzi tutto, dati i diversi resultati culturali (per quanto si riferisce alla forma conidica) ottenuti dai due autori citati, si presenta spontanea la domanda; l'agente del nerume delle castagne è desso uno solo? Il fungo studiato dal Bainier è quello stesso osservato dal Peglion?

Quest'ultimo autore è d'avviso che « questa alterazione delle castagne — talune volte disastrosamente diffusa — proceda da infezione che accade durante la custodia dei frutti stessi in cantine o magazzeni umidi, ove il *Rhacodium cellare* trovi condizioni particolarmente favorevoli di sviluppo ».

Per parte mia, senza negare che quel modo di conservazione faciliti grandemente lo sviluppo del malanno, dubito che l'infezione abbia realmente ivi la sua prima origine.

Ricordo d'aver più volte osservato nelle Valli Valdesi delle castagne presentanti la stessa alterazione e che pure non erano state affatto conservate in magazzini chiusi, ma sibbene su solai semiaperti, sotto i tetti, ove del *Rhacodium cellare* non vi era alcuna traccia, se pure non provenivano addirittura direttamente dall'albero. Credo inoltre d'aver osservato che in certe annate le castagne colpite sarebbero molto più numerose.

Dò naturalmente a queste idee un valore molto relativo, non essendomi finora deliberatamente occupato di questo soggetto.

Come penetra il fungo nella castagna? Il tegumento esterno sembra del tutto intatto. Sembrerebbe perciò logica, a prima vista, la supposizione che l'infezione possa avvenire nella regione, chiamiamola così, « caudicolare » del frutto, ove più facilmente si producono delle lesioni. Se però si spaccano delle castagne non ancora totalmente invase dal fungo, si può facilmente osservare che l'alterazione si verifica in qualunque parte del frutto.

Ora se si ammette che il fungo non sia capace di attraversare la buccia della castagna (il che è però ancora al tutto da chiarire e non lo ritengo neanche probabile) vien fatto di supporre che l'infezione possa avvenire fin dal fiore, che cioè i germi fungini penetrino nell'ovario attraverso lo stigma, producendo uno scarso micelio, che si svilupperebbe poi nel frutto maturo, qualora questo si trovi in opportune condizioni di umidità e di temperatura. Si avrebbe, insomma, a che fare con una vera e propria infezione parassitaria.

In conclusione molti problemi restano da risolvere riguardo a questo grave malanno delle castagne.

Gli è perciò che, anche dietro incitamento del prof. Cuboni, ho ritenuto opportuno di iniziare recentemente delle ricerche allo scopo di recare qualche contributo almeno a qualcuno di tali problemi. Finora ho potuto ottenere delle colture pure su varî sustrati, con abbondantissima formazione di micelio, prima bianco-argentino, poi grigio, quindi olivaceo, ma le colture essendo relativamente giovani, non hanno ancora dato luogo ad alcuna forma fruttifera.

Chimica fisiologica. — *Sugli elementi che condizionano l'attività degli enzimi glicolitici.* I: *Gli enzimi glicolitici del pancreas e i corpuscoli del sangue.* Nota del dott. prof. Ugo Lombroso, presentata dal Socio Luciani.

In alcune indagini sperimentali, eseguite da me e da C. Artom che collabora in questo gruppo di ricerche, avevo osservato che una soluzione di glicosio in liquido di Tyrode, messa in termostato, dopo prolungata circolazione in pancreas sopravvivente, e lasciata ivi per lungo tempo, non modificava il suo contenuto zuccherino. Un fenomeno opposto, e cioè una profonda e rapida distruzione del glicosio, si manifestava allorchè, invece di liquido di Tyrode, si era adoperato, per la circolazione nel pancreas, sangue defibrinato con glicosio.

Su questo fenomeno e sul quesito che ne sorge, non trovo alcun contributo nella letteratura precedente. Numerose invece sono state le indagini sperimentali sulla influenza che estratti di tessuto pancreatico esercitano nella distruzione del glicosio.

A determinare queste ricerche valse la persuasione che andava via via acquistando maggior credito, che la funzione interna del pancreas si esplicasse con l'elaborazione di enzimi glicolitici, i quali, circolando nell'organismo, provvedessero al consumo degli idrati di carbonio nei varî tessuti ed organi. Se non che i risultati ottenuti a questo proposito dai varî autori. sono spesso in disaccordo.

Il Cohnheim, che lungamente si è occupato di tale argomento (1), afferma che il semplice estratto di pancreas possiede una lieve azione glicolitica: così pure l'estratto di tessuto muscolare. Gli estratti di questi due tessuti uniti insieme dimostrerebbero un'azione glicolitica singolarmente più energica, così da far pensare che solo per la cooperazione di questi due fattori si ottenga una glicolisi praticamente importante nel metabolismo degli idrati di carbonio. Questi risultati trovarono piena conferma nei lavori di Hirsch (2), Arnheim e Rosembaum (3), De Meyer (4), Dewitt (5), Hall (6).

Per contrario molti altri studiosi affermarono che nessun effetto glicolitico si ottiene per l'azione separata o simultanea degli estratti di tessuto pancreatico e muscolare: così Embden e collaboratori (7), Rona e Arnheim (8), Claus e Embden (9), Mac Guigan (10). Questi autori attribuiscono i risultati positivi ottenuti dagli altri esperimentatori all'azione di bacteri.

D'altra parte, come ritiene lo stesso Mac Guigan in un lavoro posteriore in collaborazione con Von Hess (11), l'insuccesso delle esperienze, in cui, per premunirsi da tali inquinamenti bacterici, si era fatto uso di toluolo o di cloroformio, può essere dovuto ad una azione paralizzante dell'antisettico sull'enzima glicolitico. Ciò in base ad esperimenti di controllo sulla glicolisi nel sangue ottenuto asetticamente, nei quali l'aggiunta di toluolo e di cloroformio arresta la glicolisi.

Levene e Meyer (12) spiegano la discordanza nei risultati degli autori precedenti, come dovuta probabilmente a più fattori; essi misero in rilievo la grande importanza che nel decorso della glicolisi hanno, non soltanto le condizioni di più o meno perfetta asepsi, ma anche i differenti gradi di con-

(1) Zeitschr. f. physiol. Chem. XXXIX, pag. 336, 1903; ibid., XLII, pag. 401, 1904; ibid., XLIII, pag. 547, 1904-05; ibid., XLVII, pag. 253, 1906.

(2) Hofmeister's Beiträge, IV, pag. 535, 1903.

(3) Zeitschr, f. physiol. Chem. XL, pag 240, 1904.

(4) Arch. intern. de physiol. II, 1905.

(5) Journal of experiment medic. VIII, pag. 193, 1906.

(6) Amer. Journal of physiol., pag. 285, 1907.

(7) Brochem. Zeitschr., XLV, p. 63 e 94, 1912.

(8) Ibid., XLVIII, pag. 35, 1913.

(9) Hofmeister's, Beiträge, pag. 214, 1915.

(10) American Journal of physiol., VXII, pag. 351, 1908.

(11) Amer. Journal of physiol., XXX, pag. 340, 1912.

(12) Journ. of Biol. Chem., XI, pag. 953, 1912.

centrazione dello zucchero, l'alcalinità o acidità della soluzione, le diverse abitudini di vita (carnivori, erbivori) degli animali sperimentati ecc. ecc.

Questi autori ritengono che, nella maggior parte dei casi, anche di ricerche precedenti, si tratta non di una glicolisi, ma di una diminuzione del potere riducente della soluzione zuccherina dovuta a fenomeni di sintesi del glicosio.

Ma un'altra spiegazione può formularsi per interpretare l' insuccesso da noi avuto nelle esperienze *in vitro* sulla glicolisi del liquido di Tyrode circolato nel pancreas; ed è una spiegazione che ci viene suggerita dallo studio delle condizioni necessarie per lo svolgimento della glicolisi nel sangue.

È stato dimostrato che la glicolisi nel sangue non si svolge per l'azione del siero: quest'ultimo può rimanere anche lungamente in termostato con glicosio senza distruggerne affatto.

L'aggiunta della parte corpuscolare è necessaria perchè la glicolisi si svolga (Rona e Döbling) (1).

D'altro lato i corpuscoli senza siero non dimostrano potere glicolitico Mac Leod (2).

La glicolisi dunque è condizionata alla presenza contemporanea di questi due elementi, siero e corpuscoli.

Tutti gli autori poi si accordano nel riconoscere la grande importanza che nel fenomeno della glicolisi esercitano i leucociti, come già asseriva Lépine (3) e come definitivamente dimostrarono Levene e Meyer (4).

Appariva quindi logico di riprendere lo studio del comportamento della glicolisi nelle soluzioni di liquido di Tyrode e glicosio circolate nel pancreas, aggiungendo a tali soluzioni corpuscoli del sangue. Che se con tale disposizione si riusciva a dimostrare che avviene glicolisi, allora potevasi concludere che il pancreas provvede bensì alla formazione di enzimi glicolitici, e li riversa nei liquidi in esso circolanti, ma che il manifestarsi di questi enzimi è condizionato dalla presenza dei corpuscoli del sangue, o forse di qualche altro elemento. Dico di qualche altro elemento perchè *a priori* non si può escludere che esista qualche altro elemento, oltre ai corpuscoli del sangue, capace di esplicare un'azione analoga per lo svolgersi del fenomeno glicolitico.

Nelle esperienze da noi eseguite si esportava il pancreas ad un grosso cane appena ucciso per dissanguamento, e si sottoponeva a circolazione artificiale nell'apparecchio di Lind, usando come liquido di circolazione la soluzione di Tyrode, a cui erasi aggiunto glicosio nella proporzione di circa 1 %.

(1) Biochem. Zeitschr., XXXII, pag. 489, 1911.
(2) Journ. of Biol. Chem., XV, pag. 497, 1913.
(3) Dictionn. de physiol. Ch. Richet, Maçon, Paris.
(4) Journ. of Biol. Chem., XI, pag. 361, 1912.

Il liquido raccolto dopo un'ora di circolazione era messo in termostato con corpuscoli del sangue dello stesso animale ottenuti mediante centrifugazione. Per controllo si serbavano in termostato per un egual tempo un gruppo di provette contenenti il liquido di circolazione senza aggiunta di corpuscoli, ed un altro gruppo di provette contenenti soluzione di Tyrode non circolata, glicosio e corpuscoli di sangue. I dosaggi del glicosio erano eseguiti col metodo di Lehmann Embden.

I.

Cane maschio, kg. 18. — Pancreas peso gr. 20; dopo circolazione gr. 50. Liquido di Tyrode cm.^{3} 220 + gr. 2 glicosio. Durata della circolazione ore 1 $^1/_2$. Pressione 80-100 mm. Hg. Velocità cm.^{3} 12 per minuto.

	Potere riducente mmgr. glicosio
5 cc. liquido prima di circolare	50,9
Appena cessata la circolazione:	
5 cc. liquido dopo la circolazione	49,3
Dopo 3 ore di permanenza in termostato:	
5 cc. liquido circolato	49,3
5 cc. » » + corpuscoli	32,3
Dopo 18 ore di permanenza in termostato:	
5 cc. liquido circolato	47,0
5 cc. » » + corpuscoli	19,3
5 cc. » » » dopo idrolisi con HCl	23,0

II.

Cane maschio, kg. 25. — Pancreas peso gr. 50; dopo circolazione gr. 70. Liquido di Tyrode cm.^{3} 200 + glicosio gr. 2. Durata della circolazione 1 ora. Pressione 60-80 mm. Hg. Velocita cm.^{3} 18 per minuto.

	Potere riducente mmgr. glicosio
Appena cessata la circolazione:	
5 cc. liquido non circolato	47,9
5 cc. liquido circolato	45,9
Dopo 3 ore di permanenza in termostato:	
5 cc. liquido circolato	45,9
5 cc. » » + corpuscoli	45,9
5 cc. » non circolato + corpuscoli	47,9
Dopo 6 ore di permanenza in termostato:	
5 cc. liquido circolato	45,9
5 cc. » » + corpuscoli	39,1
5 cc. » non circolato + corpuscoli	47,9
Dopo 20 ore di permanenza in termostato:	
5 cc. liquido circolato	45,9
5 cc. » » + corpuscoli	12,5
5 cc. » non circolato + corpuscoli	47,0

III.

Cane maschio, kg. 20. — Pancreas peso gr. 30; dopo circolazione gr. 55. Liquido di Tyrode cm.³ 200 + glicosio gr. 2. Durata della circolazione ore 1 ½. Pressione 80-100 mm. Hg. Velocità media cm.³ 10 per minuto.

	Potere riducente mmgr. glicosio
Appena cessata la circolazione:	
5 cc. liquido non circolato	46,3
5 cc. » circolato	45,7
Dopo 5 ore di permanenza in termostato:	
5 cc. liquido circolato	45,7
5 cc. » » + corpuscoli	38,6
5 cc. » non circolato + corpuscoli	44,5
Dopo 20 ore di permanenza in termostato;	
5 cc. liquido circolato	45,2
5 cc. » » + corpuscoli	24,2
5 cc. » non circolato + corpuscoli	36,8
5 cc. » circolato + corpuscoli, idrolizzato con HCl	27,5
5 cc. » non circolato + corpuscoli, idrolizzato con HCl	38,4

Dalle precedenti esperienze risulta che:

1° Soluzioni di glicosio in liquido di Tyrode circolato nel pancreas e quindi poste in termostato non diminuiscono il loro contenuto in glicosio.

2° Se a dette soluzioni si aggiungono corpuscoli del sangue, allora si avverte una profonda diminuzione del potere riducente per una vera distruzione del glicosio, e non già per una semplice condensazione molecolare di esso.

3° Corpuscoli di sangue aggiunti a soluzioni di glicosio in liquido di Tyrode non circolato in pancreas, non modificano, come nel caso precedente, il contenuto in glicosio.

Questi risultati sono molto interessanti in quanto dimostrano che il pancreas anche in queste condizioni sperimentali, così poco vicine a quelle naturali. immette nel liquido circolante un enzima glicolitico, ma che detto enzima per manifestare la sua attività ha bisogno della presenza e collaborazione di altri fattori, che, nel presente caso, sono rappresentati da corpuscoli del sangue.

È da ricercarsi con altre esperienze se soltanto questi elementi figurati, o se invece anche altri, siano sufficienti allo svolgersi della glicolisi (come io ritengo più probabile anche in base al dato di fatto, che durante la circolazione nel pancreas si distrusse glicosio, ma che lo stesso liquido circolato messo da solo in termostato, non agisce più sul glicosio, probabilmente perchè non collaborano più gli elementi cellulari del pancreas).

Così pure sono da sottoporre ad una revisione completa, e con la disposizione sperimentale suggerita dal risultato delle presenti esperienze, le anteriori affermazioni, secondo le quali gli estratti pancreatici ed il secreto pancreatico esterno non sono capaci di determinare una glicolisi; affermazioni che, specialmente per ciò che riguarda il secreto pancreatico esterno, hanno costituita la base della importante dottrina che ha stabilito una distinzione essenziale tra la funzione esterna e quella interna del pancreas.

Su tali quesiti sono in corso esperienze sulle quali riferiremo in una prossima Nota.

Chimica fisiologica. — *Sul metabolismo del glicosio in organi sopravviventi.* II: *Azione del pancreas sul glicosio in esso circolante.* Nota di CAMILLO ARTOM, presentata dal Socio L. LUCIANI.

In una Nota precedente (1) è stata messa in rilievo l'importanza di uno studio sistematico del ricambio del glicosio nei varî organi col metodo delle circolazioni artificiali. Infatti solo con una simile disposizione sperimentale noi possiamo con sufficiente approssimazione valutare la parte che ciascun organo esercita nei fenomeni del metabolismo complessivo, e ci avviamo quindi ad una più esatta conoscenza del meccanesimo intimo, secondo cui questi fenomeni si svolgono.

Ora fra tutti gli organi il pancreas ci offre un interesse particolarissimo per essere studiato da un tal punto di vista; basta pensare che esso per la sua duplice funzione esterna ed interna ha un'importanza essenziale nel ricambio degli idrati di carbonio, di cui promuove o condiziona la digestione, l'assorbimento e il consumo da parte dei singoli tessuti.

Pure di ricerche eseguite facendo circolare nel pancreas soluzioni zuccherine, non trovo menzione nella letteratura. C'è invece tutta una fioritura di lavori, nei quali è stata studiata l'azione sopra il glicosio della polpa di pancreas sminuzzato ovvero degli estratti di quest'organo, ottenuti con la pressa di Buchner.

Blumenthal (2) per il primo notò uno svolgimento di anidride carbonica per azione di un estratto di pancreas sopra una soluzione di glicosio; e ne indusse che nell'estratto pancreatico si contengono enzimi glicolitici. Ma Umber (3) che ripetè queste ricerche, giunse a risultati affatto negativi, e considerò come dovuto ad azioni batteriche il reperto di Blumenthal. Herzog (4) invece riscontrò egli pure in analoghe condizioni sperimentali uno

(1) U. Lombroso, Rend. Accad. Lincei, questo volume pag. 390.
(2) Blumenthal, Zeitschr. f. diät. u. physiol. Therap., Bd. 2.
(3) Umber, cit. da Arnheim e Rosenbaum, Zeitschr. f. physiol. Chem. XL, pag. 221 (1903).
(4) Herzog, Hofmeister's Beiträg. z. exp. Physiol. u. Path. 2 H. S, 1-2.

svolgimento di anidride carbonica. Arnheim e Rosenbaum [1] notarono da parte dell'estratto di pancreas una vera azione glicolitica e una produzione corrispondente di anidride carbonica; tale azione glicolitica è sensibilmente maggiore che non sia quella analoga di un estratto di fegato e di muscolo. Anche Stoklasa [2] misurando con uno speciale apparecchio la produzione di anidride carbonica e di alcool per azione di estratti di organi sopra soluzioni di glicosio, conchiuse per un'azione glicolitica molto intensa dell'estratto di pancreas.

Cohnheim [3] in base a interessantissime ricerche sperimentali, affermò che l'azione glicolitica è molto scarsa o nulla da parte del solo estratto di pancreas o del solo plasma di muscolo; ma viene ad essere grandemente esaltata, quando si uniscono alla soluzione zuccherina estratto di pancreas e plasma muscolare contemporaneamente. Il lavoro di Cohnheim è stato l'origine di una serie numerosa di altre ricerche sperimentali che in parte ne confermarono e in parte ne oppugnarono i risultati. Così giunsero a risultati perfettamente identici Hirsch [4], De Meyer [5], Dewitt [6], Hall [7] e lo stesso Cohnheim in lavori successivi [8]. Ottennero invece risultati affatto negativi Embden [9], Rona e Arnheim [10], Claus ed Embden [11], Mac Guigan [12].

Levene e Meyer in un primo lavoro [13] ripeterono le esperienze di Cohnheim, e ne confermarono i risultati; ma trovarono che la diminuzione del potere riducente, ottenuta per l'azione combinata del plasma muscolare e dell'estratto pancreatico sopra una soluzione di glicosio, scompare in secondo tempo, facendo bollire il miscuglio con acido cloridrico diluito.

Non si tratterebbe dunque di vera distruzione del glicosio, ma solo di una sua condensazione molecolare.

In un secondo lavoro [14] gli stessi autori, sperimentando l'azione sul glicosio di estratti e succhi di tessuti di varî organi, separatamente o varia-

(1) Arnheim e Rosenbaum, loc. cit.

(2) Stoklasa, Pflüger's Arch. CI, pag. 311 (1904).

(3) Cohnheim. Zeitschr. f. physiol. Chem. XXXIX, pag. 336 (1903).

(4) Hirsch, Hofmeister's Beitr. IV, pag. 535 (1903).

(5) De Meyer, Arch. intern. de physiol., II, pag. 131 (1905).

(6) Dewitt, Journ. of exp. medic., VIII, pag. 193 (1906).

(7) Hall, Amer. Journ. of Physiol., XVIII, pag. 283 (1907).

(8) Cohnheim, Zeischr. f. physiol. Chem., XLII, pag. 401 (1904); XLIII, pag. 547 (1904-05). XLVII, pag. 253 (1906).

(9) Embden, Biochem. Zeitschr., XLV, pp. 63 e 94 (1912).

(10) Rona e Arnheim, ibid., XLVIII, pag. 35 (1913).

(11) Claus ed Embden, Hofmeister's Beitr., VI, pag. 214 (1905).

(12) Mac Guigan, Amer, Journ. of Physiol., XI (1908).

(13) Levene e Meyer, Journ. of Biol Chem., IX, pag. 97 (1911).

(14) Levene e Meyer, Journ. of Biol. Chem., XI, pag. 353 (1912).

mente combinati. ebbero risultati positivi col miscuglio di plasma muscolare e estratto pancreatico di coniglio; trovarono invece che lo stesso miscuglio è inefficace sul glicosio, quando per ottenere gli estratti o il plasma si adoperino tessuti di cane.

Essi spiegarono la discrepanza notevole fra i risultati dei varî sperimentatori che presero a controllare i risultati di Cohnheim, con le differenti condizioni di concentrazione, di alcalinità e di acidità della soluzione zuccherina, con le differenti specie di animali da cui furono prelevati i tessuti adoperati nelle esperienze, e infine con le differenti precauzioni usate per difendersi dalle contaminazioni batteriche e guarentire lo svolgimento asettico delle reazioni.

Dalla lettura dei lavori citati, che conducono a risultati così opposti, non ci pare che sia possibile farci un concetto chiaro sulla esistenza reale o meno dell'attitudine del pancreas a consumare il glicosio, tanto più che la disposizione sperimentale adottata dai precedenti autori è così grossolanamente lontana dalle condizioni, in cui si svolgono i fenomeni del metabolismo degli idrati di carbonio « in vivo », che nessuna sicura induzione, crediamo, se ne potrebbe trarre per estenderla all'organo integro e irrorato di sangue, continuamente in esso circolante.

Ci è dunque sembrato che l'interessante problema potesse essere assai meglio chiarito, sottoponendo il pancreas isolato a circolazioni artificiali con sangue o liquido di Tyrode, contenenti glicosio in concentrazione relativamente forte.

Sceglievo per i miei esperimenti cani di grossa taglia, e li dissanguavo rapidamente dalla carotide: quindi estraevo il pancreas, innestavo una cannula nell'arteria duodenale-pancreatica, e ponevo l'organo nell'apparecchio di Linde. La frazione di pancreas che non era irrorata (il *processus uncinatus*) era serbata come campione per il disaggio degli idrati di Carbonio nell'organo prima di essere sottoposto a circolazione. Con pinze ricurve a pressione escludevo dalla circolazione il segmento di duodeno aderente al pancreas. In una serie di esperienze facevo circolare nel pancreas il sangue defibrinato dello stesso animale, dopo di avervi aggiunto glicosio in ragione del $^1/_2$-1 $^0/_0$ circa; in un'altra serie adoperavo per la circolazione liquido di Tyrode, contenente anch'esso il $^1/_2$-1 $^0/_0$ di glicosio, nell'intento di vedere quali modificazioni apportasse ai fenomeni metabolici la sostituzione di un liquido fisiologico al sangue. I dosaggi del glicosio erano eseguiti col metodo di Lehmand-Emden, previa precipitazione con ferro colloidale quando si circolava con sangue.

Nell'organo i dosaggi venivano eseguiti sugli estratti, ottenuti facendo lungamente bollire il tessuto sminuzzato con una soluzione diluita di acido cloridrico.

I.

Cane maschio Kg. 31. Circolazione con sangue cm.^{3} 200 + glicosio $^1/_2$ $^0/_0$. Peso dell'organo posto a circolare gr. 65, dopo circolazione gr. 70. Pressione media 60-80 mm. Hg. Velocità media di circolazione per minuto cm.^{3} 6. Durata della circolazione 1 ora $^1/_4$.

Per 10 cm.^{3} sangue	prima della circolazione	=	mmgr.	49,3	glicosio
» » »	id. idrolizzato con HCl	=	»	54.3	»
» » »	dopo la circolazione	=	»	32.3	»
» » »	id. idrolizzato con HCl	=	»	32.3	»
» 10 gr. organo	non sottoposto a circolazione	=	»	102	»
» » »	sottoposto a »	=	»	101	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue dopo la circolazione mmgr. [1086 — 629.9 =] 456.1 glicosio; se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. [707 — 663] = 44. Deficit assoluto mmgr. 412.1.

II.

Cane maschio Kg. 18. Circolazione con sangue cm.^{3} 250 + glicosio 1 $^0/_0$. Peso dell'organo posto in circolazione gr. 25, dopo circolazione gr. 28. Pressione media di circolazione 50-70 mm. Hg. Velocità media di circolazione per minuto cm.^{3} 5. Durata della circolazione 1 ora $^1/_4$.

Per 10 cm.^{3} sangue	prima della circolazione	=	mmgr.	97.7	glicosio
» » »	dopo la »	=	»	80.4	»
» 10 gr. »	non sottoposto a »	=	»	85	»
» » »	sottoposto a »	=	»	80	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue dopo la circolazione mmgr. [2442.5 — 1986 =] 456.5 glicosio. Se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. [224 — 212] = 12. Deficit assoluto mmgr. 444,5.

III.

Cane maschio Kg. 20. Circolazione con sangue cm.^{3} 200 + glicosio $^1/_2$ $^0/_0$. Peso dell'organo posto in circolazione gr. 28, dopo circolazione gr. 40. Pressione media di circolazione 60-80 mm. Hg. Velocità media di circolazione per minuto cm.^{3} 5. Durata della circolazione 1 ora $^1/_2$.

Per 10 cm.^{3} sangue	prima della circolazione	=	mmgr.	54.4	glicosio
» » »	dopo la »	=	»	48.1	»
» 10 gr. organo	prima della »	=	»	50.1	»
» » »	dopo la »	=	»	44.2	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue dopo la circolazione mmgr. [1088 — 904.3] = 183.7. Se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. [176.8 — 140] = 36.8. Deficit assoluto mmgr. 146,9.

IV.

Cane maschio Kg. 18. Circolazione con sangue cm.^{3} 300 + glicosio 1 $^0/_0$ Peso dell'organo posto a circolare gr. 35, dopo circolazione gr. 40. Pressione media 60-80 Hg. mm. Velocità media di circolazione per minuto cm.^{3} 6. Durata della circolazione 1 ora e $^1/_2$.

Per 10 cm.³ sangue prima della circolazione	=	mmgr.	102.4 glicosio
» » » dopo la »	=	»	100.8 »
» 10 gr. organo non sottoposto a »	=	»	118.7 »
« » » sottoposto a »	=	»	117.8 »

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue dopo la circolazione mmgr. [3072 — 2973.6] = 99.4 glicosio, se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. [471.2 — 415 5] = 55.7 glicosio. Deficit assoluto mmgr. 43.7.

V.

Cane femmina Kg. 8,5. Circolazione con liquido di Tyrode cm.³ 300 + glicosio 1 %. Peso dell'organo posto in circolazione gr. 20, dopo circolazione gr. 45. Pressione media di circolazione 60-80 mm. Hg. Velocità media di circolazione per minuto cm.³ 10. Durata della circolazione 1 ora e 1/2.

Per 10 cm.³ liquido prima della circolazione	=	mmgr.	44.1 glicosio
» » » dopo la »	=	»	42.5 »
» 10 gr. organo non sottoposto a »	=	»	80 »
» » » sottoposto a »	=	»	54.1 »

Complessivamente si ritrovano in meno nel liquido dopo la circolazione mmgr. [882 — 742.8] = 139.2 glicosio. Se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. [243.5 — 160] = 83.5. Deficit assoluto mmgr. 55.7.

VI.

Cane maschio Kg. 18. Circolazione con liquido di Tyrode cm.³ 220 + glicosio 1 %. Peso dell'organo posto a circolare gr. 20, dopo circolazione gr. 50. Pressione media 40-60 Hg. mm. Velocità di circolazione per minuto cm.³ 12. Durata della circolazione 1 ora e 1/2.

Per 10 cm.³ liquido prima della circolazione	=	mmgr.	101.8 glicosio
» » » dopo la »	=	»	98.6 »
» 10 gr. organo non sottoposto a »	=	»	91.8 »
» » » sottoposto a »	=	»	78.2 »

Complessivamente si ritrovano in meno nel liquido dopo la circolazione mmgr. [2239.6 — 1873.4] = 366.2 glicosio; se ne ritrovano in più nell'organo dopo circolazione mmgr. [391 — 183.6] = 207.4. Deficit assoluto mmgr. 158.8 glicosio.

VII.

Cane maschio Kg. 20. Circolazione con liquido di Tyrode cm.³ 200 + glicosio 1 %. Peso dell'organo posto a circolare gr. 50, dopo circolazione gr. 70. Pressione media 50-70 mm. Hg. Velocità media di circolazione per minuto cm.³ 10. Durata della circolazione 1 ora.

Per 10 cm.³ liquido prima della circolazione	=	mmgr.	105.4 glucosio
» » » dopo la »	=	»	101. »
» 10 gr. organo non sottoposto a »	=	»	71.5 »
» » » sottoposto a »	=	»	107.6 »

Complessivamente si ritrovano in meno nel liquido dopo la circolazione mmgr. [2308 — 1818] = 490 glicosio; se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. [753,2 — 357,5] = 395.7. Deficit assoluto mmgr. 94.3 glicosio.

VIII.

Cane maschio Kg. 21. Circolazione con liquido di Tyrode cm.³ 200 + glicosio 1 %. Peso dell'organo posto a circolare gr. 30, dopo circolazione gr. 55. Pressione media

Hg. mm. 60-80. Velocità media di circolazione per minuto cm.^{3} 12. Durata della circolazione 1 ora e $^1/_2$.

Per 10 cm.^{3} liquido prima della circolazione	=	mmgr.	93.8 glicosio
» » » dopo la »	=	»	91.4 »
» 10 gr. organo non sottoposto a »	=	»	47.8 »
» » » sottoposto a »	=	»	69.8 »

Complessivamente si ritrovano in meno nel liquido dopo la circolazione mmgr. [1876 – 1599.5] = 276.5 glicosio; se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. [383,9 — — 143.4] = 240.5. Deficit assoluto mmgr. 36 glicosio.

Dalle riferite ricerche appare che:

facendo circolare in pancreas di cane sangue contenente glicosio, si ha sempre una diminuzione del potere riducente del sangue, che è varia da caso a caso e che può raggiungere anche il 50 % circa;

il contenuto in idrati di C del pancreas aumenta generalmente nelle circolazioni con sangue, peraltro non in misura tale da giustificare la corrispondente scomparsa di glicosio dal sangue; ne giustifica al più il 55 %;

anche facendo circolare in pancreas di cane soluzione di Tyrode contenente glicosio, si ha sempre diminuzione del potere riducente del liquido; tale diminuzione varia da caso a caso; è generalmente molto inferiore a quella corrispondente osservata nelle circolazioni con sangue, e può raggiungere al più il 24 % circa;

il contenuto in idrato di C del pancreas aumenta nelle circolazioni con liquido di Tyrode; e tale aumento, sebbene sia sempre inferiore alla corrispondente diminuzione del potere riducente del liquido di circolazione, ne giustifica però una buona parte, talora anche più dell'85 %.

Anche per il pancreas dunque, come già si è dimostrato per l'intestino, il consumo del glicosio è notevolmente più rivelante nelle circolazioni con sangue che in quelle con liquido di Tyrode.

È bensì vero che una tale differenza non è sempre così sensibile e costante, come nelle corrispondenti esperienze di circolazione artificiale dell'intestino isolato; ma giova notare che il tessuto pancreatico è assai meno resistente e meno vitale che il tessuto intestinale, ed è quindi anche meno facile di mantenere, in condizioni di esperimento così artificiali, i suoi elementi cellulari in uno stato di piena integrità funzionale.

Ci sembra, ad ogni modo, di poter sicuramente concludere, del complesso delle nostre esperienze, che il pancreas isolato è capace di distruggere il glicosio, sciolto nel sangue o nel liquido di perfusione, indipendentemente dal concorso di altri elementi. Questa attitudine glicolitica del tessuto pancreatico è tanto maggiore, quanto più ci avviciniamo, nella nostra disposizione sperimentale, alle condizioni, in cui si trova il tessuto nell'organismo vivente.

Parassitologia. — *Ancora per la lotta contro le Arvicole.* Nota del prof. ALFONSO SPLENDORE, presentata dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

1. ZAPPA. *Differenze sistematiche tra il Catalogo fondamentale di Newcomb e quello di Auwers.* Pres. dal Socio MILLOSEVICH.

2. NAZARI. *Chiazze e noduli pigmentali emosiderinici dell'epicardio.* Pres. dal Socio MARCHIAFAVA.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio GRASSI (relatore), a nome anche del Corrisp. RUFFINI, legge una relazione sulla Memoria del prof. G. LEVI, intitolata: *Connessioni e strutture degli elementi nervosi sviluppati fuori dell'organismo*, concludendo per la pubblicazione del lavoro nei volumi accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Aperta la seduta e letto ed approvato il verbale dell'adunanza precedente, il Presidente prof. RÒITI ringrazia i Colleghi per l'atto di benevola fiducia accordatogli nel volerlo, senza suoi meriti, quale Vicepresidente dell'Accademia. Sentesi sgomento quando pensa ai nomi illustri di SELLA, BRIOSCHI e BELTRAMI, che onorarono l'Accademia nelle loro rispettive Presidenze. Volge parole di ammirazione e di gratitudine al senatore BLASERNA, che, col suo tatto e con la sua autorità, tanto giovò all'incremento della Accademia, e così efficacemente concorse a sistemare e migliorare anche le condizioni economiche di essa, proprio nel tempo che queste avevano subìto grave falcidia; seguendo in ciò le tracce indicate dal sagacissimo Amministratore, il defunto Collega TACCHINI.

La Classe applaude alle parole del suo Presidente.

Il senatore Blaserna ringrazia di quanto volle dire il Presidente Ròiti ed è soddisfatto di cedere l'Accademia al suo successore, questa trovandosi veramente in buone condizioni economiche; aggiunge che da parte sua egli sarà lieto di continuare a prestar tutta l'opera propria a vantaggio dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci stranieri Darboux e Lockyer; un *Catalogo* delle pubblicazioni del Socio Torquato Taramelli in 53 anni della sua vita scientifica, edito a cura del Comitato Bergamasco per le onoranze al Socio predetto; e la continuazione delle *Carte fotografiche del cielo* per il parallelo + 55, della Specola vaticana. Lo stesso Segretario fa inoltre particolare menzione del volume offerto dal Socio senatore prof. Foà, contenente i *Lavori dell' Istituto di Anatomia patologica della R. Università di Torino*, pubblicati durante gli anni scolastici 1913-915.

AFFARI DIVERSI

L'Accademico Segretario Millosevich, su invito del Presidente, comunica alla Classe i telegrammi di ringraziamento fatti inviare dalle LL. MM. il Re e la Regina Madre in ringraziamento degli augurî trasmessi dall'Accademia in occasione dei Loro rispettivi Genetliaci.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA
presentate nella seduta del 3 dicembre 1916.

Catalogo delle pubblicazioni dell' ill.mo prof. di geologia Torquato Taramelli dall'anno 1863 al 15 ottobre 1916. Bergamo, 1916. 8°, pp. 1-67.

DARBOUX G. — Mémoire sur une classe de surfaces de quatrième classe qui sout corrèlatives des surfaces du quatrième ordre a conique double et admettent pour courbe double le cercle de l'infini. Paris, 1916. 4°, pp. 1-69.

DUPARC L. et GROSSET A. — Étude comparée des gites platinifères de la Sierra de Ronda et de l'Oural. (Estr. des « Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève », vol XXXVIII, pp. 253-290). Genève, 1916. 4°.

DUPARC L. et TIKANOWITCH M. — Recherches géologiques et pétrographiques sur l'Oural du nord, le bassin des rivières Wagrau et Kakwa (Estr. des « Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève », vol. XXXVIII, pp. 69-168) Genève, 1914. 4°.

FOÀ P. — Lavori dell' istituto di anatomia patologica della R. Università di Torino (Anni scolastici 1913 1915). Torino, 1916, 8°.

GROSSET A. et DUPARC L. — Étude comparée des gites platinifères de la Sierra de Ronda et de l'Oural (Estr. des « Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. vol. XXXVIII, pp. 253-290). Genève, 1916. 4°.

Junta de ciencies naturals. — Anuari 1916. Barcelona, 1916. 8°, pp. 1-325.

LOCKYER N. — On the Oxy-hydrogen Flame Spectrum of Iron (From the « Proceedings of the Royal Society », A. vol. XCII. pp. 260-266). S. l., 1916. 8°.

MERLAC A. H. — De la création des planètes. Toulouse, 1915, 12°, pp. 1-52.

Per le onoranze al Concittadino Torquato Taramelli celebratesi in Bergamo nel novembre 1916. Bergamo, 1916. 8°, pp. 1-11.

SABOT R. — Étude cristallographique et optique d'un certain nombre de minéraux des pegmatites de Madagascar et de minéraux de l'Oural. Genève, 1914. 8°, pp. 1-138.

TIKANOWITCH M. et DUPARC L. — Recherches géologiques et pétrographiques sur l'Oural du nord, le bassin des rivières Wagrau et Kakwa (Estr. des « Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève » vol. XXXVIII, pp. 69-168). Genéve, 1914. 4°.

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

AFFARI DIVERSI

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 dicembre 1916.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

(Segue in terza pagina).

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 12.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 dicembre 1916.

Volume XXV.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 dicembre 1916.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni. Al prof. E. Almansi.* Nota del Socio C. Somigliana.

Poichè l'egregio Collega prof. E. Almansi risponde in questi Rendiconti, pag. 191, ad *Alcune osservazioni sulla teoria delle distorsioni* da me pubblicate nel « Nuovo Cimento » (marzo-aprile 1916) mi è necessario riassumere, anche in questa sede, i termini della questione.

Questa riguarda il paragrafo primo di una Memoria della sig.na G. Armanni, inserita nel « Nuovo Cimento » (novembre-dicembre 1916), paragrafo che è di una così perspicua chiarezza, che niun dubbio può sorgere circa il suo significato. Eccolo per intero:

« § 1. — Nella ordinaria teoria della elasticità, in cui le deformazioni « sono supposte infinitesime, si dimostra che un solido elastico, sul quale non « agiscono forze di massa, nè tensioni superficiali, non può conservarsi in « equilibrio in uno stato di deformazione, se lo spazio occupato dal solido è « semplicemente connesso.

« Ma, come ha dimostrato nelle sue importanti ricerche il prof. Volterra, « se il corpo occupa uno spazio a connessione multipla, esso può trovarsi in « equilibrio, in uno stato di deformazione regolare, pur essendo nulle le forze « esterne. Le componenti di spostamento sono allora funzioni polidrome [1].

« Se però dalle deformazioni infinitesime passiamo a considerare defor« mazioni finite, si riconosce che un solido elastico può trovarsi in equilibrio

[1] *Sur l'équilibre des corps multiplement connexes* Ganthier-Willars, Paris 1907).

« in uno stato di deformazione, anche se lo spazio occupato è semplicemente « connesso, se le forze esterne sono nulle, e se gli spostamenti sono mono- « droni: ciò che mi propongo di dimostrare con un esempio ».

Dei tre periodi di cui si compone questo paragrafo, nessuna obiezione può farsi al secondo, che richiama nella forma solita, il ben noto risultato del Volterra.

Dagli altri due periodi invece risulta un modo di considerare le teorie precedenti a quella svolta dall'A. che non concorda con alcuni miei recenti risultati. E difatti si afferma nel primo, in via assoluta e senza limitazione di sorta, che non esistono nella ordinaria teoria dell'elasticità deformazioni senza intervento di forze esterne pei corpi semplicemente connessi. E nel terzo periodo, in concordanza col primo, si indica una via per ritrovare tali deformazioni, nell'abbandono del concetto fondamentale della teoria classica, cioè che gli spostamenti siano infinitesimi.

Ora ecco come stanno realmente le cose. Il teorema sopracitato della non esistenza delle deformazioni senza forze nei corpi semplicemente connessi, si può dimostrare *qualora si facciano certe ipotesi circa la continuità della deformazione*, come ha fatto vedere il prof. Volterra. Ma, in diversi lavori recenti, io ho potuto provare che, allargando quelle ipotesi, senza incontrare difficoltà dal punto di vista meccanico e senza punto abbandonare la teoria classica, si arriva ad un risultato opposto, e cioè che sono perfettamente possibili deformazioni senza intervento di forze esterne anche nei corpi semplicemente connessi. Il che concorda anche assai meglio coi fatti d'osservazione.

Ora di tutto ciò non si parla nel paragrafo riportato dalla Memoria di cui è quistione; vi si afferma, anzi, il contrario. Era quindi legittimo che io richiamassi l'attenzione su quello che effettivamente è lo stato attuale della teoria. E ciò feci colle *Osservazioni* alle quali si accenna in principio.

Credo di aver esposto con completa obiettività, per quanto sommariamente, lo stato della quistione. E dopo questo ritengo superfluo entrare in un particolareggiato esame delle considerazioni del prof. Almansi, sia perchè essi riguardano più direttamente la ricerca della sig.^{na} Armanni, di cui io non contesto l'interesse, sia perchè da una lettera che Egli cortesemente m'invia, e di cui mi autorizza a pubblicare alcuni brani risulta che il disaccordo fra noi è, in buona parte, scomparso. Il prof. Almansi mi scrive infatti:

. . . .

« Dalle osservazioni che Ella gentilmente mi comunica intorno alla mia « Nota: *La teoria delle distorsioni e le deformazioni finite dei solidi « elastici* apparisce che solo in un punto permane il disaccordo nei nostri « apprezzamenti sulla Memoria della sig.^{na} Armanni.

« È certo che nel primo periodo di questa Memoria conveniva precisare « di quale natura sono le deformazioni che, nelle condizioni indicate, non possono aver luogo. L'averlo omesso ha potuto farle credere che all'A. non fossero presenti i risultati da Lei ottenuti sulle distorsioni dei corpi semplicemente connessi. Ma quanto alla natura delle deformazioni di cui l'A. vuole « intraprendere lo studio, essa risulta chiaramente, a mio parere, dal terzo « periodo dello stesso primo paragrafo. Si tratta di deformazioni che non rientrano nella classe delle distorsioni, e la cui trattazione teorica esige, come « ho osservato nella mia Nota, che si abbandoni il concetto di deformazione « infinitesima.

. . . .

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* IX (parte 2ª): *Azione dei gas della respirazione sui muscoli lisci* (1). Nota del Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI.

2. *Tubo digerente.* — Ho già accennato brevemente ai risultati delle ricerche da me fatte sull'esofago di pulcino (2). Quelle, di cui ora riferisco i risultati, riguardano particolarmente i varî tratti d'intestino (tenue, colon e retto) di cane, di gatto e di cavia.

Generalmente, l'aggiunta di una certa quantità di CO_2 all'O_2 (1 parte di CO_2 e 4 parti di O_2) gorgogliante per il liquido di Ringer, ha per effetto una più o meno cospicua depressione del tono, accompagnata da diminuzione in altezza delle contrazioni ritmiche o da abolizione di esse. Se però, a un certo momento, si torna a far gorgogliare solo ossigeno, gradatamente il tono si eleva di nuovo e si ripristinano le contrazioni ritmiche del preparato.

Alternando il gorgogliamento dell'ossigeno e del miscuglio di acido carbonico e ossigeno, si possono provocare variazioni periodiche (oscillazioni) del tono e dell'altezza delle contrazioni ritmiche, quali si veggono nei due tracciati della fig. 1. In questo caso, non si ottenne mai totale abolizione delle contrazioni ritmiche, le quali risentirono meno del tono l'influenza dell'acido carbonico.

Nell'esperimento, durante il quale raccolsi i tracciati della fig. 2, invece di aggiungere CO_2, mi limitai a sospendere per un certo tempo il passaggio dell'ossigeno (in 1 del tracciato II.), onde il preparato venne a trovarsi da quel momento in condizioni di progressiva asfissia. L'effetto fu una

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.
(2) Ved. Nota IX (parte 1ª), in questi Rendiconti, fasc. X, 2° sem. 1916, pag. 349.

(Riduz. a un terzo).

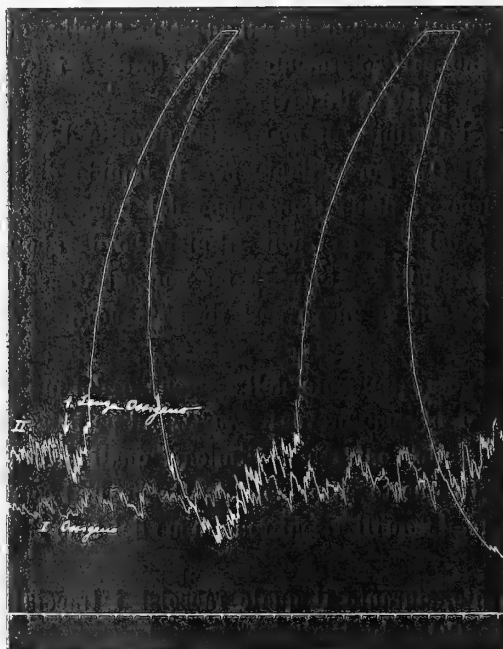
Fig. 1. — Intestino tenue di cane giovanissimo; preparato lungo 3 cm. Temper.: 38°C. Peso: gr. 3. Tempo: 1'. A sinistra di 1. gorgogliava per il liquido di Ringer solo ossigeno. — In 1. si fa gorgliare un miscuglio di 4 vol. O_2 e 1 vol. CO_2; in 2. solo ossigeno; in 3. un miscuglio di 4 vol. O_2 e 1 vol. CO_2; in 4. solo ossigeno; in 5. si fa gorgoliare come in 1. e 2; in 7. come in 1. e 2; in 8. solo ossigeno (18 marzo 1916).

(Riduz. a metà).

Fig. 2. — Striscia d'intestino tenue di cane, immersa in liquido di Ringer ossigenato (tracciato I.). — In 1. del tracciato superiore (II.) si fa cessare il passaggio dell'ossigeno: appariscono subito violente contratture periodiche, che durano per molto tempo. Temper.: 33°C. Peso: gr. 6. Tempo: 1'. (11 marzo 1914).

mediocre depressione del tono e la comparsa di violente contratture periodiche (tanto alte, che la leva raggiungeva, al massimo della sua elevazione, la vite d'arresto), le quali durarono per molto tempo, anche dopo la somministrazione dell'ossigeno (parte di tracciato non riprodotta). Queste con-

(Riduz. a metà).

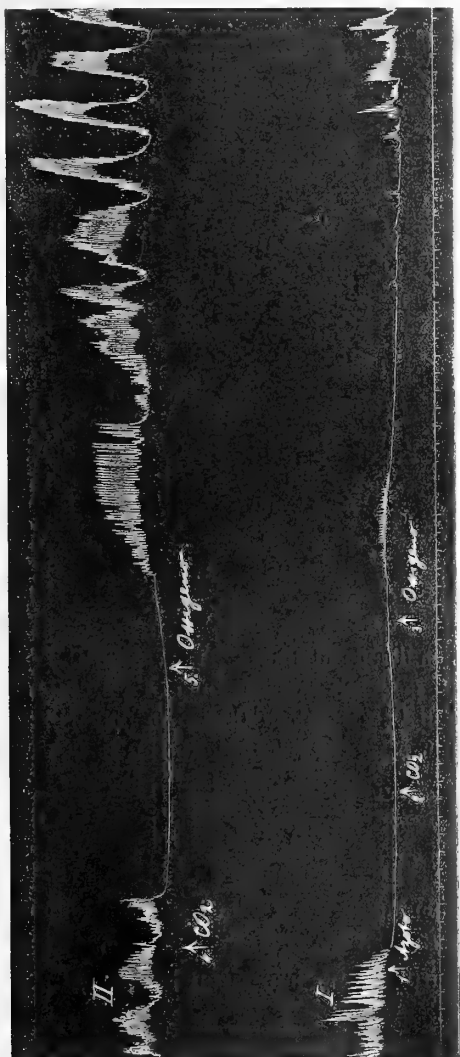



Fig. 3 — Intestino tenue di gatto, immerso in liquido di Ringer, della lunghezza di cm. 4. Il tracciato II. fa seguito al tracciato I. A sinistra di 1. per il liquido di Ringer gorgogliava ossigeno. — In 1. si fa gorgogliare solo azoto; in 2. solo acido carbonico; in 3. solo ossigeno; in 4. solo acido carbonico; in 5. solo ossigeno. Temper.: 39° C. Peso: gr. 5. Tempo: 1'. **(17 marzo 1916).**

tratture spasmodiche ricordano l'effetto dell'asfissia da varii autori constatato nell'intestino, lasciato in *situ*, dell'animale asfissiato, e da loro descritto come intensificazione delle contrazioni peristaltiche. L'esperimento, di cui parlo, fu fatto a temperatura relativamente bassa e sopra una striscia d'intestino, anzichè sull'intestino intero. Ma queste condizioni non contribuirono

di certo a determinare il fenomeno descritto, perchè l'ho poi osservato in altri esperimenti fatti in condizioni diverse.

L'espulsione dei gas (ossigeno e acido carbonico) dal liquido di Ringer, mediante una corrente di azoto, produce un effetto simile a quello del gorgogliamento dell'acido carbonico, solo o mescolato con ossigeno, come dimostrano i due tracciati (I. e II.) della fig. 3. In I. al passaggio dell'azoto fu fatta seguire l'azione dell'acido carbonico, e, ciò non ostante,

(Riduz. a metà).

Fig. 4. — Colon di gatto, in liquido di Ringer. Temper.: 33° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. (9 marzo 1916). — In 1. gorgoglia un miscuglio di 4 vol. di O_2 e 1 vol. di CO_2; in 2. un miscuglio di 1 vol. di O_2 e 1 vol. di CO_2; in 3. gorgoglia acido carbonico solo; in 4. ossigeno solo; in 5. acido carbonico solo (poco); in 6. (molto); in 7. gorgoglia ossigeno solo (molto).

l'ossigeno somministrato successivamente fu capace di ripristinare in parte il tono, e dopo un tempo maggiore anche le contrazioni ritmiche. In II. fu fatto agire solo l'acido carbonico, e l'ossigeno non solo ripristinò il tono, ma fece apparire più tardi contrazioni ritmiche e oscillazioni toniche assai cospicue.

Non altrimenti che l'intestinuo tenue reagiscono all'azione dell'acido carbonico, solo o mescolato con ossigeno, e all'espulsione di tutti i gas mediante l'azoto, il colon e il retto degli stessi animali.

Il tracciato della fig. 4 fu registrato da un preparato della porzione media del colon di gatto. Finchè l'acido carbonico agì mescolato con ossigeno (prima in minore, poi in maggior proporzione), il colon presentò solamente un lieve abbassamento del tono. Ma quando l'acido carbonico fu fatto agire da solo (in 3.), il preparato non solo si distese enormemente (tanto,

che la punta della leva andò sotto il livello inferiore della carta affumata), ma cessò anche di contrarsi ritmicamente. L'ossigeno però ripristinò relati-

(Riduz. a metà).

Fig. 5. — Colon di gatto, in liquido di Ringer. Temper.: 38°-39° C. Peso: gr. 6. Tempo 1'. (17 marzo 1916). — In 1. si fa gorgogliare azoto; In 2. acido carbonico; in 3. ossigeno; in 4. acido carbonico; in 5. ossigeno.

vamente presto sia il tono, sia le contrazioni automatiche. Ripetuto lo stesso esperimento dopo un certo tempo (in 5., 6. e 7.), si ottenne lo stesso risultato.

Anche l'azoto produce un effetto somigliante, sebbene meno prontamente (fig. 5). In generale, l'esperimento durante il quale furono raccolti i trac-

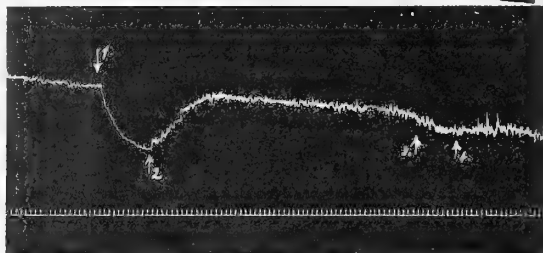
ciati della fig. 5 dette gli stessi risultati. È evidente, che quando alla sottrazione dell'ossigeno prodotta mediante l'azoto si fa seguire l'azione dell'acido carbonico (come nel tracciato I. della fig. 5), la restaurazione successiva del preparato, sotto l'influenza dell'ossigeno gorgogliante in grande

(Riduz. a metà).

Fig. 6. — Colon di cavia, in liquido di Ringer. Temper.: 36°C. Peso: gr. 6. Tempo: 1'. (29 febbraio 1916). — In 1. si fa gorgogliare un miscuglio di CO_2 e O_2 a parti eguali; in 2. ossigeno solo; in 3. lo stesso miscuglio di CO_2 e O_2 a parti eguali, ma per breve tempo; in 4. ossigeno solo.

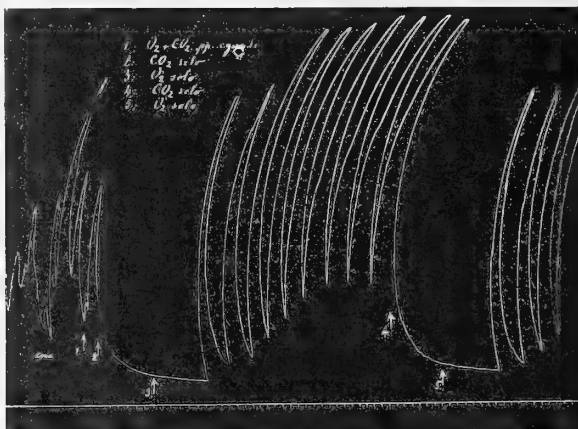
quantità, mette più tempo a verificarsi. In questo caso, le variazioni del tono furono molto cospicue.

(Riduz. a metà).

Fig. 7. — Intestino retto di gatto, in liquido di Ringer. Temper.: 32°C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. (9 marzo 1916). — In 1. si fa gorgogliare un miscuglio di O_2 e CO_2 a parti eguali; in 2. acido carbonico solo; in 3. ossigeno solo; In 4. acido carbonico solo; in 5. ossigeno solo.

Un esperimento fatto sul colon di cavia (fig. 6), dette risultati analoghi. Degno di nota fu che, avendo fatto agire due volte successivamente il miscuglio di O_2 e CO_2 sul preparato, la depressione del tono che ne seguì fu assai più cospicua la prima volta che non la seconda, mentre le contrazioni ritmiche non cessarono mai interamente.

Come si sa, i preparati rettali fanno per lo più contrazioni ritmiche assai più ampie e regolari di quelle che sogliono fare i preparati d'intestino tenue. Ma l'acido carbonico produce gli stessi effetti: depressione del tono e cessazione delle contrazioni ritmiche, che l'ossigeno per altro ripristina perfettamente (fig. 7).

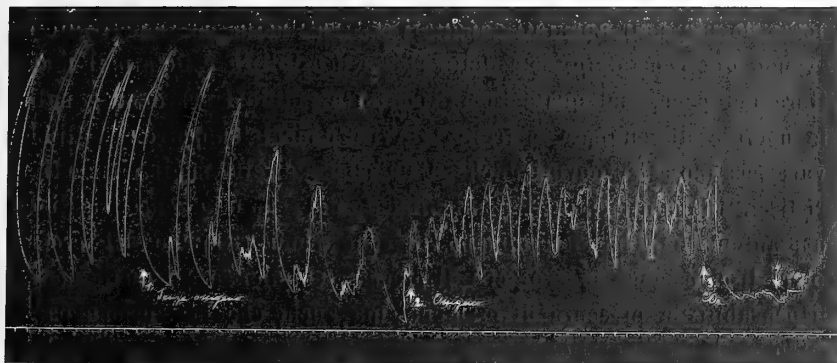
Ho provato anche a sospendere il passaggio dell'ossigeno per il liquido di Ringer, in cui trovavasi immerso un preparato colico di gatto (fig. 8), senza però farvi gorgogliare azoto. L'effetto fu un lieve abbassamento del tono con progressiva diminuzione in altezza delle ampie contrazioni periodiche. Ma non si ebbe affatto quella enorme intensificazione di esse, di cui ho parlato sopra, e che si vede nel tracciato della fig. 2. Anche questa volta,

(Riduz. a un terzo).

Fig. 8. — Colon discendente di gatto, in liquido di Ringer. Temper.: 38°C. Peso: gr. 10. Tempo 1'. (10 marzo 1916). — In 1. si sospende il passaggio dell'ossigeno (asfissia); in 2. si fa gorgogliare ossigeno solo; in 3. acido carbonico solo; in 4. ossigeno solo.

però, l'acido carbonico depresse il tono e abolì le contrazioni ritmiche del preparato, mentre l'ossigeno ripristinò l'uno e le altre.

In conclusione, sui preparati d'intestino tenue, di colon e di retto di varii mammiferi (cane, gatto, cavia), cioè sopra pezzi d'intestino asportati dal corpo e tenuti immersi in liquido di Ringer, alla temperatura relativamente bassa di 32-34° C. o a quella normale di circa 38° C., la espulsione dell'ossigeno (mediante una corrente di azoto fatta gorgogliare per un certo tempo per il liquido) e la somministrazione di acido carbonico (fatto gorgogliare solo o mescolato con ossigeno in proporzioni variabiii) producono un effetto analogo, che consiste essenzialmente in una più o meno forte depressione del tono e nella diminuzione in altezza o cessazione delle contrazioni ritmiche. Non potrei affermare con sicurezza che il preparato intestinale resista più alla sottrazione dell'ossigeno (mediante azoto) che all'azione diretta del solo acido carbonico (in assenza di ossigeno). Ma non v'ha dubbio che gli effetti prodotti dall'acido carbonico variano d'intensità, secondo che esso

agisce solo o mescolato con ossigeno, e che la sua azione è proporzionale alla sua tensione parziale nel miscuglio che si fa gorgogliare per il liquido di Ringer. Non ho provato a far agire piccolissime quantità di CO_2 mescolata con O_2 (per es. 5-10 volumi di CO_2 mescolata con 95-90 volumi di O_2). Ma dagli esperimenti fatti coi miscugli di 4 vol. di O_2 con 1 vol. di CO_2 sono indotto a credere, che quantità molto minori di CO_2 forse non produrrebbero alcun effetto degno di nota. Un aumento del tono o dell'altezza delle contrazioni ritmiche. che fosse imputabile sicuramente all'azione dell'acido carbonico, non ho mai potuto osservare nei molti esperimenti da me fatti.

La grande sensibilità dei preparati intestinali per il difetto di ossigeno e per la presenza in eccesso di acido carbonico, potrebbe far credere che essa fosse dovuta agli apparati gangliari esistenti nella parete dell'intestino. Ma avendo già constatato, che della stessa sensibilità è dotato il muscolo retrattore del pene, nel quale finora non si è potuto trovare nè gangli nè cellule nervose disseminate, è lecito provvisoriamente supporre che gli effetti osservati possano esser dovuti anche a un'azione diretta sugli elementi muscolari lisci. Probabilmente, il mantenimento del tono e la genesi degli eccitamenti automatici che determinano le contrazioni ritmiche dei preparati muscolari lisci esigono lo svolgersi di processi chimici, per i quali non solo è indispensabile la presenza di ossigeno, ma anche che la tensione parziale dell'acido carbonico nei liquidi circostanti non oltrepassi un certo valore.

Si può affermare, che i muscoli lisci sono più sensibili degli striati alla privazione di ossigeno e all'eccesso dell'acido carbonico; ma la differenza può essere spiegata, indipendentemente dalla presenza di apparati gangliari negli organi muscolari lisci, dalla maggiore differenziazione morfologica e fisiologica delle fibre muscolari striate in confronto con le cellule muscolari liscie.

Hooker [1] ha osservato che l'intestino di rana, esposto all'azione dell'acido carbonico, presenta abbassamento del tono (e cessazione delle contrazioni ritmiche), solo quando è dotato di attività ritmica. Per quanto riguarda l'intestino dei mammiferi, l'A. afferma che non gli riuscì di ottenere preparati dotati di attività ritmica (!), e che in quelli che ne erano privi l'acido carbonico produsse contrazione, e l'ossigeno rilassamento. Ma questi risultati non sono molto attendibili, perchè ottenuti in preparati sospesi in una camera d'aria (non in liquido di Ringer), nella quale l'A. faceva giungere i gas, mescolati nelle proporzioni volute e lavati, ma, sembra, non debitamente riscaldati. Comunque sia, l'A. non ha tenuto alcun conto del fatto, che un preparato muscolare liscio, il quale presenta vigorose con-

[1] D. R. Hooker, *The effect of carbon dioxide and of oxygen upon muscular tone in the blood vessels and alimentary canal.* Am. Journ. of Physiol., XXXI, pag. 31 (1912).

trazioni ritmiche, è anche generalmente dotato di un tono, che può essere più o meno alto, ma è sempre considerevole; mentre un preparato aritmico è generalmente atonico.

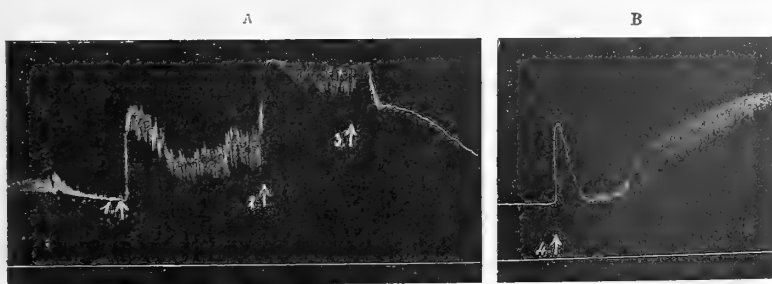
Nella prima parte di questa Nota ho mostrato l'influenza che esercita il siero del sangue, in presenza e in assenza di ossigeno, sul muscolo retrattore del pene. Ai risultati ottenuti sull'esofago di pulcino ebbi già occasione di accennare nella mia « Seconda Memoria » (pag. 54, o pag. 16 dell'estratto, fig. 2), dove ho anche ricordato le ricerche di altri sullo stesso argomento. Analoghe ricerche ho fatto sull'intestino dei mammiferi. Ma prima di esporne brevemente i risultati voglio rammentare, che nell'ultima edizione del trattato di fisiologia dello Stewart (pag. 448, fig. 173), si può vedere un trac-

(Riduz. a metà).

Fig. 9. — Intestino tenue di canino di sette giorni. in 70 cm³ di liquido Ringer. Ossigeno. Si espelle l'ossigeno dal liquido mediante una corrente di azoto; il tono del preparato è perciò molto basso, mentre le contrazioni ritmiche sono assai ridotte in altezza. Temper.: 35°C. Peso: gr. 4. In 1. si fa gorgogliare ossigeno; in 2. si aggiungono al liquido di Ringer 5 cm³ di sangue di cane, defibrinato; in 3. si fa gorgogliare di nuovo azoto (il tono torna ad abbassarsi, e le contrazioni ritmiche a poco a poco cessano del tutto); in 4. si fa passare di nuovo ossigeno. (10 luglio 1915).

ciato molto dimostrativo dell'azione contratturante che il siero del sangue esercita sull'intestino del coniglio.

Il sangue defibrinato, non disossigenato, eleva notevolmente il tono del preparato intestinale (fig. 9, in 2.), anche se questo era stato già elevato (fig. 9, in 1.) dall'ossigeno sostituito all'azoto, che lo aveva precedentemente molto depresso. Ma se, pur in presenza del sangue, si sospende il passaggio dell'ossigeno e si fa gorgogliare azoto per il liquido (come da 3. a 4. della stessa fig. 9), il tono presto si abbassa, e dopo un po' di tempo cessano anche le contrazioni ritmiche automatiche, che l'ossigeno in seguito (da 4. in poi, fig. 9), torna a ripristinare.

Era interessante vedere, se il siero del sangue produce lo stesso effetto in assenza di ossigeno. A tale scopo, non solo ho estratto tutti i gas dal siero sottoponendolo al vuoto torricelliano per parecchie ore di seguito, ma li ho anche espulsi dal liquido di Ringer facendovi gorgogliare per parecchio

tempo una corrente di azoto. L'espulsione dei gas dal liquido di Ringer, in cui è immerso il preparato intestinale, ha, come ho detto, per effetto un cospicuo abbassamento del tono e diminuzione in altezza e poi cessazione delle contrazioni ritmiche, come si vede anche nelle figg. 10, 11 e 12, le quali inoltre dimostrano che l'asfissia aveva prodotto, come nel caso della

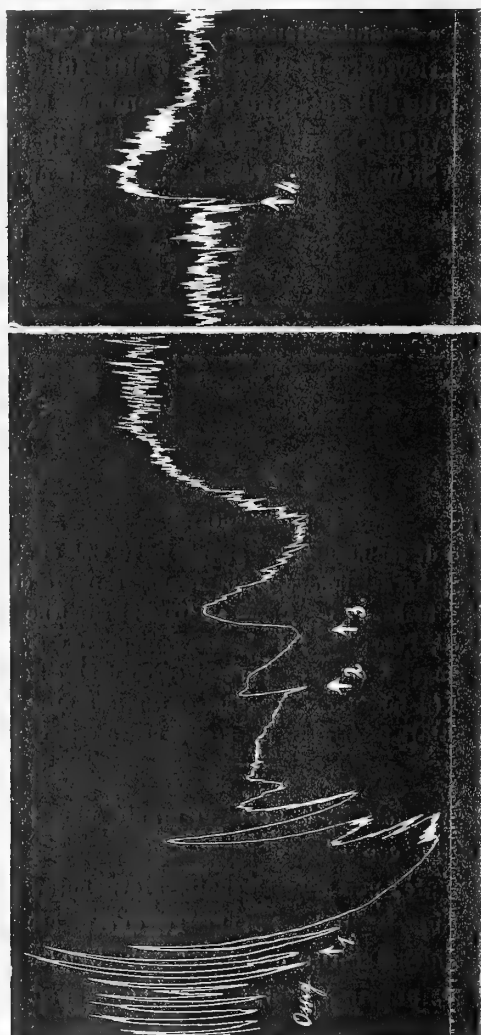



Fig. 10. — Intestino tenue (digiuno) di cagna. in 50 cm³ di liquido di Ringer. Ossigeno. Temper.: 38°. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. In 1., e fino a 3., per il liquido si fa gorgogliare azoto; da 3. in poi, di nuovo ossigeno; in 2. si aggiungono al liquido 5 cm³ di siero di sangue di cane, deossigenato completamente e riscaldato a 38°C; in 4. si aggiungono altri 5 cm³ dello stesso siero. (23 novembre 1916). (Fra il tracciato A e il tracciato B passa un intervallo di tempo di circa 10').

fig. 2, forti contratture. Se ora al liquido disossigenato si aggiunge siero anche disossigenato, questo provoca sempre una mediocre contrattura di durata considerevole, preceduta da un rapido breve e più o meno cospicuo abbassamento del tono (ved. fig. 10 in 2., fig. 11 in 2., fig. 12 in 1.).

Se invece l'aggiunta del siero, ancorchè disossigenato, vien fatta quando già da alcuni minuti gorgoglia per il liquido l'ossigeno (come in 4. della

fig. 10, in 5. della fig. 11, in 6. della fig. 12), allora l'aumento del tono, che ne segue, è più cospicuo, e insieme con l'elevarsi del tono riappariscono le contrazioni ritmiche. Lo stesso effetto si ottiene, se si fa gorgogliare l'ossigeno per il liquido disossigenato al quale era stato aggiunto siero disossigenato, come in 3. della fig. 10.

Dai tracciati qui riprodotti quindi risulta, che mentre al siero è dovuto principalmente l'aumento del tono, all'ossigeno è dovuto principalmente il ripristinarsi delle contrazioni ritmiche.

Il fatto che un lieve aumento del tono si osserva in seguito all'aggiunta del siero anche in assenza di ossigeno, dimostra che questo gas non è asso-

A B

(Riduz. a metà).

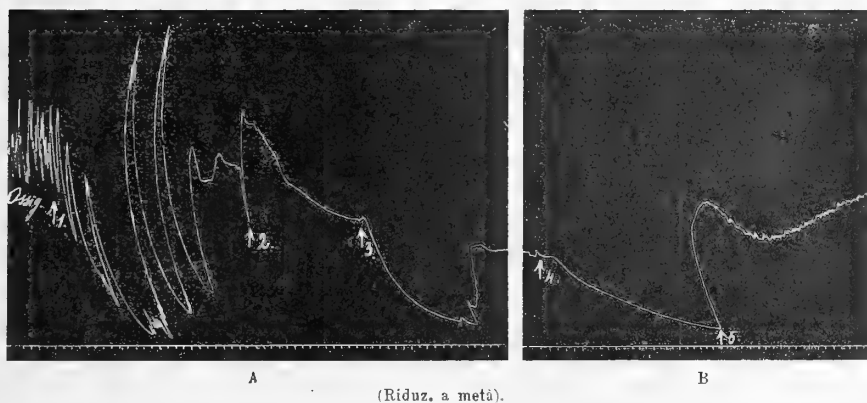



Fig. 11. — Intestino tenue (digiuno) di cagna, in 50 cm³ di liquido di Ringer. Ossigeno. Temper.: 38° C. Peso: gr. 10: Tempo: 1'. In 1., e fino a 4., per il liquido si fa gorgogliare azoto; da 4. in poi, di nuovo ossigeno; in 2. si aggiungono al liquido 5 cm³ di siero di sangue di cane completamente deossigenato e riscaldato a 38° C; in 3. si cambia il liquido, sostituendolo con liquido di Ringer normale riscaldato a 38°C; in 5. si aggiungono 5 cm³ dello stesso siero. (23 novembre 1916).

lutamente indispensabile perchè si manifesti l'azione tonica del siero, sebbene questa sia più cospicua sotto l'influenza dell'ossigeno.

Degna di nota è poi la breve depressione del tono che alcune volte, come sopra ho detto (non sempre), precede l'aumento. Pare che il siero contenga due sostanze caratterizzate da azione antagonista: una deprimente il tono, l'altra che lo eleva; l'una e l'altra capaci di agire anche in assenza di ossigeno, mentre la seconda in presenza di ossigeno ha un'azione più intensa. La sostanza che eleva il tono, però, prevale nelle dette condizioni sperimentali.

L'abbassamento del tono potrebbe forse essere dovuto a quella piccolissima quantità di adrenalina che è contenuta in ogni sangue; e potrebbe dipendere da un maggiore o minore contenuto in adrenalina l'effetto più o meno cospicuo che si osserva, oltre che dallo stato di tonicità del preparato

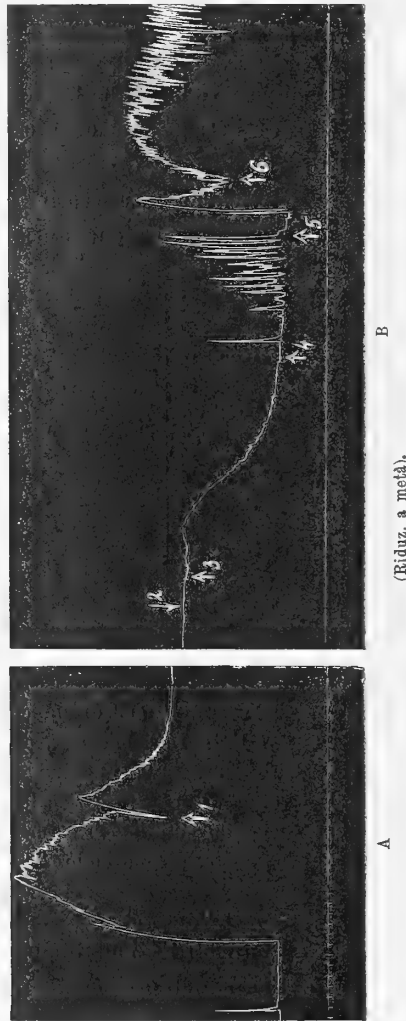
al momento in cui il siero viene aggiunto. Quanto alla sostanza che eleva il tono del preparato intestinale, nulla di preciso può esser detto per ora.

(Riduz. a metà).

Fig. 12. — Intestino tenue di cagna, in 50 cm³ di liquido di Ringer. Azoto. Temper.: 36, 5° C. Peso: gr. 10. In 1. si aggiungono al liquido di Ringer privo di ossigeno 5 cm³ di siero di sangue di cane deossigenato e riscaldato; in 2., altri 5 cm³ dello stesso siero; in 3. si fa gorgogliare l'ossigeno; in 4. si aggiungono 5 cm³ di siero di sangue deossigenato della stessa cagna, e riscaldato; in 5. si lava il preparato con liquido di Ringer nuovo e lo si immerge in 50 cm³ di esso; in 6. si aggiungono al liquido 5 cm³ di siero di sangue deossigenato e riscaldato dalla stessa cagna. (25 novembre 1916). (Fra il tracciato A e il tracciato B passa un intervallo di circa 40').

Recentemente però è stata richiamata l'attenzione sopra la colina, e un derivato di essa, l'acetilcolina (¹), che sono dotate, la seconda assai più della prima, della proprietà di agire come la stimolazione dei nervi motori bulbo-

(¹) Ved. H. H. Dale, *The occurrence in ergot and action of acetyl-choline*. Journ. of Physiol., XLVIII, pag. III (1914); W. H. Gaskell, *The involuntary nervous system*. London, 1916, pag. 62.

Per quanto riguarda l'azione fisiologica generale della colina, ved.: G. Barger, *The simpler natural bases*. London, 1914, pp. 62-64.

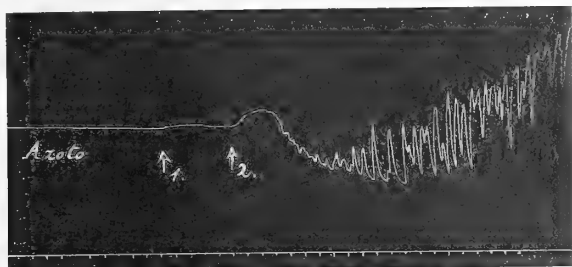
sacrali del sistema nervoso involontario, precisamente alla stessa guisa che l'adrenalina agisce come la stimolazione dei nervi toraco-lombari (simpatici) dello stesso sistema. Non è quindi da escludersi assolutamente, che l'aumento del tono osservato in seguito all'aggiunta del siero del sangue possa esser dovuto ad una di quelle sostanze (o a neurina), se esse esistono normalmente

(Riduz. a metà).

Fig. 13. — Intestino tenue di cagna, immerso in 55 cm^3 di liquido di Ringer. Per il liquido si è fatto gorgogliare azoto per circa 1 ora. In 1. si aggiungono 5 cm^3 di siero di sangue disossigenato dello stesso animale; in 2. si fa gorgogliare ossigeno. Temper.: 38°C. Peso: gr. 10. Tempo 1'. (2 decembre 1916).

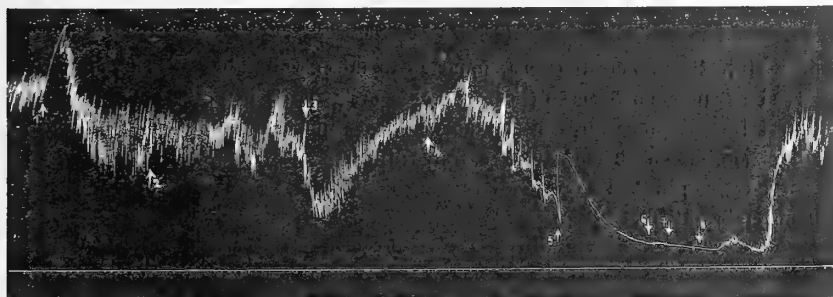
nel sangue. L'aumento del tono che si osserva non differisce da quello che sarebbe causato da stimolazione del n. vago.

(Riduz. a un terzo).

Fig. 14. — Intestino tenue di cagna immerso in 60 cm^3 di liquido di Ringer. Ossigeno. In 1. si aggiungono 5 cm^3 di siero di sangue invecchiato e disossigenato; in 2., 5 cm^3 di siero fresco; in 3. si lava il preparato con liquido di Ringer nuovo; in 4. si fa gorgogliare azoto per il liquido di Ringer; in 5. si aggiungono 5 cm^3 di siero fresco; in 6. si aggiungono 5 cm^3 di siero vecchio, e in 7., 5 cm^3 di siero fresco; in 8. si fa gorgogliare di nuovo ossigeno. Temper.: 38°C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. (30 novembre 1916).

I tracciati delle figg. 11 e 12 dimostrano poi un altro fatto singolare. Quando (in 4. della fig. 11, in 3. della fig. 12) all'azoto, che per molto tempo aveva gorgogliato per il liquido, si sostituisce l'ossigeno, invece di prodursi subito un aumento, si produce una progressiva diminuzione del tono del preparato intestinale, diminuzione che dura per parecchio tempo. Il feno-

meno si verifica dopo un passaggio prolungato, ma non eccessivamente, dell'azoto, quando le contrazioni ritmiche sono bensì del tutto abolite, ma il preparato presenta ancora un notevole accorciamento tonico.

Non è agevole dare una spiegazione soddisfacente di questo fenomeno. Forse esso è in relazione con una eventuale ossidazione di sostanze (che perciò verrebbero ad essere modificate) formatesi durante l'asfissia del preparato e capaci di determinare sia le contratture asfittiche di esso, come anche quello stato di mediocre tonicità che i tracciati dimostrano. Probabilmente da quelle sostanze se ne formerebbero, per ossidazione, altre (per es., acido carbonico) capaci di deprimere il tono del preparato intestinale.

(Riduz. a un terzo).

Fig. 15. — Intestino tenue di cagna, immerso in 60 cm³ di liquido di Ringer. Ossigeno. In 1. si aggiungono 5 cm³ di siero vecchio ossigenato; in 2., 5 cm³ di siero fresco; in 3. si lava il preparato con liquido di Ringer nuovo; in 4. si fa gorgogliare azoto; in 5. si aggiungono 5 cm³ di siero fresco; in 6., 5 cm³ di siero vecchio; in 7., 5 cm³ di siero fresco; in 8. si fa gorgogliare ossigeno. Temper: 34°C. Peso: gr. 5. Tempo: 1'. (30 novembre 1916).

In altri casi, come per es. in quello cui si riferisce il tracciato della fig. 13, e propriamente quando, per un passaggio eccessivamente prolungato dell'azoto, l'eccitabilità del preparato è notevolmente diminuita, nè il siero (in 1.) provoca più una contrattura cospicua, nè la somministrazione dell'ossigeno (in 2.) un cospicuo abbassamento del tono.

Altri esperimenti dimostrano, che non esiste differenza notevole fra l'azione contratturante del siero fresco e quella dello stesso siero conservato per 5-6 giorni a bassa temperatura nel vuoto (invecchiato, ma che non presentava affatto odore di putrefazione), come si può rilevare dai tracciati delle figg. 14 e 15; i quali inoltre dimostrano (in 2., 6. e 7.), che, dopo aver prodotto una prima volta la contrattura descritta, il siero, almeno per qualche tempo, non agisce più sul preparato, sia che questo si trovi in presenza o in assenza di ossigeno, sia che si trovi in stato di mediocre accorciamento

tonico (come in 2.), o di tono assai depresso (come in 6. e 7. delle figg. 14 e 15), o di tono altissimo (come in 2. del tracciato A della fig. 16).

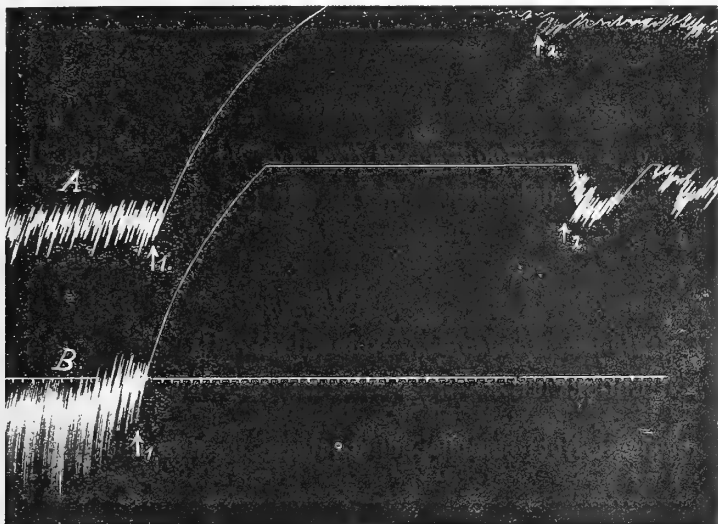
In fine aggiungerò, che in qualche caso (come nei due esperimenti della fig. 16) la contrattura provocata dal siero è colossale, dura per un tempo

(Riduz. a metà).

Fig. 16. — Intestino tenue di cagna: due preparati A e B immersi in 55 cm³ di liquido di Ringer: A in liq. di Ringer senza bicarbonato sodico; B in liq. di Ringer con bicarbonato. Ossigeno. In 1. di A e B si aggiungono 5 cm³ di siero di sangue fresco; in 2. di A, altri 5 cm³ dello stesso siero; in 2. di B si lava il preparato con liquido di Ringer nuovo. Temper.: 38°C. Peso: gr. 10. Tempo: 1′. (2 dicembre 1916).

lunghissimo e non si risolve del tutto nemmeno se si cambia il liquido di Ringer (come in 2. del tracciato B della stessa fig. 16). Ciò può dipendere da eccezionali condizioni di eccitabilità del preparato, ma forse più verosimilmente da maggior contenuto del sangue in sostanza contratturante. Infatti una contrattura altrettanto colossale lo stesso siero produsse sopra il corno uterino della cagna, dalla quale erano stati presi i due preparati intestinali.

Matematica. — *Sulla varietà cubica con 10 punti doppî dello spazio a quattro dimensioni, e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos.* Nota I di Luigi Berzolari, presentata dal Socio E. Bertini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali e le equazioni integro-differenziali correlative.* Nota di E. DANIELE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Matematica. — *Sur la composition de 1ère espèce. I: Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition.* Nota di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Magnetismo terrestre. — *Rilevamenti di anomalie magnetiche nei dintorni di Roma.* Nota di A. PALAGI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Le precedenti Note saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Alcune applicazioni della teoria delle falde di ricoprimento al territorio italiano.* Nota di G. ROVERETO, presentata dal Corrisp. ART. ISSEL.

Il nostro paese ha regioni in cui la teoria delle falde di ricoprimento è di applicazione inutile, e forse vana; altre in cui è assolutamente necessaria: ossia, in alcune non reca vantaggio per la interpretazione tettonica, anzi contribuisce al disegno di sezioni piuttosto inverosimili; in altre non se ne può fare a meno, perchè, non tenendola in conto, si sostituiscono all'accidente del ricoprimento delle condizioni inesistenti, come sarebbero faglie, pieghe-faglie e simili.

Riconosciuto questo divario, ho cercato di spiegarlo con un concetto generale, che per ora formulo nella maniera seguente: quando una falda di ricoprimento è incisa in modo, che il suo fianco normale superiore è in gran parte asportato, e affiora dalle finestre il letto del fianco rovesciato inferiore, è allora necessario disegnare le sezioni secondo la teoria del ricoprimento.

Non è stato ancora possibile, con i metodi della tettonica semplicista, tracciare una sezione di collegamento verosimile fra i due massicci mesozoici che cingono il golfo della Spezia, per quanto siano stati studiati da geologi valentissimi: applicando la teoria del ricoprimento, si distinguono nel promontorio a oriente due parti: un apparente anticlinale a cupola, il cui centro corrisponde più o meno ad Ameglia, per metà smantellato dalla incisione

della valle della Magra, il quale, lungo il golfo, dai dintorni di Lerici sino ai Pitelli, viene a posare, con rovesciamento periferico, la serie dei suoi terreni, dal trias inferiore alla scaglia cretacea od eocenica, su masse di oscuro assetto, costituite da calcari cavernosi, da breccie, appartenenti al trias o al lias, e da quarziti del trias inferiore; le quali masse presentano, al contatto con la scaglia, una superficie di carreggiamento, qua e là brecciata; di maniera che, l'apparente anticlinale si svela come la fronte di una falda, ingobbata a *carapace*, proveniente da nord-est; e la scaglia si vede sotto o sopra alla serie liassica, a seconda che la emergenza di tale fronte è più o meno alta.

I terreni che, all'affioramento, formano la sottile striscia sulla quale la falda orientale ha carreggiato, più tutta la lama affusata, mesozoica-eocenica, che costituisce il promontorio occidentale, fanno parte di un'altra falda più profonda, della quale sono un arricciamento del fianco normale superiore; arricciamento che determina un'area anticlinalica, la quale si continua in modo diagonale, rispetto all'Appennino Ligure, sino a Monte Ramaceto, come è indicato nella mia « Carta Tettonica dei Monti Liguri ». Trattandosi, inoltre, di un fianco normale superiore, tutti i terreni eocenici della Liguria orientale, sono in serie regolare, come ho sempre sostenuto, in contraddizione con qualche collega, sin dal 1892, a cominciare dal mio scritto giovanile che si riferisce alla sezione geologica da me condotta attraverso all'Appennino da Genova a Piacenza. Solo per un perturbamento locale, il nucleo di calcare selcifero di Monte Bianco nel Levantese, che credo mesozoico e probabilmente cretaceo, trovasi, come ha segnalato il Mazzuoli, in posizione rovesciata sull'eocene.

Quindi, l'applicazione alle sezioni condotte attraverso l'Appennino Ligure orientale, delle ricostruzioni secondo la teoria in esame, costituisce una complicazione non necessaria; benchè serva a definitivamente spiegare il modo di giacimento delle masse eruttive e metallifere del Levantese, che, come Mazzuoli e Issel sempre sostennero, non si continuano in profondità, ossia non hanno radici; verità, che se avesse persuaso alcuni dei nostri tecnici più in voga, avrebbe fatto risparmiare molte gallerie di ribasso, e uno dei più gravi disastri finanziarî che abbia mai colpito la Borsa di Genova.

Non voglio ancora dichiararmi, in modo definitivo, sulla tettonica della regione compresa fra l'Antiappennino Toscano e l'Appennino Umbro-Marchigiano; perchè, se da un lato tutti i varî lembi di mesozoico, in più allineamenti, e che costituiscono delle piccole cupole, o, soprattutto, delle scaglie affusate, uniseriali, e delle zolle frammentate, hanno più o meno l'aspetto dei *carapaci* e dei *klippen* delle regioni a falde di ricoprimento, dall'altra mancano le condizioni che rendono necessaria l'applicazione della nuova teoria: le belle sezioni che di questa regione ha fatte il Lotti sussistono sempre, qualunque sia la ricostruzione di cui si corredano; e ciò perchè, o

tutto è in posto, o si ha a che fare con un fianco normale superiore di una o più falde: il Monte di Cetona è semplicemente un anticlinale rovesciato, od è la più interessante cerniera di falda della regione.

Un poco più a sud esiste la più bella finestra tettonica della penisola. quella di Terni-Spoleto, la quale, rappresentando l'affiorare del letto del fianco rovesciato inferiore di una falda, ci riporta in pieno nella teoria del ricoprimento: ed invero, è impossibile spiegare altrimenti la tettonica dell'allungato occhiello che segue il corso del Serra, e il cui terreno più profondo, l'eocene, è dapprima una strettissima scaglia, poi un ampiŏ dorso a *carapace*, come dal magistrale rilievo del R. Ufficio geologico si riconosce. Ad ambo i lati dell'eocene sta il cretaceo in serie rovesciata, e quindi il lias, assai disturbato, per motivi ancora da chiarirsi; ma tra i quali entra certamente quello delle sue condizioni di scogliera. Il fianco occidentale della finestra forma i Monti di Cesi, il gruppo di Monte Maggiore, e, allungandosi per non meno di trenta chilometri, il Martano; quello orientale costituisce il gruppo di Somma e i Monti di Spoleto.

Il mantello della stessa finestra esiste intatto più a sud, oltre Terni, nel gruppo montuoso fra la valle dell'Aja e la conca di Rieti, gruppo che non ha quindi radici: lo stesso si può asserire per il gruppo dei Monti di San Pancrazio, la cui allungata anticlinale di terreni mesozoici lascia affiorare, al suo estremo meridionale, l'eocene di base.

Ancora più a sud è impossibile spiegare la tettonica dei Monti Marsicani senza ricorrere alla teoria dei ricoprimenti: la valle del Liri, ad esempio, è una finestra, dalla quale affiora l'eocene da sotto il cretaceo, e, forse, sono inesistenti lungh'essa le faglie di cui tanto si è discorso, in occasione del terribile terremoto di Avezzano-Sarno, che costituì uno dei casi più evidenti di vero terremoto tettonico, senza epicentro; poichè appunto si manifestò lungo la finestra del Liri e attorno alla conca del Fùcino.

Sul versante adriatico la Montagna dei Fiori è l'interessante cerniera di una falda proveniente dal Tirreno: ciò si vede quasi per spaccato naturale, e se si toglie alla sezione, che di essa ha fatto il Bonarelli, la parte ricostrutta, si ha un esatto disegno di tale condizione.

Indico, terminando, il più bel lembo di ricoprimento d'Italia: è Monte Massico, che sorge isolato fra la pianura di Minturno e la Campania: con la sua illustrazione dimostrerò che esso si collega lateralmente a Capri, benchè la serie dei suoi terreni, posata sull'eocene, sia alquanto più ricca di termini.

Paleontologia. — *Sopra una nnova forma di Lithothamnium del Post-Pliocene di Brindisi.* Nota della dott.ssa CATERINA SAMSONOFF ARUFFO, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

Nella pianta da me studiata, raccolta dal prof. De Stefani nelle sabbie del post-pliocene superiore di Brindisi [1], l'*ipotallo* è ridotto a pochi strati di cellule, mal conservate ed in alcuni punti disgregate in modo tale da renderne impossibile la misurazione. Per quanto ho potuto osservare, le cellule sono di dimensione media, rettangolari e variano poco. Le file dell'ipotallo si alzano quasi subito per formare il *peritallo*, però il passaggio fra i due tessuti non è brusco. Il peritallo è formato da cellule nettamente disposte in *serie verticali*, mentre la disposizione in serie concentriche trasversali manca assolutamente. Non ho potuto neppure osservare in nessun punto del tallo la struttura a grata o reticolo. Nella parte più profonda del tallo, vicino all'ipotallo, il tessuto è molto denso e compatto e presenta una grande omogeneità di struttura, le file cellulari verticali sono diritte. Nella parte esterna del peritallo ed intorno ai concettacoli il tessuto è molto meno denso e serrato, le file cellulari sono lassamente unite fra loro ed il loro percorso è spesso *ondulato*; qualche volta esse sono separate da lacune allungate. Le cellule del peritallo sono piccole, in sezione longitudinale; esse si mostrano quadrate o anche più larghe che lunghe, in sezione trasversale esse appaiono come ampî poligoni; ho trovato due o tre cellule doppie.

Questa è la struttura normale del tallo; in alcuni punti però le file cellulari verticali sembrano espandersi a ventaglio; forse questa deviazione dalla struttura ordinaria è dovuta all'azione molesta di animali o ad altre influenze esterne.

I *concettacoli* sono abbastanza numerosi e ravvicinati fra loro: sono piuttosto piccoli ed hanno una forma ovale o rotondeggiante, soprattutto in sezione trasversale. Nel nostro esemplare i concettacoli sono affondati nel tallo ed in alcuni punti mostrano una disposizione in piani sovrapposti. Il pavimento del concettacolo è leggermente concavo, le pareti larerali sono arcuate; nei concettacoli giovani (più piccoli) il tetto è arcuato; in quelli

[1] Insieme coi *Lithothamnium* furono trovati i seguenti molluschi tutti viventi nell'Adriatico:

Corbula gibba Ol., *Tapes laeta* Poli, *Venus gallina* L., *Cytherea chione* L., *C. rudis* Poli, *Cardium Lamarckii* Reeve, *C. papillosum* Poli, *C. oblongum* Chemn., *Pectunculus pilosus* Born, *Arca Noae* L., *Pinna nobilis* L., *Dentalium novemcostatum* Lck., *D. tarentinum* Lck., *Cerithiolum scabrum* Olivi, *Mangelia rugulosa* Phil.

più vecchi il tetto è invece un po' affondato verso la cavità del concettacolo. In alcuni concettacoli ho potuto osservare distintamente i *poro-canali* che sono piuttosto voluminosi; hanno la forma di coni tronchi e sono molto brevi (data l'esiguità dello spessore del tetto); ne ho visto 3-4 in ogni concettacolo; così che probabilmente il loro numero è piccolo.

Dalla misurazione dei concettacoli col micrometro oculare risulta che essi sono circa due volte più lunghi che larghi; però il rapporto fra $\frac{\text{larghezza}}{\text{lunghezza}}$ è spesso superiore a $\frac{1}{2}$, ciò che dà loro questo aspetto rotondeggiante.

In alcuni punti della preparazione — sia incluso nel nostro tallo, sia accanto ad esso — ho trovato un tessuto a cellule assai più voluminose: il suo aspetto fa credere che si tratti di un Briozoo. In molti punti il tallo è ricoperto da pellicole di *Mastophora*.

L'esemplare che ha servito per la preparazione rappresenta un conglomerato sabbioso, calcareo a *Lithothamnium* con cemento calcareo; nel conglomerato, oltre all'alga, sono inclusi frammenti di *Pecten* e gusci di *Turritella*. Il calcare è friabilissimo e si sgretola con la massima facilità; ciò che rende molto malagevole la preparazione delle sezioni.

La nostra pianta si presenta tanto sotto forma di croste, quanto e soprattutto sotto forma di ramificazioni in genere di mediocri dimensioni.

L'alga forma delle croste di un millimetro circa di spessore intorno a conchiglie (Turritella) modellandone la forma. La crosta non è stratificata nè zonata, sembra poco compatta, è bianca e friabile. Spesso le croste si sovrappongono. Più spesso l'alga assume l'aspetto di ramificazioni o di piccoli noduli ramificati. Le ramificazioni sono brevi, generalmente tozze, qualche volta noduliformi, la biforcazione è frequente. Le estremità dei rami sono spesso rigonfiate a clava o bottone; sono sempre arrotondate, mai acuminate, ricordano dunque quelle del *Lithophillum racemus* Foslie forma *crassa* (?) o forma *Kaiseri*, però le ramificazioni della nostra pianta sono più slanciate. Lo spessore dei rami varia da 1 a 3 mm. Il tessuto dei rami, all'esame macroscopico, sembra compatto ed è uniformemente colorato, soltanto talvolta la parte midollare dei rami è più scura; non ho osservato zonature, nè sgusciamenti, ciò che si poteva già supporre dall'esame microscopico. Non ho potuto osservare nessun concettacolo sulla superficie esterna dell'alga o all'estremità dei rami; però nel frammento che ha servito per la sezione sulla superficie levigata ho trovato dei concettacoli puntiformi arrotondati. Ciò si spiega facilmente, essendo in questa specie i concettacoli affondati nel tessuto e perciò difficilmente visibili dalla superficie esterna. Soltanto la sezione attraverso al tallo può renderli palesi.

L'aspetto esterno o *habitus* dell'alga non si può facilmente osservare, data la grande friabilità del conglomerato; ma per quanto ho potuto vedere,

si tratta di individui di mediocre dimensione riuniti insieme in gran numero. Almeno tutti i frammenti che ho ottenuto sgretolando la roccia erano piccoli. Del resto mi pare che l'individualità nelle *Melobesie* è mal definita, e che il limite fra colonia e individuo in questo gruppo di alghe è molto fluttuante ed incerto.

La struttura anatomica della nostra alga e la conformazione dei concettacoli tetrasporici non lascia dubbio nell'attribuirla al gen. *Lithothamnium*. Passando in rassegna le specie note di questo genere, vediamo che essa si avvicina assai al *Lithothamnium compactum* Kjellmann secondo la descrizione che ne dà di questa specie la sig.ª Lemoine. Il *L. compactum* Kjell. infatti forma delle croste sovrapposte con debole sviluppo dell'ipotallo. Il peritallo raggiunge notevole spessore senza essere interrotto da antiche corteccie. Le cellule sono piccole, ovoidi, da 6 a 8 μ. In questi caratteri le due specie coincidono perfettamente. Le zone — poco evidenti nel *L. compactum* Kjell. — nella nostra pianta mancano del tutto. In ambo le specie le cellule del peritallo sono soprattutto disposte in serie verticali, l'aspetto reticolare manca. La struttura dei concettacoli è molto importante: nel *L. compactum* Kjell. il tetto è molto depresso, i canali sono poco numerosi ed ampî; gli stessi caratteri sono stati da me osservati nella nostra pianta. Sappiamo che il *L. compactum* Kjell. ha servito al Foslie come SPECIE TIPO per il suo nuovo genere *Phymatolithon* (syn. *Eleutherospora* Heydr. - incl. *Clathromorphum* Foslie), caratterizzato dalla conformazione speciale dei concettacoli tetrasporici, con il tetto affondato e concavo ed i canali poco numerosi ed ampî. Vi sono però due punti da chiarire. Il *L. compactum* Kjell. è una specie nordica: esso fu trovato sulle coste atlantiche e pacifiche dell'America del Nord, nella Groenlandia, Spitzberg, Nova-Zemla, Islandia, Norvegia. La nostra specie proviene dal post-pliocene di Brindisi. Dobbiamo ricordare che i molluschi boreali compaiono durante il Calabriano nel Mediterraneo, corrispondentemente ad un abbassamento della temperatura, che coincide con la massima estensione glaciale. Non mi sembra perciò improbabile la presenza del *L. compactum* Kjell. nel post-pliocene di Brindisi quantunque si tratti di strati abbastanza alti nei quali le specie artiche del post-pliocene italiano sono già scomparse. Dobbiamo anche ricordare che molte specie nordiche si spingono alle latitudini più calde mantenendosi a maggiori profondità nel mare, dove le acque hanno bassa temperatura.

D'altra parte, come risulterà da ulteriore mia Nota, una forma sterile vicinissima al. *L. compactum* Kjell. fu da me trovata anche nel Miocene di Malta, ed è possibile perciò che questa forma miocenica, variando durante il periodo glaciale ed adattandosi alle nuove condizioni di vita, avesse data origine al. *L. compactum* Kjell. il quale col ritiro dei ghiacci sarebbe emigrato verso il Nord; come pure è possibile che la specie abbia a trovarsi ancora vivente nell'Adriatico.

Passiamo ora all'altro punto. Secondo la signora Lemoine il *L. compactum* Kjell. sarebbe una specie crostiforme; così anche la descrive Kjellmann, autore della speoie. Secondo Foslie ([1]) l'alga formerebbe delle piccole excrescenze angolose simili a quelle del *L. incrustans*. In un altro suo lavoro ([2]) egli ripete di avere trovato una volta due piccole excrescenze. La nostra pianta invece si presenta tanto sotto l'aspetto crostiforme, quanto (e soprattutto) sotto la forma ramosa. Però non mi pare che la forma esterna possa avere una tale importanza diagnostica in questo gruppo di piante da non permettere di considerare la nostra specie come una forma del *L. compactum* Kjell. Sappiamo che queste alghe variano molto nel loro *habitus* anche in relazione con la profondità alla quale vegetano, con la composizione chimica dell'acqua marina, con le correnti ed altre influenze dell'ambiente; in esse la forma esterna non è qualche cosa di assolutamente fisso, ma è fluttuante.

Foslie distingue le forme seguenti del *L. compactum* Kjell.:

1) f. *testacea* Foslie (Norw. f. Lith., 1895, pag. 135, pl. XIX, figg. 5 a 9);

2) f. *circumscripta* Strömf. (idem, pag. 160);

3) f. *coalescens* Foslie (idem, pag. 162, pl. XIX, figg. 15 a 20).

Queste forme si distinguono soprattutto per le dimensioni dei loro concettacoli e delle loro spore (Foslie, Rem. North., 1905).

Nelle forme *tipica* e *testacea* i concettacoli sono affondati, nelle forme *circumscripta* e *coalescens* essi non lo sono. La nostra specie si avvicinerebbe più di tutto alla *forma tipo*; però considerando le particolarità che presenta propongo di formarne una forma a sè e di chiamarla

Lithothamnium compactum Kjellmann
forma *ramulosa*.

([1]) Foslie, *Remarks of northern Lithothamnia*, pag. 89.
([2]) Foslie, *The Norwegian Forms of Lithothamnion*, 1894-95, pag. 131.

Patologia vegetale. — *L'infezione primaria determinante nel castagno il mal dell'inchiostro.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

In una Nota precedente [1] ho riferito sulla presenza di un micelio parassita nel cambio del colletto, della base del fusto e delle grosse radici nei castagni affètti dal mal dell'inchiostro. È a questo micelio che si deve attribuire l'infezione primaria che conduce alle ormai ben note alterazioni che caratterizzano la malattia. Molte lacune rimanevano da colmare per poter dare una dimostrazione esauriente di questa affermazione.

Le ricerche appositamente istituite saranno riassunte brevemente in questi Rendiconti man mano che saranno raggiunti dei risultati sicuri. Uno dei punti non ancora chiariti riguardava il luogo e il modo dell'infezione originaria. Era infatti completamente ignoto se la prima penetrazione del micelio nel cambio avvenisse dalle grosse radici, o dal colletto, o subito al disopra di questa regione; se l'infezione fosse resa possibile da ferite, o se il micelio attaccasse direttamente i tessuti corticali.

Le ricerche eseguite in questo autunno hanno dimostrato che l'infezione originaria si verifica nella regione basale delle grosse radici e il micelio penetra nel parenchima corticale di queste attraversando il tenue strato di peridermide che protegge la corteccia vivente al fondo delle fenditure del ritidoma.

Facendo un taglio tangenziale sopra una radice attaccata da poco tempo, e precisamente in corrispondenza di una piccola macchia d'inchiostro, risalta nettamente sopra il parenchima corticale sano, di color bianco gialliccio, una chiazza fuliginea contornata da una linea bruna. Questa macchia si approfondisce più o meno nel parenchima, e a seconda della data più o meno recente dell'infezione, l'alterazione finisce per raggiungere il cambio. Lungo questo tessuto, e principalmente in senso longitudinale, il micelio cresce rapidamente diffondendosi di preferenza verso il colletto e da questo verso la base del tronco posta fuori del terreno.

Uno dei fatti che più facilmente può indurre in errore in queste ricerche è l'esistenza di due categorie di *macchie d'inchiostro* sulle radici. Quelle ora descritte, e che chiamerò *primarie*, si manifestano su radici sane, con alburno e durame completamente normali e sono dovute all'infezione diretta del micelio parassita, il quale determinando la necrosi di molte cellule della

[1] Questi Rendiconti, vol. XXV, 1916, pag. 172.

corteccia provoca anche l'ossidazione dei materiali tannici in questi contenuti (Cfr. fig. 1).

La seconda categoria di *macchie d'inchiostro*, e che chiamerò *secondarie*, è costituita da quell'imbrunimento (che *chimicamente* non differisce in niente da quello delle macchie primarie) prodotto dall'alterazione della

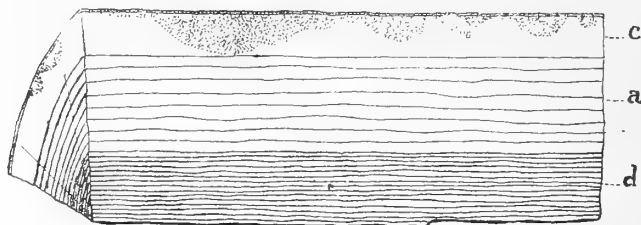



Fig. 1. — Sezione longitudinale di una grossa radice con macchie d'inchiostro incipienti (*macchie primarie*) — *c*, corteccia con macchie d'infezione — *a*, alburno sano — *d*, durame sano.

corteccia che avviene in via *secondaria* in seguito alla morte del cambio per un processo di marciume che dal durame si estende all'alburno (fig. 2).

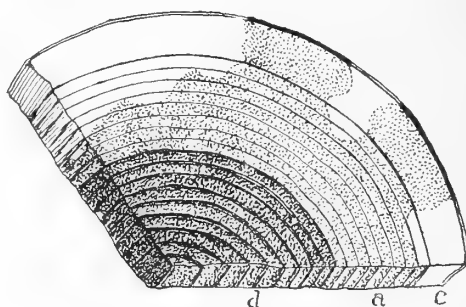



Fig. 2. — Sezione trasversale di una grossa radice con macchie d'inchiostro *secondarie* — *c*, corteccia con macchie brune in corrispondenza del marciume che invade in senso centrifugo il durame e l'alburno — *a*, *d*, alburno e durame infetti.

Questa alterazione a decorso centrifugo si verifica spesso nelle grosse radici di quei castagni il colletto dei quali è già attaccato dal parassita specifico. Si tratta di un processo di marciume dovuto a varie specie di funghi, varianti da località a località e spesso da pianta a pianta. La necrosi di porzioni di corteccia è accelerata dall'intervento di miceli saprofiti che favoriscono la rapida ossidazione delle sostanze tanniche.

Questa ossidazione, a cui devesi l'imbrunimento [1], avviene anche in assenza di microrganismi colla sola azione dell'ossigeno dell'aria, ma esistono

[1] Non considero qui il caso della formazione di vero *inchiostro* quando le sostanze tanniche in soluzione, all'esterno delle radici, vengono a contatto dell'ossido di ferro contenuto nel terreno.

veramente specie fungine che provocano anche *in vitro* l'imbrunimento dei tannini della corteccia di castagno. Di tali funghi sarà data una descrizione particolareggiata nel lavoro in esteso.

Il fatto su cui io devo richiamare l'attenzione dei fitopatologi è dunque costituito da questa duplice origine di *macchie d'inchiostro*; un fatto da cui io stesso precedentemente sono stato tratto in errore, e che indurrebbe a ritenere il *mal dell'inchiostro* per un comune marciume delle radici.

Le macchie d'infezione recenti della corteccia non si allargano ulteriormente quando si pongono le porzioni di radici in ambiente umido o sotto la sabbia.

Il micelio parassita muore rapidamente non appena i tessuti che egli attacca si trovino in condizioni nelle quali la loro attività vitale decresce molto presto. Il fatto è in relazione col resultato negativo dei tentativi fatti per isolare il micelio, il quale dunque si comporta come un parassita obbligato.

La ricerca accurata delle cause che ne determinano la morte nel caso suesposto ha dimostrato che trattasi sempre dell'effetto di azioni antagoniste esercitate da altri microrganismi che si sviluppano nel tessuto già disorganizzato dal micelio parassita. Questo resultato ha permesso di perfezionare la tecnica del metodo d'isolamento, usando delle sostanze che stimolino l'accrescimento del fungo in questione ed ostacolino lo sviluppo dei microrganismi saprofiti.

Sarà oggetto di altra Nota quanto si riferisce all'isolamento e all'identità sistematica del micelio parassita.

Patologia. — *Ricerche sperimentali sulle cause che determinano la refrattarietà nei trapianti. III: Sulla azione disintegratrice del siero di sangue di una specie animale, per le proteine dei tessuti di altre specie.* Nota di Armando Albanese [1], presentata dal Corrispondente G. Galeotti.

In due precedenti Note, sono state esposte le ricerche compiute sui trapianti di tumori, spontanei in una data specie animale, su una specie animale diversa [2], e sulla esistenza di fermenti disintegrativi nel siero di sangue di una specie animale refrattaria [3], per le proteine di tumori spontanei in un'altra specie.

Da queste ricerche è risultato:

1) un tumore spontaneo del topo, virulentissimo per questa specie animale, non può stabilmente venire trapiantato nel ratto;

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Palermo, diretto dal prof. Vittorio Scaffidi.

[2] V. Scaffidi, Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXIV, sem. 1°, pag. 774 (1915).

[3] V. Scaffidi, Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXV, sem. 1°, pag. 363 (1916).

2) questa refrattarietà del ratto, non viene interrotta, se alla poltiglia del tumore che si trapianta, si aggiunge poltiglia di milza, o di embrione di topo, in cui, con ogni verisimiglianza, dovrebbe essere contenuta la « sostanza X », ammessa da Ehrlich, a base della sua ipotesi della atrepsia;

3) il siero di sangue di ratto possiede proprietà proteolitiche, per un tumore spontaneo del topo, verso il quale l'organismo del ratto è refrattario.

Questi ultimi risultati fanno pensare alla possibilità, che proprietà simili siano dimostrabili nel siero di sangue di alcune specie animali, verso i tessuti di animali di altra specie.

Le ricerche sugli innesti e sui trapianti di tessuti sono così numerose, che sarebbe impossibile riassumerli, comunque, in una breve Nota; del resto la citazione di esse non sarebbe strettamente attinente al contenuto di questa Nota e alle ricerche da me compiute.

Nell'insieme si può ritenere, che siano stati ammessi tre fattori principali, come causa della refrattarietà agli innesti di tessuti tra animali di specie differente, o tra individui appartenenti a razze diverse, e cioè:

1) effetti primarî tossici tra ospite e trapianto (Schöne);

2) reazioni immunitarie, nel senso di reazione anafilattica (Dungern);

3) mancanza, nell'ospite, di sostanze nutritive adatte al tessuto trapiantato (ipotesi atreptica di Ehrlich).

In seguito alle ricerche dianzi ricordate, per consiglio del prof. Scaffidi, ho ricercato, se nel siero di sangue di determinate specie animali, non esistessero fermenti capaci di scindere le proteine dei tessuti di animali di altre specie.

A tale scopo mi sono servito del metodo di Aberderhalden per lo studio dei fermenti disintegrativi, già adoperato da Scaffidi nelle sue ricerche sui tumori. La tecnica quindi è quella stessa descritta nella precedente Nota [1].

Gli animali, su cui sono state compiute le ricerche, furono i seguenti: ratto, topo, coniglio, cavia, cane; e venne reciprocamente ricercato se il siero di sangue di esemplari di ciascuna delle specie suddette, possedesse proprietà disintegrative per le proteine (muscoli e pelle), di esemplari delle altre specie.

Fu così studiata:

1)	l'azione	del siero di sangue di	ratto	sulle proteine	del topo
2)	»	»	»	»	del coniglio
3)	»	»	»	»	della cavia
4)	»	»	»	»	del cane
5)	»	»	topo	»	» ratto
6)	»	»	cavia	»	» ratto
7)	»	»	»	»	» topo
8)	»	»	»	»	» cane
9)	»	»	»	»	» coniglio
10)	»	»	coniglio	»	» ratto
11)	»	»	»	»	» topo
12)	»	»	»	»	della cavìa

[1] V. Scaffidi, Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXV, sem. 1°, pag. 363 (1916).

TABELLA.

Siero di sangue di	TESSUTI DI									
	TOPO		CONIGLIO		CAVIA		CANE		RATTO	
	pelle	muscolo	pelle	muscolo	pelle	muscolo	pelle	muscolo	pelle	muscolo
Ratto	—	—	—	—	+ +	+	+			
"	—	—	—	—	—	+ +	+ (debole)			
"	—	—	+	+ (debole)	+ (debole)	+	+			
"	—	—	—	—	—	+				
"	—	—	—	—	+ (debole)	+ (debole)				
"	—	—			—	+				
"	—	—			+ (debole)					
Topo									++	++
"									+ (debole)	+ (debole)
"									+ (")	+ (")
Cavia	+	+ +	+ +	+ +			+ +	+	++	++
"	+ (debole)	+	+	—			+ +		+++	+++
"			+ (debole)	+					+++	+++
"			+	+					++++	+++
"				+						
Coniglio	—	—			—	—	—		+ (debole)	—
"		—			+	—			+ (")	+ (debole)
"					+ (debole)	—			+ (")	+ (")
"									+ (")	+ (")
"									++	+ (")

I risultati sono complessivamente riportati nella tabella, per la esatta comprensione della quale bisogna tener presente che il segno — indica il risultato negativo della ricerca, la mancanza cioè di sostanze reagenti con la ninidrina nell'acqua di dialisi, dopo 16 ore di contatto del tessuto (pelle o muscolo) con il siero di sangue; il segno + indica invece, che nell'acqua di dialisi si sono trovate sostanze reagenti con la ninidrina; la ripetizione del segno + sta in rapporto con la intensità della reazione e quindi, in certi limiti, con la quantità di prodotti di disintegrazione delle proteine, diffuse nell'acqua di dialisi.

Naturalmente, in ciascuna prova di dialisi, veniva impiegata la stessa quantità di siero e di tessuto e la stessa quantità di acqua di diffusione; la reazione della ninidrina si praticava su una eguale quantità di acqua; anche la quantità di reattivo era sempre la stessa, di modo che i risultati sono completamente confrontabili tra di loro.

Debbo inoltre aggiungere che in ciascun esperimento, oltre la prova di dialisi con siero e tessuto, furono contemporaneamente eseguiti, come controllo, una prova di dialisi con solo siero e una prova di dialisi con acqua e un frammento del tessuto con cui si sperimentava. *Nell'acqua di dialisi di queste prove di controllo non venne mai riscontrata presenza di sostanze reagenti con la ninidrina.* .

I risultati ottenuti, come si può vedere dalla tabella, si possono riassumere così:

1) il siero di sangue di ratto è capace di provocare processi disintegrativi per i tessuti di cavia e di cane e non per le proteine dei tessuti di topo e di coniglio;

2) il siero di sangue di topo contiene invece fermenti disintegrativi per i tessuti del ratto;

3) il siero di sangue di cavia provoca proteolisi nei tessuti di topo, di coniglio, di cane e di ratto;

4) il siero di sangue di coniglio dà risultati positivi per i tessuti di ratto e negativi per le proteine dei tessuti di topo.

A parte dunque le modalità varie, specialmente inerenti alla intensità con cui si avvera la proteolisi, riscontrata nei singoli esperimenti, si può ritenere che nel siero di sangue di determinate specie animali, esistono fermenti disintegrativi, per le proteine di specie animali differenti.

Tali fermenti si debbono considerare come preformati, esistenti cioè nel siero di sangue e nettamente differenziabili, quindi, dai fermenti disintegrativi protettivi studiati da Abderhalden.

Quale importanza spetti a questi fermenti, o, se si vuole dire con maggiore sicurezza, a queste proprietà proteolitiche del siero di sangue, nella

refrattarietà spontanea di una data specie animale verso i trapianti di tessuti appartenenti ad una specie animale diversa, non è naturalmente possibile dire con certezza, in base agli esperimenti da me esposti; nè si può affermare che tale fenomeno costituisca l'unico fattore, o il più importante dello stato refrattario; ma si può ritenere fuori dubbio che esso costituisce un elemento importante, che va ulteriormente indagato e studiato.

Patologia. — *Ricerche sperimentali sulle cause che determinano la refrattarietà nei trapianti.* IV: *Può l'ablazione della milza annullare la immunità naturale, di specie, verso i tumori?* [1] Nota di Vittorio Scaffidi e Riccardo Lanzillotta, presentata dal Corrisp. G. Galeotti.

Sono note le recenti ricerche sulla importanza che spetta alla milza nella refrattarietà ai tumori.

Da esse si sono ottenuti risultati, che vanno presi in considerazione:

1) la comparsa di modificazioni strutturali della milza di animali, nei quali viene innestato un tumore, spontaneo della specie animale in esperimento (Brancati [2], Cimoroni) [3];

2) una maggiore resistenza del tessuto splenico, rispetto al parenchima di altri organi (rene, pancreas), alla inoculazione diretta di un tumore, virulento per la specie animale su cui si esperimenta;

3) uno sviluppo più rapido del tumore inoculato in animali smilzati, rispetto allo sviluppo dello stesso tumore, inoculato in animali normali della stessa specie (Brancati);

4) diminuzione della percentuale di attecchimento, o mancanza di sviluppo di un tumore (spontaneo nella specie animale adoperata), se alla inoculazione di esso si è fatta precedere la inoculazione ripetuta di tessuto splenico (Brancati, Bridré [4], Braunstein) [5], o per inoculazione simultanea di poltiglia di tumore e di milza;

5) infine, Apolant [6] ha potuto rendere meno efficace la maggiore suscettibilità, allo attecchimento di un tumore, degli animali smilzati, mediante la inoculazione di tessuti di embrioni della stessa specie portatrice del tumore.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Palermo, diretto dal prof. Vittorio Scaffidi.

[2] Brancati, vedi varie pubblicazioni in *Tumori*, 1911 e 1912.

[3] Cimoroni, *Tumori*, 1912.

[4] Bridré, Annales de l'Institut Pasteur, 1907.

[5] Braunstein, Berliner klin, Wochenschrift, 1913.

[6] Apolant, Zeitschrift für Immunitätsforschung, 1913.

Dall'insieme delle ricerche di cui sopra, risulta quindi dimostrato che la milza costituisce un organo protettivo dell'organismo nei fenomeni di attecchimanto e di sviluppo dei tumori, sia per le modificazioni strutturali che essa presenta negli animali portatori di tumore, sia per l'aumento di resistenza che essa conferisce, quando venga inoculata prima del tumore, sia infine per la maggiore recettività allo attecchimento del tumore, che presentano gli animali smilzati.

Noi abbiamo voluto ricercare se e quanta importanza abbia la milza nella refrattarietà di specie, allo attecchimento di un tumore.

È noto, specie dopo le classiche ricerche di Ehrlich (¹), che un tumore spontaneo del topo, quando venga trasportato nel ratto, tranne rare eccezioni, resta completamente inattivo.

Ci siamo quindi proposto di vedere se questa refrattarietà naturale, di specie, venisse interrotta dalla asportazione della milza.

Abbiamo adoperato, nelle nostre ricerche, il carcinoma 5 dello Istituto di Ehrlich a Francoforte, spontaneo del topo e portato, mediante numerosi trapianti, ad una virulenza costante (quasi il 100:100 di attecchimento), e come animale di specie naturalmente refrattaria a questo tumore, abbiamo adoperato il ratto bianco. Si è quindi impiegato lo stesso materiale e le stesse specie animali adoperate da Ehrlich, nelle sue ricerche originarie e, in seguito, da uno di noi (²) nello stesso Istituto di Ehrlich.

Ecco in breve la descrizione degli esperimenti compiuti e i risultati relativi.

Esperimento 1°.

Si asporta la milza ad otto ratti e dopo tre giorni si inoculano questi ed altri ratti normali di controllo, con tumore di topo, ridotto in poltiglia, e cioè:

A) 8 ratti smilzati con cc. 0,2 di poltiglia;
B) 10 " normali " " " (controllo);
C) 5 topi " " 0,1 " "

Risultati:

Esito del trapianto nei ratti smilzati: negativo;
" " " normali: "
" " topi: positivo.

(¹) Ehrlich, *Experimentelle Carcinomstudien an Mäusen*. Arbeit. a. d. königl. Institut f. exper. Therapie, Frankfurt a/M. 1906.

(²) Scaffidi V., *Sui fattori che impediscono l'attecchimento dei tumori tra animali di specie affini*. Prolusione, Gazzetta intern. med. chir. ecc. 1915.

Esperimento 2°.

Si adoperano ratti smilzati da sei giorni e lo stesso tumore adoperato nello esperimento precedente.

A) 6 ratti smilzati si inoculano con cc. 0,2 di poltiglia;
B) 12 » normali » » » » (controllo);
B) 8 topi » » » 0,1 » »

Risultati:

Esito del trapianto nei ratti smilzati: negativo;
» » » normali: »
» » topi: » positivo.

Esperimento 3°.

Ratti smilzati da 20 giorni; poltiglia di tumore, come sopra.
Si inoculano:
A) 11 ratti smilzati da 20 giorni con cc. 0,15 di poltiglia;
B) 9 » normali » » » (controllo);
C) 6 topi » » 0,1 » »

Risultati:

Esito del trapianto nei ratti smilzati: negativo;
» » » normali: »
» » topi » positivo.

In tutti gli esperimenti il tumore inoculato nei ratti ha presentato lo stesso decorso: si è avuta la formazione di un nodulo sottocutaneo, il quale dopo 6-8 giorni, cominciava a regredire, per scomparire completamente dopo 12-16 giorni. Esaminati da sei a dieci giorni dopo l'innesto, risultano costituiti da tessuto necrotico, circondato da tessuto connettivale giovane, infiltrato di leucociti. Mai si riscontrò traccia di tumore in via di accrescimento.

Nei topi si ebbe il 100 per 100 di casi positivi; il tumore presentava lo sviluppo caratteristico: lento nei primi 10-14 giorni, quindi rapido, fino a raggiungere dimensioni considerevoli. Alcuni di questi tumori, prima che comparissero tracce di ulcerazione della cute sovrastante, furono trasportati in altri topi e in tutti il risultato è stato positivo.

All'esame istologico si riscontrò sempre un tumore che riproduceva esattamente la struttura del tumore inoculato.

Da queste ricerche ne deriva quindi, che la refrattarietà spontanea del ratto, per il tumore di topo da noi adoperato, non viene interrotta, nè comunque modificata, dalla ablazione della milza.

Fisiologia. — *I processi termici dei centri nervosi. VI: Discussione dei risultati sperimentali* [1]. Nota di S. BAGLIONI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Prima di discutere l'importanza e il valore dei risultati sperimentali ottenuti, con le pile termoelettriche, dal preparato centrale di *Bufo*, è opportuno cercar di fissare meglio l'attendibilità e i limiti del metodo di indagine.

Come è noto, le pile termoelettriche indicano la *differenza di temperatura* esistente nel momento dell'esplorazione tra le due serie di saldature (termoelementi); per lievi differenze termiche si assume che esse siano direttamente proporzionali alle correnti elettriche misurate dal galvanometro (Kohlrausch, Graetz, Frank, Bürker). Laonde per avere risultati scevri d'errore e comparabili, devesi mantenere a temperatura costante la serie indifferente di termoelementi; ciò si raggiunge tenendola in ghiaccio fondente. Nel caso nostro (come in quello delle più recenti ricerche fisiologiche) tale espediente riesciva ingombrante; cercai di ottenere la costanza di temperatura della serie indifferente, allogandola nel fondo della cassettina di ebanite.

Ogni causa tendente a diminuire la differenza termica, ossia ad equilibrare la temperatura delle due serie termoelettriche, produce necessariamente diminuzione della forza elettromotrice. Due sono i fattori più importanti che possono avere tale effetto, imputabili all'una o all'altra serie: o la esiguità della variazione termica della serie esploratrice, o lo insorgere di un processo di equilibrazione nella serie indifferente. Il primo fattore è quello utile, che si desidera indagare; l'altro è una causa d'errore, che è necessario aver presente e possibilmente eliminare. È chiaro che esso può essere dovuto o alla propagazione della temperatura della serie esploratrice alla serie indifferente (i fili di ferro e costantano componenti la pila sono buoni conduttori termici; il supporto di ebanite, invece, è cattivo conduttore), oppure al calore di Peltier, dovuto allo svolgimento delle correnti termoelettriche.

Non posseggo dati per poter indicare l'entità di questa causa di errore nelle mie esperienze; teoricamente si può tuttavia dire che su essa deve avere notevole influenza la velocità (tempo), con cui si svolge la variazione termica esplorata. Se infatti un aumento o diminuzione termica avviene rapidamente, la propagazione del calore essendo relativamente più lenta di quella elettrica, essa non potrà neutralizzare l'effetto elettrico nella stessa misura, con cui può farlo se è molto lenta. Possiamo quindi dire che in tutti quei casi in cui la variazione termica osservata fu lenta, raggiunse, cioè, il valore massimo dopo parecchi minuti, quasi certamente l'entità di essa era superiore al valore indicato dall'osservazione diretta.

Non è facile dedurre da siffatte misure termoelettriche la quantità assoluta di calore prodotto o assorbito; a tal fine è necessario conoscere la capacità termica della pila, della sostanza nervosa, la conduttività elettrica del sistema. Comunque, le misure termoelettriche servono a indicare l'insorgere e a misurare comparativamente l'entità di piccole variazioni termiche, in condizioni che impediscono l'uso termometrico diretto. Che il metodo da me usato adempisse allo scopo, che era quello cui miravo più specialmente in queste mie prime ricerche, è dimostrato dalla costanza dei risultati di tutte le esperienze di controllo.

[1] Questi Rendiconti, vol. XXV, 1916, 1° sem., pp. 532, 592, 658, 698, 742.

I risultati contraddittori e incostanti, delle numerose precedenti ricerche di misurazione del calore prodotto dal sistema nervoso, sono passibili di gravi obbiezioni, mosse specialmente da Heger [1] e da Gley [2], di cui le principali erano che le variazioni termiche osservate dipendessero da modificazioni della circolazione sanguigna dell'organo o da ineguale ripartizione del calore dei tessuti vicini.

Evidentemente queste due fondamentali obbiezioni non si possono muovere alle mie ricerche. Il preparato centrale di *Bufo* per essere isolato dal corpo era privo di circolazione sanguigna; essendo poi per intero allogato nella cassettina di ebanite e accuratamente protetto da ogni influenza termica esteriore, forniva dati strettamente calorimetrici, quali esigeva Gley per poter risolvere la questione.

Non credo, quindi, di errare concludendo che i *risultati positivi delle esposte ricerche costituiscono una diretta e inoppugnabile prova, sinora mancante, della produzione termica dei centri nervosi sopravviventi.*

Per poter poi definire nel loro giusto valore teorico questi risultati, è necessario ricordare brevemente quelli più recenti ottenuti con lo stesso metodo su altri organi animali. Rinviando alle monografie riassuntive di Frank (1904) e Bürker (1908) per la nozione e la valutazione dei fatti segnalati precedentemente, ricorderò qui recenti osservazioni su diversi organi muscolari isolati, di A. Herlitzka [3], A. V. Hill [4] e J. Bernstein [5].

Herlitzka ha studiato la produzione di calore da parte del cuore isolato di coniglio, sopravvivente mediante la circolazione artificiale, servendosi di termopile di ferro e costantano avvolte su un anellino di avorio, che aggiustava alla base del cuore. Usò il galvanometro a corda di Einthoven. Il cuore di coniglio isolato e perfuso col metodo di Langendorff produceva una quantità di calore notevole, superiore di 2 o 3 volte al calore massimo prodotto da un peso corrispondente di muscolo di rana e ciò anche a temperatura ambiente. La produzione di calore variava secondo il liquido circolante (sangue più soluzione salina, o solo soluzione salina) e la temperatura. Sebbene il metodo non potesse fornire valori assoluti, tuttavia Herlitzka afferma che l'elevazione della temperatura nei singoli casi dava valori molto diversi; in alcuni non riescì a vedere alcun movimento del filo galvanometrico, in altri potè registrare un innalzamento termico di 0.012°, nella massima parte dei casi tra 0.004 e 0.006°. È probabile, sebbene non sia dimostrato, che il

[1] P. Heger, *De la valeur des échanges nutritifs dans le système nerveux*, Institut Solvay, Trav. d. laborat., II (1898), pag. 1-68.

[2] E. Gley, *Études de Psychologie physiologique et pathologique.* Paris, F. Alcan (1903).

[3] A. Herlitzka, *Ricerche di termodinamica muscolare.* Nota I: *Produzione di calore nel cuore isolato di mammifero*, Arch. di fisiol., X (1912), pag. 501.

[4] A. V. Hill, *The energy degrated in the recovery process of stimulated muscles*, Journ. of Physiol., XLVI (1913), pag. 28.

[5] J. Bernstein, *Ueber den zeitlichen Verlauf der Wärmebildung bei der Kontraktion des Muskels* (Nach Untersuchungen mit Dr. E. Lesser vom Jahre 1908). Pfluegers Arch., CLIX (1914), pag. 521.

tempo latente termico sia minore del tempo latente per la contrazione, cioè che i processi chimici si iniziino prima che il muscolo cominci a contrarsi. Durante il rilasciamento del muscolo non si dimostrò alcuna produzione di calore. Tutte le curve fanno ritenere che la produzione di calore cessi prima del principio, o al massimo al principio della fase di energia decrescente. In alcuni casi osservò una oscillazione termonegativa, in altri una minor produzione di calore in corrispondenza di una contrazione maggiore del cuore susseguente ad una pausa. È possibile che queste osservazioni si riferiscano a fenomeni dovuti a inconvenienti verificatisi nei dispositivi sperimentali.

A. V. Hill servendosi di un nuovo metodo, costruito secondo le indicazioni del Bürker e in connessione con un galvanometro di Paschen, avente una sensibilità di un milionesimo di 1° C, misurò la produzione termica di muscoli isolati di rana (gastrocnemio e sartorio). Vide che in un muscolo eccitato direttamente o indirettamente in ambiente di ossigeno, o da un solo colpo o da un breve tetano (di circa 2″), la produzione di calore continua per lungo tempo dopo che è finita la reazione meccanica. La quantità di calore prodotta dopo la fine della contrazione, in un muscolo eccitato in ossigeno, è per lo meno tanto grande quanto quella prodotta durante la fase di contrazione. In muscoli, tenuti per un'ora o più in azoto, non si produce alcun calore dopo la contrazione, come nei muscoli normali. Ogni causa che diminuisce la tensione dell'ossigeno nel tessuto, come ad esempio un eccitamento preventivo, tende a rallentare la produzione termica dopo la contrazione. In un tetano prolungato (20″) tutto l'ossigeno disponibile è apparentemente consumato prima che il tetano finisca, così che non si ha notevole produzione postuma di calore. Da questi fatti Hill conclude che nei processi di restaurazione è consumato ossigeno ed è prodotto calore postumo; questi processi di restaurazione non possono avvenire in azoto, ma sono dipendenti dalla presenza di ossigeno.

Con ulteriori ricerche, Hill, servendosi di una termopila adatta per ogni muscolo, eliminante gli errori dovuti allo sfregamento sulle giunture, durante la contrazione, dimostrò che se un muscolo può accorciarsi, in un tetano di data durata e stimolo, produce una quantità di calore molto minore (sino del 40 %) di quando è costretto a contrarsi isometricamente. Per cui la produzione di calore è proporzionale (*ceteris paribus*) alla lunghezza delle fibre durante l'attività, essendo una funzione di superficie e non di volume (Blix). Calcolando il valore assoluto del calore prodotto da un sartorio o semimembranoso, trova che esso è costante ed è, per cm. di lunghezza del muscolo, per secondo di durata della tensione e per grammo di peso della tensione sviluppata, pari a circa 15×10^{-6} calorie; se vi si includono i processi ossidativi di restauro, seguenti alla contrazione, dovrebbe essere pari a 25×10^{-6} cal.

J. Bernstein, in collaborazione con E. Lesser, nell'intento di analizzare con più facilità il decorso della produzione termica, ricorse a un organo muscolare liscio (anello gastrico della rana) che stimolava con correnti indotte di 1′; misurava la produzione termica con le pile di Heidenhain (bismuto-antimonio) e col galvanometro di Deprez-D'Arsonval. Trovò che la maggior produzione di calore avviene durante la fase crescente dell'onda di contrazione del muscolo liscio; durante la fase decrescente la produzione termica si abbassa fortemente. Estendendo tale risultato all'onda di contrazione (scossa) del muscolo striato, ne segue, in conformità della legge energetica, che nella fase crescente, in presenza di ossigeno, deve aver luogo un processo ossidativo. Nella contrazione isotonica probabilmente la massima produzione termica coincide col punto iniziale (Wendepunkt) della fase crescente, in cui avviene più rapida la contrazione; mentre nel massimo della contrazione la produzione termica è già notevolmente diminuita. La trasformazione chimica energetica è pertanto massima nei momenti della contrazione isotonica, in cui massimo è il lavoro prodotto; mentre all'altezza della contrazione isotonica, in cui non si produce più lavoro esteriore, essa è minima.

Non pochi fatti osservati sul preparato centrale di *Bufo* si accordano con quelli segnalati pel preparato muscolare; essi sono specialmente:

a) ambedue i tessuti sono sede di produzione termica (come lo sono di fenomeni respiratorî) anche in fase di apparente riposo (per il muscolo isolato ciò fu dimostrato dal Blix);

b) la produzione termica aumenta notevolmente nella fase di attività;

c) l'ossigeno esplica una notevole influenza positiva sulla produzione termica.

Questa concordanza dimostra che i processi biochimici che avvengono nei due tessuti sono della stessa natura fondamentale, come fanno supporre anche i risultati delle ricerche sullo scambio respiratorio. Tuttavia in un fatto importante, già rilevato dal Warburg (1914) [1], diversificano i tessuti muscolare e centrale; mentre, cioè, pel muscolo è dimostrabile una produzione di lavoro meccanico, che presenta determinati rapporti con la produzione termica, tale lavoro manca del tutto per il preparato centrale. Sorge, quindi, la questione dell'importanza e del valore o significato della produzione termica per questo organo. E più precisamente, quali rapporti ha il calore prodotto con la funzione nervosa? È l'energia nervosa (usando questa parola per indicare il complesso delle azioni nervose, che promuovono le contrazioni muscolari, le secrezioni glandolari, le sensazioni e i processi più elevati dei centri superiori) una forma equivalente dinamica dell'energia termica, ossia una trasformazione di quest'ultima o di una parte di essa, come vorrebbe il primo principio della termodinamica; oppure ne è indipendente?

Schematizzando, le due possibilità si potrebbero indicare come segue:

Energia chimica = energia termica = energia nervosa, oppure
Energia chimica = energia termica + energia nervosa.

È dall'energia chimica, infatti, ossia dai complicati processi assimilativi e dissimilativi dei neuroni che proverrebbero i fatti termici e le azioni funzionali.

Non possediamo dati sufficenti per risolvere il quesito in maniera assoluta. Abbiamo, tuttavia, ragioni per credere la seconda ipotesi molto più probabile della prima. I fatti esotermici decorrono parallelamente coi fatti dell'attività nervosa, provenendo gli uni e gli altri dai processi biochimici.

Il tentativo di applicare il calcolo dell'effetto *utile*, desumendolo dalla quantità di energia perduta sotto forma di calore, non mi sembra giustificato, anche perchè non sapremmo tradurre in misura diretta l'« energia nervosa ». Seppure non la si volesse calcolare indirettamente, sottraendo dalla quantità

[1] O. Warburg. *Beiträge zur Physiologie der Zelle, insbesondere über die Oxydationsgeschwindigkeit in Zellen*, Ergebn. d. Physiol. XIV (1914), pag. 253.

totale d'energia cosumata (stabilita sulla base dell'entità degli scambi biochimici) la quantità del calore emesso.

Pur accettando l'ipotesi che la produzione di calore abbia il significato di un fatto *concomitante* al riguardo della funzione dei centri nervosi, abbiamo motivi per ammettere che le due serie di fenomeni, provenendo dalla stessa fonte (gli scambi chimici), siano collegati tra loro da intimi rapporti. Questi motivi sono i fatti sopra ricordati, che nel caso di aumentata attività (per avvelenamento stricninico) si osserva anche un forte aumento della produzione termica, e, d'altra parte, nel caso di diminuita attività (per asfissia o narcosi) anche la produzione termica sensibilmente diminuisce.

L'azione dell'ossigeno merita una speciale considerazione. Quest'azione, che precedenti ricerche hanno dimostrato indispensabile per una lunga sopravvivenza dei centri isolati, risultò differente secondo che fu usata una corrente gasosa di ossigeno puro, o una soluzione di $H_2 O_2$. Nel primo caso si ebbero lievi, ma persistenti aumenti termici, mentre l'applicazione di una piccolissima quantità di $H_2 O_2$ produceva una rapidissima elevazione termica, senza che avessero luogo fenomeni d'ipereccitamento. Quest'ultimo fatto, però, sembra dovuto a causa (forse liberazione di ossigeno) estranea ai processi biochimici.

Se è lecito, pertanto, dedurre dai risultati osservati alcunchè sulla natura intima dei processi normali biochimici, si potrebbe dire che essi non possono essere paragonati ai comuni processi di ossidazione e combustione, la cui intensità è proporzionale alla quantità dell'ossigeno disponibile, ma possono essere, tutt'al più, paragonati a una lentissima e graduale ossidazione, *regolata da qualche fine meccanismo interno* e *accompagnata da una lievissima tonalità termica positiva.* Più che l'ossigeno, nell'accelerare o, meglio, nel disordinare il normale decorso dei processi chimici ed energetici, si dimostrarono agenti efficaci i veleni specifici (stricnina), o i mezzi ossidanti energici (acqua ossigenata), o la disorganizzazione prodotta da urto meccanico; cioè, tutti gli agenti capaci di turbare il fine meccanismo autoregolatore dei processi metabolici.

Chimica fisiologica. — *Sul metabolismo del glicosio in organi sopravviventi.* III: *Azione della milza sul glicosio in essa circolante.* Nota di CAMILLO ARTOM, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Uno studio sul metabolismo del glicosio nella milza, parve a me che potesse riuscire non scevro d'interesse. Il volume considerevole di quest'organo; le sue funzioni, ancora in parte oscure, e in parte forse affatto sconosciute; la sua ricchezza in leucociti, i quali posseggono indubbiamente un'attività glicolitica intensa; i suoi rapporti con la funzione glicogenetica del fegato, dimostrati dal fenomeno dell'aumento del glicogeno epatico dopo la splenectomia (1): erano tutte considerazioni, che facevano pensare che fosse prezzo dell'opera esperimentare anche su quest'organo con il metodo delle circolazioni artificiali, già usato per l'intestino (2) e per il pancreas (3).

La letteratura antecedente è scarsissima di lavori che ci riguardino direttamente.

Levene e Meyer (4), studiando l'azione in vitro di poltiglie, o di estratti pressati dei varî organi di cane su soluzioni di glicosio, trovarono che, mentre la poltiglia e l'estratto di milza non dimostrano isolatamente alcuna azione glicolitica, l'acquistano, quando vi si uniscano estratti o poltiglie di altri organi (muscolo, polmoni, fegato, pancreas). Si tratterebbe dunque di un fenomeno molto simile a quello, osservato da Cohnheim (5) e da più altri dopo di lui, ma tuttora messo in dubbio da molti sperimentatori, sull'azione glicolitica del miscuglio di estratto pancreatico e plasma muscolare.

D'altra parte numerosi autori affermano l'importanza dei leucociti nella glicolisi. Così Loewi e Richter (6) videro coincidere con una ipoleucocitosi una notevole diminuzione del potere glicolitico del sangue; Hahn (7) trovò in un caso di leucocitosi un'azione glicolitica molto intensa da parte del sangue; Levene e Meyer (8) dimostrarono direttamente che per l'azione dei leucociti una soluzione di glicosio perde parzialmente il suo potere riducente, e questo non torna al valore primitivo dopo idrolisi con acidi minerali. I

(1) C. Verdozzi, Arch. di fisiol., XIV (1916)
(2) U. Lombroso, Rend. Accad. dei Lincei, XXV, 2° sem. (1916)
(3) C. Artom, Rend. Accad. dei Lincei,
(4) Levene e Meyer, Journ. of Biol. Chem., XI, pag. 353 (1912).
(5) Cohnheim, Zeitschr. f. physiol. Chem., XXXIX, pag. 336 (1903).
(6) Loewi e Richter, Berliner Kl. Woch. (1897), n. 47.
(7) Hahn, Berliner Kl. Woch., pag. 499 (1897).
(8) Levene e Meyer, Journ. of Biol. Chem., XI, pag. 361 (1912).

lavori citati sono per noi assai interessanti, perchè, come è noto, la milza è ricchissima di corpuscoli bianchi, e ad essi quindi potrebbe ragionevolmente attribuirsi, in tutto o in parte, l'eventuale azione glicolitica che noi avessimo constatato nelle nostre ricerche.

La disposizione sperimentale, da me adottata nelle presenti ricerche, è perfettamente simile a quella seguita nelle esperienze analoghe sul pancreas.

Ad un cane appena ucciso per dissanguamento, asportavo la milza; introducevo nell'arteria splenica la cannula per la circolazione, e ponevo l'organo nell'apparecchio di Linde. In tre esperienze ho usato per la circolazione sangue defibrinato dello stesso animale, dopo di avervi aggiunto glicosio in ragione del $^1/_2$-1 %; in una quarta esperienza ho fatto circolare nella milza liquido di Tyrode, contenente l'1 % di glicosio. Per dosare il glicosio si valutava il potere riducente col metodo di Lehmann-Emden, previa precipitazione con ferro colloidale, quando si sperimentava con sangue.

Per l'organo i dosaggi erano eseguiti sull'estratto, ottenuto facendo lungamente bollire il tessuto sminuzzato con una soluzione diluita di acido cloridrico.

I.

Cane maschio kg. 9,4. — Circolazione con sangue cm.^{3} 200 + glicosio 1 %. Peso dell'organo posto a circolare gr. 50, dopo circolazione gr. 75. Pressione media di circolazione 100-120 mm. Hg. Velocità media per minuto cm.^{3} 10. Durata della circolazione ore 1 $^1/_4$.

Per 10 cm.^{3} sangue	prima della circolazione	. . . .	=	105.6	mgr.	glicosio
» » »	dopo la	»	. . . .	=	91.8	»	»
» » »	»	»	idrolizzato con HCl	=	96.2	»	»
» 10 gr. organo	prima della	»	. . . .	=	80.1	»	»
» » »	dopo la	»	. . . .	=	65.0	»	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue dopo la circolazione milligrammi [2112-1606.5] = 505.5; se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. [487.5 — 400.5] = 87. Deficit assoluto mmgr. 418.5 glicosio.

II.

Cane maschio kg. 11. — Circolazione con sangue cm.^{3} 250 + glicosio 0.5 %. Peso dell'organo posto a circolare gr. 40, dopo circolazione gr. 55. Pressione media di circolazione 90-110 mm. Hg. Velocità media per minuto cm.^{3} 12. Durata della circolazione ore 1 $^1/_4$.

Per 10 cm.^{3} sangue	prima della circolazione	. . . .	=	52.0	mgr.	glicosio
» » »	dopo la	»	. . . .	=	48.0	»	»
» » »	»	»	idrolizzato con HCl	=	51.2	»	»
» 10 gr. organo	prima della	»	. . . .	=	61.2	»	»
» » »	dopo la	»	. . . .	=	51.1	»	»

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue dopo la circolazione milligrammi [1300-1203.2] = 96.8. Se ne ritrovano in più nell'organo mmgr. [281 — 244.8] = 36.2. Deficit assoluto mmgr. 60.6 glicosio.

III.

Cane femmina kg. 14,5. — Circolazione con sangue cm.³ 250 + glicosio ¹/₂ %. Pressione media 80-150 mm. Hg. Velocità media della circolazione per minuto cm.³ 18. Durata della circolazione 1 ora. Peso dell'organo posto a circolare gr. 55, dopo circolazione gr. 70.

Per 10 cm.³ sangue prima della circolazione	= 50.2	mgr. glicosio
» » » dopo la »	= 46.9	» »
» 10 gr. organo prima della »	= 81.0	» »
» » » dopo la »	= 78.1	» »

Complessivamente si ritrovano in meno nel sangue dopo la circolazione milligrammi [1255 — 1097.2] = 159.8. Se ne ritrovano in più nell'organo mg. [546.7 — 445.5] = 101.2. Deficit assoluto mgr. 58.6 glicosio.

IV.

Cane maschio kg. 10. — Circolazione con liquido di Tyrode cm.³ 400 + glicosio 1 %. Peso dell'organo prima della circolazione gr. 60, dopo circolazione gr. 85. Pressione media 80-100 mm. Hg. Velocità media di circolazione per minuto cm.³ 15. Durata della circolazione ¹/₂ ora.

Per 10 cm³ liquido prima della circolazione	= 92.4	mgr. glicosio
» » » dopo la »	= 89.6	» »
» 10 gr. organo prima della »	= 64.0	» »
» » » dopo la »	= 63.2	» »

Complessivamente si ritrovano in meno nel liquido dopo la circolazione milligrammi [3696 — 3449.6] = 246.4 glicosio. Se ne ritrovano in più nell'organo milligrammi [537.2 — 384] = 153.2. Deficit assoluto mgr. 93.2 glicosio.

Dalle riferite ricerche appare che:

facendo circolare nella milza di cane sangue contenente glicosio, si ha sempre una diminuzione del potere riducente del sangue, diminuzione che è varia da caso a caso, e che può raggiungere il 25 %;

il contenuto in idrati di carbonio della milza aumenta generalmente nelle circolazioni con sangue, peraltro non in misura tale da giustificare la corrispondente scomparsa di glicosio dal sangue; ne giustifica al più il 70 %;

anche facendo circolare nella milza di cane liquido di Tyrode, contenente glicosio si ha diminuzione del potere riducente del liquido;

il contenuto in idrati di carbonio della milza aumenta pure nelle circolazioni con liquido di Tyrode; tale aumento è tuttavia anch'esso inferiore alla corrispondente diminuzione del potere riducente del liquido.

Una differenza di consumo del glicosio fra le circolazioni con sangue e quelle con liquido di Tyrode, non è quindi, per quanto si può arguire dal limitato numero delle nostre esperienze, così evidente, come per il pancreas e soprattutto per l'intestino. Noi possiamo soltanto concludere che la milza sopravvivente è capace di distruggere il glicosio, sciolto nel sangue o nel liquido di perfusione, indipendentemente dal concorso di altri tessuti od organi.

Parassitologia. — *Ancora per la lotta contro le arvicole* (1). Nota III del prof. Alfonso Splendore, presentata dal Socio B. Grassi.

A seguito delle ricerche di Laboratorio, di cui fu già data notizia in due Note precedenti (2), sulla propagazione dell'epizoozia delle arvicole da me incontrata in contrada « Contessa » di Cerignola, ad iniziativa del senatore prof. Grassi, furono fatti larghi esperimenti in aperta campagna.

Nei terreni della Scuola Agraria di detta città, in un recinto di circa cento metri quadrati di terreno convenientemente preparato, il dott. Martelli rinchiuse novanta arvicole sane, le quali vi rimasero senza alcun inconveniente per una ventina di giorni, divorando allegramente tutto quanto potevano. Dopo detto tempo venne introdotta in mezzo ad esse una mezza dozzina di *Pitymys Savi* infetti e, in pochi giorni, si manifestò una moria, che distrusse tutte le dette bestioline in breve tempo.

Un poco più tardi furono rinchiuse, nello stesso recinto già vuoto, altre cento arvicole sane, ma vennero a morte anche queste in breve tempo, certamente colpite dall'infezione ivi trovata.

Parimenti: in un vivaio di viti americane nella contrada denominata « Pozzo delle Capre » presso S. Severo, dell'estensione di circa quattro ettari di terreno tutto intorno circondato da trincee, s'incontrava un enorme numero di detti roditori; nel mese di giugno u. s. furono disseminate esche avvelenate con arsenito di potassa, ma essi, ciò non ostante, rimasero sempre numerosissimi; nei primi di agosto, invece, furono introdotti una ventina di arvicole infette provenienti dalla contrada « Contessa » avanti ricordata e presto scomparvero anche essi, per non riapparire mai più fino alla presente data.

Il risultato di tali esperimenti, che corrisponde perfettamente a quello ottenuto colle ricerche del Laboratorio, diede nuovo incoraggiamento per

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Entomologia agraria della R. Università di Roma.

(2) Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, luglio-agosto 1916.

un'applicazione sempre più larga del metodo di lotta da me suggerito. In conseguenza, col *virus* della suddetta epizoozia, parecchie volte, tanto qui a Roma, nel Laboratorio di Entomologia Agraria, quanto nella Scuola Agraria di Cerignola o nella sede del Consorzio Agrario di S. Severo, si procedette ad inoculazione di numerose arvicole, le quali, così infette, vennero, poi, trasportate e disseminate nelle campagne invase di varie località infestate.

Dalle osservazioni fatte in seguito, dopo qualche tempo, risultò che dove era stata fatta la disseminazione delle arvicole inoculate, tali roditori, per vastissime zone, o erano completamente scomparsi, oppure erano notevolmente diminuiti, la qual cosa si poteva dedurre dalla enorme diminuzione dei *capi* freschi, accertata colla numerazione relativa.

Di più, se si riusciva a catturare arvicole vive, queste trasportate al Laboratorio venivano a morte in breve tempo, mostrando all'autopsia le alterazioni anatomiche e il reperto microbiologico dell'infezione propagata; ed il microrganismo patogeno relativo, all'esame colturale, ripresentava i caratteri del *Bact-pitymysi* già registrati.

Per l'identificazione di questo germe, per altro, a quanto fu già notato nella mia precedente comunicazione, bisogna aggiungere le seguenti varianti, constatate con ulteriori e ripetute osservazioni. Esso può coagulare il latte; ma ciò, mentre alcune volte avviene in poco tempo, altre volte si verifica solo dopo molti giorni. Di più: può coagulare non solo la soluzione di nutrosio lattosio, ma anche l'altra fatta di nutrosio glucosio, secondo Barsiekow, la qual cosa, per altro, non avviene con costante regolarità, mentre, invece, adoperando il liquido di Klopstock, il quale, com'è noto, è composto dalla mescolanza delle due soluzioni di Barsiekow, la coagulazione del mezzo nutritivo avviene quasi costantemente e accompagnata sempre con produzione di gas e di acidità.

Inoltre, sull'agar fucsinato di Endo il *Bact-pitymysi* in certi casi produce una colorazione che si può definire, come già fu detto, viola-rosso, ma in certi altri casi produce colorazione che può essere comparata al rosso delle ciliege.

Sulle arvicole infette di questa nuova serie di osservazioni ho, poi, voluto ripetere qualche ricerca riguardo agli ectoparassiti e, con le prove colturali, ho, ancora una volta, ritrovato il predetto batterio nell'intestino delle pulci sopra esse raccolte, il che ho verificato in circa il 20 % di tali insetti esaminati.

Le pulci da me incontrate su *Pitymys Savi*, fra gli altri caratteri, si distinguono fra loro per il possesso di vario numero di pettini, essendo alcune provviste di un pettine solo situato sul loro protorace; altre di due pettini, cioè uno di pochi denti al bordo inferiore della testa, un altro di molti denti sul protorace; ed altre, infine, di tre pettini, ciascuno di molti denti, rispettivamente situati sul bordo inferiore della testa, sul protorace

e sul primo anello addominale. In conseguenza, a quanto mi sembra, dette pulci debbono essere classificate rispettivamente, nei generi: *Ceratophyllus* Curt., *Ctenopsylla* Kol., *Hystrichopsylla* Tasch.

Dagli esperimenti sopra ricordati pare, dunque, dimostrata anche su larga scala la contagiosità del *virus* dell'epizoozia della contrada « Contessa » di Cerignola e l'utile applicazione che di esso può farsi, e fu anche fatta a scopo di lotta contro tali roditori.

Ma, oltre all'epizoozia ora ricordata, in questi ultimi mesi, nella Capitanata, sono apparsi, fra le arvicole, altri focolai di mortalità dovute a germi infettivi, i caratteri dei quali non corrispondono completamente a quelli del microrganismo avanti descritto.

Nella Scuola Agraria di Cerignola sopra menzionata, il dott. Martelli aveva fatta una grande raccolta di *Pitymys Savi* da servirgli per le sue ricerche sulla biologia di tali roditori. Questi animaletti erano stati catturati in diverse località della provincia di Foggia e il Martelli, senza distinzione di provenienza, li aveva ripartiti a gruppi, rinchiudendoli in recinti separati, dentro ingegnosi abitacoli propositalmente costruiti.

Avvenne che, poco dopo il loro arrivo, in due di tali ripartizioni incominciarono a morire e morivano giornalmente, in continuazione.

Nei primi di ottobre u. s. io mi trovavo di passaggio in detta Scuola; presi i casi in esame e, colle ricerche opportune, potetti verificare che, mentre le arvicole morte in una ripartizione presentavano reperto anatomico e batteriologico affatto identico a quello dei casi della contrada « Contessa », le arvicole morte nell'altra, all'autopsia, potevano distinguersi per un tumore di milza molto più voluminoso e meno bruno di quello presentato dalle prime. Inoltre, negli organi interni delle seconde arvicole, invece dei batteri corti e tozzi presentati dalle prime, s'incontrava, in grandissimo numero, la presenza di un microrganismo, che aveva l'aspetto di bastonetti snelli e sottili.

Il risultato delle mie osservazioni sui caratteri di quest'ultimo germe fino ad ora è stato il seguente:

Nei tessuti: lunghezza da 1 a 5 μ; larghezza circa 0,30 μ, poco più o meno.

Facile colorazione coi comuni metodi, ma al Gram meno resistente del batterio precedente.

Nelle colture: sviluppo a temperatura dell'ambiente di laboratorio, ma meglio ancora a quella del termostato ordinario (30-37).

Morfologia e dimensioni simili a quelle presentate nei tessuti.

Nessuna resistenza al Gram.

Movimenti attivi abbastanza vivaci.

Riguardo al comportamento sui varî terreni si è notato quanto segue:

Agar comune per strisciamento: patina liscia, splendente, bianca grigia, a margini lievemente ondulati. Colonie staccate rotonde, liscie, con centro mammellonato, margine liscio, contenuto finamente granuloso.

Acqua di condensazione torbida, con abbondante sedimento biancastro.

Gelatina comune per infissione: canale d'infissione formato di fine granulazioni; alla superficie esterna patina sottile bianco grigia, a bordi ondulati. Nessuna fluidificazione.

Brodo comune: mediocre intorbidamento uniforme, con sedimento non molto abbondante, ma alquanto filante; nessuna pellicola alla superficie. Con aggiunta di glucosio: nessuna produzione di gas.

Agar Drigalski-Conradi: nessun cambiamento di colore nel substrato; colonie violacee, splendenti.

Agar fucsina di Endo: colorazione del substrato e delle colonie in rosso vinoso.

Patate: sviluppo nullo o quasi impercettibile alla superficie.

Soluzioni laccamuffate di Barsiekow o di Klopstock: scarso sviluppo; nessuna coagulazione e nessun sviluppo di gas.

Latte: nessuna coagulazione.

Acqua di peptone: reazione dell'Indol (Salkowski) negativa.

Come si vede, quindi, questo secondo microrganismo pare differente dal primo per essere più lungo e più sottile, nei tessuti meno resistente al Gram e nelle colture per essere dotato di movimenti, nonchè per mancanza di sviluppo o quasi sulla patata e per nessun sviluppo di gas nei terreni glucosati, nessun cambiamento di colore dei substrati nei terreni laccamuffati.

Quanto al suo potere patogeno, per altro, in esperimenti di trasmissione, non meno del batterio precedente, questo microrganismo si è mostrato attivo, uccidendo in breve tempo alcuni *Pitymys Savi*, *M. sylvaticus* e *M. musculus* ai quali venne somministrato. Questi animaletti di esperimento inoculati sottocute con qualche goccia di emulsione in siero fisiologico di fegato o di milza appartenenti ad arvicole da esso infette, talvolta vennero a morte in meno di 24 ore. Arvicole sane, messe in convivenza con arvicole in questo modo infettate, vennero a morte anch'esse in pochi giorni.

Naturalmente l'infezione in tutti questi casi, con la presenza di questo nuovo microrganismo, fu perfettamente verificata con gli opportuni esami microscopici e colturali.

Somministrato per via della bocca anche questo germe, in generale, ha mostrato incostante attività.

In tutti i modi, in coltura esso è apparso fornito di virulenza variabile più che non lo sia nel materiale patologico direttamente raccolto sugli animali infetti.

Mercè inoculazioni sottocutanee fatte con questo nella maniera suddetta, ho potuto riprodurre l'infezione in serie tutte le volte che le ho esperimentate.

È interessante il fatto che ho ritrovato un microrganismo che ritengo identico a questo secondo germe di *Pitymys Savi*, in un *M. sylvaticus* spontaneamente infetto, il quale, pervenutomi dalle tenute di Pavoncelli da Cerignola, venne a morte, poche ore dopo il suo arrivo nel Laboratorio della Scuola Agraria, dove io mi trovavo. Questo topo campagnuolo presentava lesioni anatomiche simili a quelle delle arvicole ed il suo microrganismo alle varie ricerche presentò lo stesso comportamento microscopico, e colturale avanti notato, salvo che, alle colture, produsse anche coagulazione del latte e formazione di velo alla superficie del brodo di coltura.

Finalmente, nei primi di novembre p. p. nell'Istituto di Entomologia Agraria dell'Università di Roma, ci pervenne un lotto di circa duecento arvicole le quali, a richiesta del prof. Grassi, erano state gentilmente rimesse dal delegato antifillosserico dott. Carelli.

Questi animaletti erano stati catturati nel territorio di Torremaggiore in una contrada dove, da tempo, si era manifestata una moria di detti roditori e dove, per quanto ci fu assicurato, almeno fino a quella data, non era stato applicato alcun *virus* arvicolicida. Arrivate al nostro Laboratorio tali arvicole incominciarono a morire e poco a poco morirono tutte in due o tre giorni, dopo il loro arrivo.

All'autopsia, in maggior parte, presentavano congestione degli organi interni e tumore di milza, più o meno come i casi delle sopra registrate infezioni, e, all'esame microscopico, mostrarono, nei tessuti relativi, la presenza di un piccolo batterio morfologicamente rassomigliante a quello dell'infezione ultima ricordata. Nelle ricerche colturali, questo microrganismo dimostrò un comportamento differente da quello dei batteri avanti descritti.

I caratteri da esso presentati sono i seguenti:

Nei *tessuti*: forma di bastonetti tenui e sottili con dimensione di 2 o 3 μ. di lunghezza per 0,20 — 0,30 μ di larghezza; non resistente al Gram.

Nelle *colture*: sviluppo in generale poco rigoglioso nei mezzi ordinarî.

Morfologia e comportamento alle colorazioni come nei tessuti. Movimenti attivi; ma non molto vivaci.

Sull'*agar comune* per strisciamento: scarso e stentato sviluppo con patina grigiastra umida semi trasparente, senza caratteri speciali; acqua di condensazione torbida, senza velo alla superficie; colonie staccate piccole poco sollevate, grigiastre, rotonde, cupoliformi, a margini lisci, contenuto finamente granuloso.

Sull'*agar glucosata*: sviluppo più rigoglioso ma analogo a quello del terreno precedente.

Nel *brodo comune*: intorbidamento omogeneo, con discreto sedimento bianco grigio, senz'alcuna pellicola. Con aggiunta di glucosio: discreto sviluppo di gas.

Sull'*agar Drigalski-Conradi*. lento e tenue arrossamento del substrato.

Sull'*agar fucsinata* di Endo: colonie rosse.

Nelle *soluzioni laccamuffate di Barsiekow e di Klopstock*: lieve arrossamento, ma nessuna coagulazione e nessun sviluppo di gas.

Nel *latte*: nessuna coagulazione.

Sulla *patata*: scarsa patina grigiastra.

Nell'*acqua di peptone*: reazione dell'Indol (Salkowski) negativa.

Nella *gelatina comune* per infissione: canale dapprima finamente granuloso e poscia provvisto di ramuscoli sottili e delicati paralleli fra loro in tutta la sua lunghezza; alla superficie cresciuta in forma di patina bianco grigia sottile; fluidificazione cilindrica dopo varî giorni dello sviluppo colturale.

Quest'ultimo microrganismo anch'esso, come i precedenti, agli esperimenti si è mostrato patogeno per *Pitymys Savi* e per *M. sylvaticus*, tanto per via sottocutanea quanto per via della bocca.

Sono, dunque, tre specie di germi patogeni che ho, fino ad ora, incontrato fra le arvicole, nella Capitanata. Essi, come si è visto, differiscono fra loro notevolmente pei caratteri colturali e sono anche differenti dal *Bac. typhi murium*, come pure dagli altri microrganismi fino ad ora notati nella letteratura. Credo che rappresentano specie di batteri ancora non da altri descritti e per indicarli, mantenendo almeno ancora provvisoriamente per essi in comune il nome di *Bact pitymysi*, secondo l'ordine con cui vennero descritti, specificherò ciascuno, rispettivamente, coi numeri romani, I, II, III.

Questi tre batteri, a quanto mi pare, se opportunamente applicati, potranno riuscire molto utili nella lotta contro le arvicole e i topi campagnuoli, là dove questi roditori ancora infestano le campagne del nostro Paese, e meritano perciò speciale considerazione, nell'interesse dell'Agricoltura e dell'economia nazionale.

E. M.

INDICE DEL VOLUME XXV, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1916 — 2° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

D

F

G

K

L

INDICE PER MATERIE

N

P

ERRATA CORRIGE

Pag. 207, 1ª linea, in luogo di « non », porre « già ».

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 12°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 2.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 dicembre 1916.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*